INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA OBRA
PUBLICADA EN INGLÉS CON EL TÍTULO:
ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA
© JOHN WILEY & SONS, INC.

COLABORADOR EN LA TRADUCCIÓN:
HUGO VILLAGÓMEZ VELÁZQUEZ

BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
(5) 521-21-05
01(800) 7-06-91-00
(5) 512-29-03
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

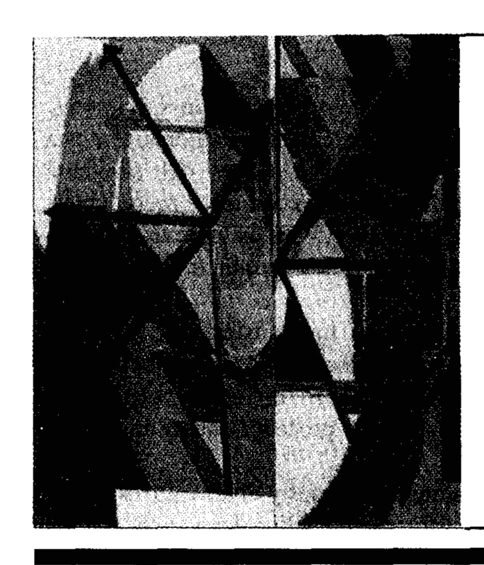
CANIEM NÚM. 121

QUINTA REIMPRESIÓN
DE LA SEGUNDA EDICIÓN

HECHO EN MÉXICO
ISBN 968-18-5192-7



Para mi esposa Pat
y mis hijos
Brian, David
y Lauren



PRÓLOGO

Así como en la edición anterior, en esta nueva edición se proporciona un tratamiento básico del álgebra lineal, idóneo para estudiantes que están cursando el primer o segundo años de facultad. Mi objetivo es presentar los fundamentos del álgebra lineal de la forma más clara posible, por lo que el aspecto pedagógico es esencial. No se requiere haber estudiado cálculo, aunque se presentan ejercicios y ejemplos para estudiantes que tienen los conocimientos necesarios; estos ejercicios y ejemplos están claramente indicados y se pueden omitir sin pérdida de continuidad.

RESUMEN DE LOS CAMBIOS EN ESTA EDICIÓN

Aunque esta edición tiene mucho en común con la edición anterior, se trata de una revisión sustancial. He intentado mantener la claridad y el estilo de la edición previa, y a la vez reflejar las necesidades cambiantes de una nueva generación de estudiantes. Con esta intención he puesto en práctica varias recomendaciones hechas por el *Linear Algebra Curriculum Study Group*. También he hecho algunos cambios de organización que deben facilitar a los instructores cubrir los fundamentos de todos los temas esenciales, inclusive con severas restricciones de tiempo. Posteriormente, en este prólogo se presenta una descripción de los cambios capítulo a capítulo, aunque a continuación se presenta un resumen de los cambios más importantes:

- **Mayor énfasis en las relaciones que hay entre los conceptos:** Uno de los objetivos importantes de un curso de álgebra lineal es establecer la trama

intrincada de las relaciones que hay entre sistemas de ecuaciones, matrices, determinantes, vectores, transformaciones lineales y eigenvalores. En esta edición, la trama de relaciones se desarrolla a través del siguiente crescendo de teoremas que vinculan cada nueva idea con ideas precedentes: 1.5.3, 1.6.4, 2.3.6, 4.3.4, 6.5.9, 6.2.7, 6.4.5 y 7.1.5. Estos teoremas no sólo hacen más coherente el panorama algebraico, sino también sirven como fuente constante de repaso.

- **Transición más suave hacia la abstracción:** La transición de R^n a espacios vectoriales generales es traumática para casi todos los estudiantes, de modo que he intentado suavizarla analizando R^n en detalle, recalcando los conceptos geométricos subyacentes antes de proceder con el estudio de espacios vectoriales generales.
- **Exposición temprana de transformaciones lineales y eigenvalores:** A fin de asegurar que el material sobre transformaciones lineales y eigenvalores no se pierda al final del curso, algunos de los conceptos básicos que se relacionan con tales temas se desarrollan más pronto en el texto y luego se repasan cuando el tema se desarrolla con mayor profundidad en la parte final del texto. Por ejemplo, las ecuaciones características se analizan brevemente en la sección sobre determinantes. Las transformaciones lineales de R^n a R^m se abordan inmediatamente después que se introduce R^n, y se analizan más tarde en el contexto de las transformaciones lineales generales. Estos repasos ayudan a asegurar que los estudiantes se familiaricen con los fundamentos de todos los temas más importantes, inclusive cuando el tiempo apremia.
- **Mayor énfasis en la conceptualización:** Para mantener el interés actual en la conceptualización y en las aplicaciones crecientes del álgebra lineal a las gráficas, he puesto mayor énfasis en los aspectos geométricos de las rotaciones, proyecciones y reflexiones en R^2 y en R^3.
- **Nuevo material sobre mínimos cuadrados y descomposición QR:** Se ha añadido nuevo material sobre mínimos cuadrados y descomposición QR, en respuesta al interés creciente en estos temas.
- **Más demostraciones**: Se han añadido varias demostraciones que antes habían sido omitidas. Todas las demostraciones en el texto han sido escritas en un estilo adecuado para principiantes, y se ha puesto especial cuidado a fin de asegurar que el carácter accesible y amable del texto no haya sido afectado de manera adversa por las demostraciones adicionales. Quienes deseen un curso matemáticamente más formal encontrarán que esta nueva edición es más idónea para tal efecto, y quienes deseen un curso más conceptual tendrán mayor elección en las demostraciones.

DETALLES DE LOS CAMBIOS DE ESTA EDICIÓN

La amplia aceptación de la edición anterior ha sido muy gratificante, y aprecio las sugerencias constructivas recibidas de parte de los usuarios y revisores. Se han revisado algunas secciones del texto para presentarlas con más claridad, y se han

efectuando cambios sustanciales en el contenido y su organización, en respuesta a las sugerencias tanto de los usuarios como de los revisores, así como de las recomendaciones hechas por el *Linear Algebra Curriculum Study Group*.

Hay muchas formas en las que es posible ordenar el material en un curso de álgebra lineal; el ordenamiento que he elegido para los capítulos refleja mi inclinación por el axioma de que es necesario proceder de lo conocido a lo desconocido y de lo concreto a lo abstracto.

A continuación se presenta un resumen capítulo a capítulo de los cambios más importantes en esta nueva edición.

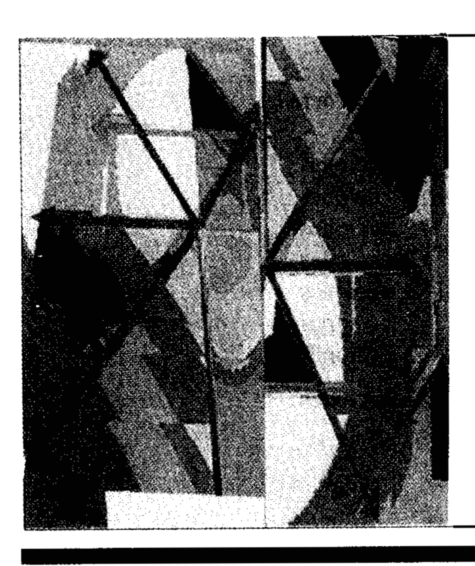
- **Capítulo 1.** Se presenta una nueva sección sobre matrices de forma especial: diagonal, triangular y simétrica. Al modificar ligeramente el material, no se incrementó el número de secciones de este capítulo.
- **Capítulo 2.** A este capítulo determinante se ha añadido nuevo material introductorio sobre eigenvalores, eigenvectores y ecuaciones características. Este material se repasa y posteriormente se analiza con más detalle en el capítulo 7. Se ha añadido la demostración de la igualdad $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- **Capítulo 3.** Se presenta nueva información sobre ecuaciones vectoriales de rectas y planos, y la interpretación geométrica de los determinantes 2×2 y 3×3.
- **Capítulo 4.** Este es un nuevo capítulo dedicado exclusivamente a R^n. Se desarrollan conceptos fundamentales y se presenta una introducción a las transformaciones lineales de R^n a R^m, recalcando el aspecto geométrico de las proyecciones, rotaciones y reflexiones. A diferencia de la edición anterior, este material se presenta ahora *antes* del desarrollo de los espacios vectoriales generales. El material de este capítulo se analiza más tarde, en el contexto de espacios vectoriales generales.
- **Capítulo 5.** Este capítulo corresponde al capítulo 4 de la edición anterior. Se han añadido muchas de las demostraciones que se habían omitido. También se presenta nuevo material sobre el wronskiano, para quienes han estudiado Cálculo, y se incluye nuevo material sobre los cuatro espacios fundamentales de una matriz.
- **Capítulo 6.** Este capítulo corresponde al capítulo 5 de la edición anterior. Se presenta nuevo material sobre complementos ortogonales, descomposición QR y mínimos cuadrados.
- **Capítulo 7.** Este capítulo corresponde al capítulo 6 de la edición anterior. Se ha repasado el material desarrollado antes sobre eigenvalores y eigenvectores. Se incluye nuevo material sobre las multiplicidades geométrica y algebraica, así como una explicación mejorada sobre los requisitos para la diagonalización.
- **Capítulo 8.** Este capítulo corresponde al capítulo 7 de la edición anterior. El material se ha vuelto a escribir sustancialmente, a fin de reflejar el hecho de que las transformaciones lineales de R^n a R^m se introdujeron en el capítulo 4.
- **Capítulo 9.** Este capítulo corresponde al capítulo 8 y a las secciones 9.1 y 9.2 de la edición anterior. Se ha vuelto a escribir la sección sobre la

geometría de los operadores lineales sobre R^2 para poder fundamentar los conceptos desarrollados en la sección 4.2.

- **Capítulo 10.** Este capítulo corresponde al capítulo 7 de la edición anterior. Los cambios son menores.

ACERCA DE LOS EJERCICIOS

En todos los ejercicios de cada sección se empieza con problemas de rutina, se avanza hacia problemas más sustanciales y se concluye con problemas teóricos. Al final de casi todos los capítulos se presenta un conjunto de ejercicios complementarios que pueden presentar más dificultad y forzar al estudiante a extraer ideas de todo un capítulo, en vez de hacerlo solamente de una sección específica.



GUÍA PARA EL INSTRUCTOR

PROGRAMAS POSIBLES PARA UN CURSO NORMAL

He revisado una gran cantidad de posibilidades para cursos de álgebra lineal. La variación entre las instituciones es amplia, aunque los cursos tienden a caer en dos categorías: una que consta de entre 20 y 30 lecciones (excluyendo los exámenes y los repasos) y otra que consta de entre 35 y 40 lecciones (excluyendo los exámenes y los repasos). Con base en mi análisis de estas posibilidades, he proporcionado dos patrones para elaborar un curso propio. Los patrones se deben ajustar a fin de reflejar los intereses y requisitos propios, aunque deben ser útiles como punto de partida. En el patrón largo se supone que se cubren todas las secciones del capítulo, y en el patrón corto se supone que el instructor selecciona material para ajustarse al tiempo disponible.

Dos cambios en la organización del texto facilitan la construcción de cursos más cortos: la breve introducción a los eigenvalores y eigenvectores que se presenta en las secciones 2.3 y 4.3 y la colocación previa de las transformaciones lineales de R^n a R^m en el capítulo 4. Estos cambios aseguran que el estudiante se familiarice un poco con estos conceptos fundamentales, inclusive si el tiempo disponible para abordar los capítulos 7 y 8 es limitado. Observé también que los estudiantes que ya conocen el material pueden omitir el capítulo 3 sin pérdida de continuidad.

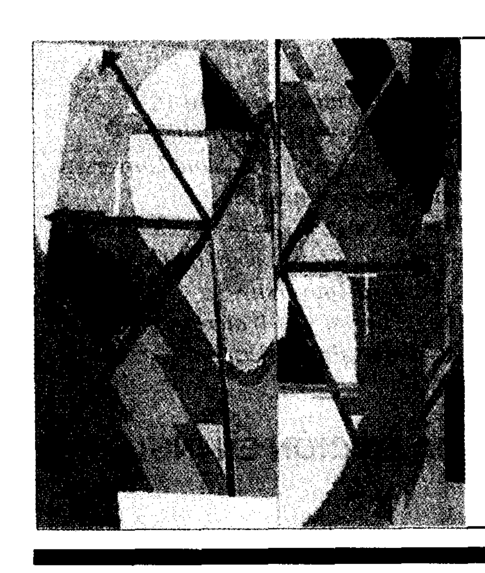
	Patrón largo	Patrón corto
Capítulo 1	7 lecciones	6 lecciones
Capítulo 2	4 lecciones	3 lecciones
Capítulo 4	3 lecciones	3 lecciones
Capítulo 5	8 lecciones	7 lecciones
Capítulo 6	6 lecciones	3 lecciones
Capítulo 7	4 lecciones	3 lecciones
Capítulo 8	6 lecciones	2 lecciones
Total	38 lecciones	27 lecciones

VARIANTES DEL CURSO NORMAL

Son posibles muchas variantes del curso normal. Por ejemplo, es posible crear un patrón largo opcional siguiendo la asignación de tiempo del patrón corto y dedicando las 11 lecciones restantes a algunos de los temas de los capítulos 9 y 10.

CURSO ORIENTADO A APLICACIONES

El capítulo 9 contiene aplicaciones selectas de álgebra lineal que son esencialmente de naturaleza matemática. Los instructores interesados en una variedad más amplia de aplicaciones pueden considerar la otra versión de este texto, ***Elementary Linear Algebra, Aplications Version***, de Howard Anton y Chris Rorres. En ese texto se proporcionan numerosas aplicaciones a los negocios, biología, ingeniería, economía, ciencias sociales y ciencias físicas.



AGRADECIMIENTOS

Expreso mi aprecio por la útil orientación proporcionada por las siguientes personas:

REVISORES Y COLABORADORES DE EDICIONES ANTERIORES EN INGLÉS

Steven C. Althoen, *University of Michigan–Flint*
C. S. Ballantine, *Oregon State University*
Erol Barbut, *University of Idaho*
William A. Brown, *University of Maine*
Joseph Buckley, *Western Michigan University*
Thomas Cairns, *University of Tulsa*
Douglas E. Cameron, *University of Akron*
Bomshik Chang, *University of British Columbia*
Peter Colwell, *Iowa State University*
Carolyn A. Dean, *University of Michigan*
Ken Dunn, *Dalhousie University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
Murray Eisenberg, *University of Massachusetts*
Harold S. Engelsohn, *Kingsborough Comm. College*
Garret Etgen, *University of Houston*
Marjorie E. Fitting, *San Jose State University*
Dan Flath, *University of South Alabama*
David E. Flesner, *Gettysburg College*
Mathew Gould, *Vanderbilt University*
Ralph P. Grimaldi, *Rose–Hulman Institute*
William W. Hager, *University of Florida*
Collin J. Hightower, *University of Colorado*
Joseph F. Johnson, *Rutgers University*
Robert L. Kelley, *University of Miami*
Arlene Kleinstein
Myren Krom, *California State University*
Lawrence D. Kugler, *University of Michigan*
Charles Livingston, *Indiana University*
Nicholas Macri, *Temple University*
Roger H. Marty, *Cleveland State University*
Patricia T. McAuley, *SUNY–Binghamton*
Robert M. McConnel, *University of Tennessee*
Douglas McLeod, *Drexel University*
Michael R. Meck, *Southern Connecticut State Univ.*
Craig Miller, *University of Pennsylvania*
Donald P. Minassian, *Butler University*
Hal G. Moore, *Brigham Young University*
Thomas E. Moore, *Bridgewater State College*
Robert W. Negus, *Rio Hondo Junior College*
Bart S. Ng, *Purdue University*

James Osterburg, *University of Cincinnati*
Michael A. Penna, *Indiana–Purdue University*
Gerald J. Porter, *University of Pennsylvania*
F. P. J. Rimrott, *University of Toronto*
C. Ray Rosentrater, *Westmont College*
Kenneth Schilling, *University of Michigan–Flint*
William Scott, *University of Utah*
Donald R. Sherbert, *University of Illinois*
Bruce Solomon, *Indiana University*
Mary T. Treanor, *Valparaiso University*
William F. Trench, *Trinity University*
Joseph L. Ullman, *University of Michigan*
W. Vance Underhill, *East Texas State University*
James R. Wall, *Auburn University*
Arthur G. Wasserman, *University of Michigan*
Evelyn J. Weinstock, *Glassboro State College*
Rugang Ye, *Stanford University*
Frank Zorzitto, *University of Waterloo*
Daniel Zwick, *University of Vermont*

REVISORES Y COLABORADORES DE LA SÉPTIMA EDICIÓN EN INGLÉS, SEGUNDA EN ESPAÑOL

Mark B. Beintema, *Southern Illinois University*
Paul Wayne Britt, *Louisiana State University*
David C. Buchthal, *University of Akron*
Keith Chavey, *University of Wisconsin–River Falls*
Stephen L. Davis, *Davidson College*
Blaise DeSesa, *Drexel University*
Dan Flath, *University of South Alabama*
Peter Fowler, *California State University*
Marc Frantz, *Indiana–Purdue University*
Sue Friedman, *Bernard M. Baruch College, CUNY*
William Golightly, *College of Charleston*
Hugh Haynsworth, *College of Charleston*
Tom Hern, *Bowling Green State University*
J. Hershenov, *Queens College, CUNY*
Steve Humphries, *Brigham Young University*
Steven Kahan, *Queens College, CUNY*
Andrew S. Kim, *Westfield State College*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
M. Malek, *California State University at Hayward*
J. J. Malone, *Worcester Polytechnic Institute*
William McWorter, *Ohio State University*
Valerie A. Miller, *Georgia State University*
Hal G. Moore, *Brigham Young University*
S. Obaid, *San Jose State University*
Ira J. Papick, *University of Missouri–Columbia*
Donald Passman, *University of Wisconsin*
Robby Robson, *Oregon State University*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
Ramesh Sharma, *University of New Haven*
David A. Sibley, *Pennsylvania State University*
Donald Story, *University of Akron*
Michael Tarabek, *Southern Illinois University*

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS, LECTURA DE PRUEBAS E ÍNDICE

Michael Dagg, *Numerical Solutions, Inc.*
Susan L. Friedman, *Bernard M. Baruch College, CUNY*
Maureen Kelley, *Northern Essex Community College*
Randy Schwartz, *Schoolcraft College*
Daniel Traster (*Student*), *Yale University*

COMPLEMENTOS

Benny Evans, *Oklahoma State University*
Charles A. Grobe, Jr., *Bowdoin College*

Elizabeth M. Grobe
IntelliPro, Inc.
Jerry Johnson, *Oklahoma State University*
Randy Schwartz, *Schoolcraft College*

OTROS COLABORADORES

Un agradecimiento especial a los siguientes profesores, quienes leyeron profundamente el material del texto e hicieron contribuciones significativas a la calidad del nivel matemático y de exposición:

Stephen Davis, *Davidson College*
Blaise DeSesa, *Drexel University*
Dan Flath, *University of South Alabama*
Marc Frantz, *Indiana–Purdue University*
William McWorter, *Ohio State University*
Donald Passman, *University of Wisconsin*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
Lois Craig Stagg, *University of Wisconsin–Milwaukee*

También deseo expresar mi agradecimiento a:

Barbara Holland, mi editora, quien me ayudó a moldear al concepto de esta nueva edición y cuyo entusiasmo incluso convirtió en divertido el arduo trabajo (alguna vez).

Ann Berlin, Lucille Buonocore y Nancy Prinz del Departamento de Producción de Wiley, por preocuparse tanto por la calidad de este trabajo y proporcionarme un apoyo extraordinario.

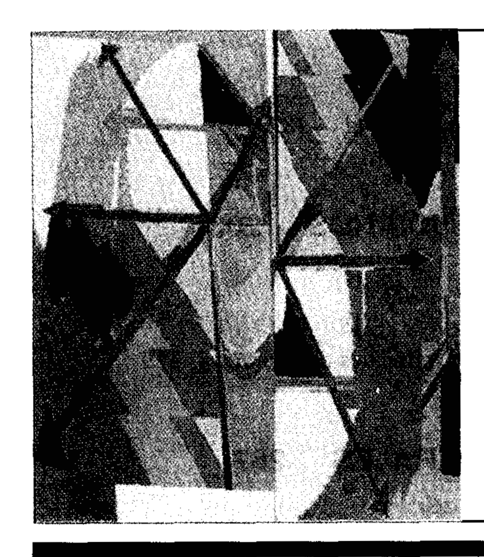
Lilian Brady, cuyo ojo para los detalles y sentido estético infalible mejoró grandemente la exactitud del texto y la belleza de la tipografía.

Joan Carafiello y Sharon Prendergagst por su soberbio trabajo en la coordinación de la miríada de detalles que mágicamente produjeron las respuestas y los complementos a tiempo.

El grupo en Hudson River Studio por tratar con tanto tacto a un autor riguroso.

Mildred Jaggard, mi asistente, quien coordinó todos los detalles del texto desde la lectura de pruebas hasta el índice con pericia consumada, y quien pacientemente toleró mi idiosincrasia.

HOWARD ANTON



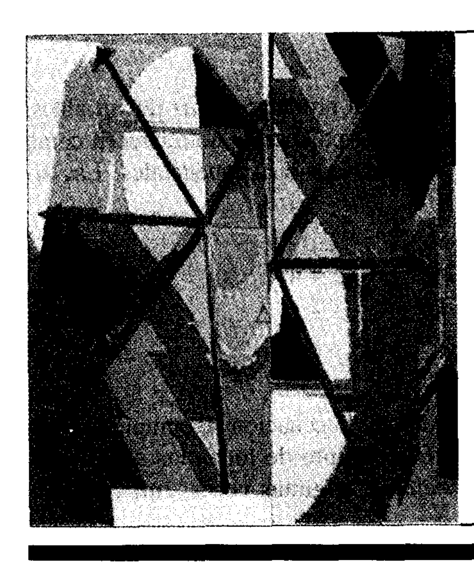
CONTENIDO

CAPÍTULO 9 TEMAS COMPLEMENTARIOS 513

CAPÍTULO 10 ESPACIOS VECTORIALES COMPLEJOS 601

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS 661

ÍNDICE 711



CAPÍTULO 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

1.1 INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones es uno de los temas más importantes del álgebra lineal. En esta sección se introducirá terminología básica y se analizará un método para resolver esos sistemas.

ECUACIONES LINEALES

Una recta en el plano xy puede representarse algebraicamente por una ecuación de la forma

$$a_1x + a_2y = b$$

Una ecuación de este tipo se denomina ecuación lineal en las variables x y y. De manera más general, una ***ecuación lineal*** en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se define como una ecuación que se puede expresar en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes reales. Las variables en una ecuación lineal algunas veces se denominan ***incógnitas.***

Ejemplo 1 Las ecuaciones siguientes son lineales:

$$x + 3y = 7 \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$
$$y = \tfrac{1}{2}x + 3z + 1 \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

Observar que una ecuación lineal no incluye ningún producto o raíz de variables. Todas las variables están elevadas sólo a la primera potencia y no aparecen como argumentos de funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales. Las siguientes ecuaciones *no* son lineales:

$$x + 3y^2 = 7 \qquad 3x + 2y - z + xz = 4$$
$$y - \text{sen}\, x = 0 \qquad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1 \quad \Delta$$

Una ***solución*** de una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots, + a_nx_n = b$ es una sucesión de n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de modo que la ecuación se cumple cuando se sustituye $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación se denomina ***conjunto solución*** o, algunas veces, ***solución general*** de la ecuación.

Ejemplo 2 Encontrar el conjunto solución de

(a) $4x - 2y = 1$ (b) $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$

Solución a). Para encontrar soluciones de a), se asigna un valor cualesquiera a x y se despeja y, o bien, se elige un valor arbitrario para y y se despeja x. Si se sigue el primer método y a x se asigna un valor arbitrario t, se obtiene

$$x = t, \qquad y = 2t - \tfrac{1}{2}$$

Estas expresiones describen el conjunto solución en términos de algún parámetro t. Las soluciones numéricas particulares se pueden obtener al sustituir valores específicos de t. Por ejemplo, $t = 3$ conduce a la solución $x = 3, y = \frac{11}{2}$, y $t = -\frac{1}{2}$ produce la solución $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$.

Si se sigue el segundo método y a y se asigna el valor arbitrario t, se obtiene

$$x = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}, \qquad y = t$$

Aunque estas expresiones son diferentes a las que se obtuvieron antes, producen el mismo conjunto solución cuando t asume todos los números reales posibles. Por ejemplo, con las expresiones anteriores se obtuvo la solución $x = 3, y = \frac{11}{2}$ cuando $t = 3$, mientras que con las expresiones posteriores se obtuvo esa solución cuando $t = \frac{11}{2}$.

Solución b). Para encontrar el conjunto solución de b) es posible asignar valores arbitrarios a dos variables cualesquiera y despejar la tercera variable. En particular, si a x_2 y x_3 se asignan los valores arbitrarios s y t, respectivamente, y se despeja x_1, se obtiene

$$x_1 = 5 + 4s - 7t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = t \quad \Delta$$

SISTEMAS LINEALES

Un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denomina ***sistema de ecuaciones lineales*** o ***sistema lineal***. Una sucesión de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se denomina ***solución*** del sistema si $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, s_n = x_n$ es una solución de todas y cada una de las ecuaciones del sistema. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

tiene la solución $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$, ya que estos valores satisfacen ambas ecuaciones. Sin embargo, $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 1$ no es una solución, ya que estos valores satisfacen sólo la primera de las dos ecuaciones del sistema.

No todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución. Por ejemplo, si la segunda ecuación del siguiente sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

se multiplica por $\frac{1}{2}$, resulta evidente que no existen soluciones, ya que el sistema equivalente obtenido

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

está compuesto por ecuaciones contradictorias.

Se dice que un sistema de ecuaciones que no tiene soluciones es ***inconsistente***; si existe por lo menos una solución del sistema, éste se denomina ***consistente***. Para ilustrar las posibilidades que pueden ocurrir al resolver sistemas de ecuaciones lineales, se considerará un sistema general de dos ecuaciones lineales en las incógnitas x y y:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \qquad (a_1, b_1 \text{ no son cero a la vez}) \\ a_2x + b_2y &= c_2 \qquad (a_2, b_2 \text{ no son cero a la vez}) \end{aligned}$$

Las gráficas de estas ecuaciones son rectas; por ejemplo l_1 y l_2. Como un punto (x, y) pertenece a una recta sí y sólo si los números x y y satisfacen la ecuación de la recta, las soluciones del sistema de ecuaciones corresponden a los puntos de intersección de l_1 y l_2. Existen tres posibilidades (figura 1):

- Las rectas l_1 y l_2 pueden ser paralelas, en cuyo caso no se cortan y, en consecuencia, no existe solución del sistema.
- Las rectas l_1 y l_2 pueden cortarse sólo en un punto, en cuyo caso el sistema tiene exactamente una solución.
- Las rectas l_1 y l_2 pueden coincidir, en cuyo caso hay una infinidad de puntos de intersección y, por tanto, existen infinidad de soluciones del sistema.

Aunque aquí sólo se han considerado dos ecuaciones en dos incógnitas, más tarde se demostrará que las mismas tres posibilidades se cumplen para sistemas lineales arbitrarios:

Todo sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones, tiene exactamente una solución o tiene una infinidad de soluciones.

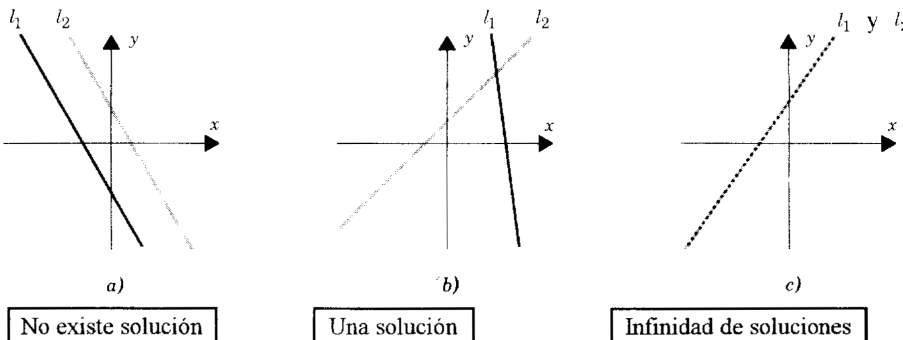


Figura 1 No existe solución | Una solución | Infinidad de soluciones

Un sistema arbitrario de m ecuaciones lineales en n incógnitas se puede escribir como

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas y las letras a y b con subíndices denotan constantes. Por ejemplo, un sistema general de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas se puede escribir como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

Los subíndices dobles en los coeficientes de las incógnitas constituyen un mecanismo útil que se utiliza para especificar la ubicación del coeficiente en el sistema. El primer subíndice en el coeficiente a_{ij} indica la ecuación en que aparece el coeficiente, y el segundo subíndice indica a qué incógnita multiplica. Así, a_{12} está en la primera ecuación y multiplica a la incógnita x_2.

MATRICES AUMENTADAS

Si mentalmente se ubica a los signos +, las letras x y los signos =, entonces un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede abreviarse al escribir sólo el arreglo rectangular de números:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Este arreglo se denomina ***matriz aumentada*** del sistema. (El término *matriz* se usa en matemáticas para denotar un arreglo rectangular de números. Las matrices surgen en muchos contextos que serán considerados con más detalle en secciones ulteriores.) Por ejemplo, la matriz aumentada del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN. Al elaborar una matriz aumentada, las incógnitas deben escribirse en el mismo orden en cada ecuación.

El método básico para resolver un sistema de ecuaciones lineales es sustituir el sistema dado por un nuevo sistema que tenga el mismo conjunto solución, pero que sea más fácil de resolver. Este nuevo sistema suele obtenerse en una serie de pasos mediante la aplicación de los tres tipos de operaciones siguientes para eliminar incógnitas de manera sistemática.

1. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
2. Intercambiar dos ecuaciones.
3. Sumar un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

Dado que los renglones (líneas horizontales) de una matriz aumentada corresponden a las ecuaciones en el sistema asociado, las tres operaciones mencionadas corresponden a las siguientes operaciones efectuadas en los renglones de la matriz aumentada.

1. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.
2. Intercambiar dos renglones.
3. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

OPERACIONES ELEMENTALES EN LOS RENGLONES

Las tres operaciones anteriores se denominan ***operaciones elementales en los renglones***. En el siguiente ejemplo se ilustra cómo se pueden usar estas operaciones para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Como en la siguiente sección se obtendrá un procedimiento sistemático para determinar soluciones, no es necesario preocuparse sobre cómo se eligieron los pasos en este ejemplo. El esfuerzo principal en este caso debe dedicarse a comprender los cálculos y el análisis.

Ejemplo 3 En la columna izquierda que se muestra a continuación se resuelve un sistema de ecuaciones lineales operando sobre las ecuaciones del sistema, y en la columna de la derecha el mismo sistema se resuelve operando sobre los renglones de la matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Sumar -2 veces la primera ecuación a la segunda para obtener

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Sumar -2 veces el primer renglón al segundo para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Sumar -3 veces la primera ecuación a la tercera para obtener

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Sumar -3 veces el primer renglón al tercero para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Multiplicar la segunda ecuación por 1/2 para obtener

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Multiplicar el segundo renglón por 1/2 para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Sumar -3 veces la segunda ecuación a la tercera para obtener

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Sumar -3 veces el segundo renglón al tercero para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicar la tercera ecuación por -2 para obtener

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Sumar el tercer renglón por -2 para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sumar -1 veces la segunda ecuación a la primera para obtener

$$\begin{aligned} x \quad + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Sumar -1 veces el segundo renglón al primero para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sumar $-11/2$ veces la tercera ecuación a la primera y $7/2$ veces la tercera ecuación a la segunda para obtener

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Sumar $-11/2$ veces el tercer renglón al primero y $7/2$ veces el tercer renglón al segundo para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La solución

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 3$$

es evidente ahora. Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.1

1. De las siguientes ecuaciones, ¿cuáles son lineales en x_1, x_2 y x_3?

a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$ c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$
d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$ e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$ f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Dado que k es una constante, ¿cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales?

a) $x_1 - x_2 + x_3 = \operatorname{sen} k$ b) $kx_1 - \dfrac{1}{k}x_2 = 9$ c) $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

3. Encontrar el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

a) $7x - 5y = 3$ b) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$
c) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$ d) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

4. Hallar la matriz aumentada de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$
b) $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$
c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \qquad - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 \qquad &= 1 \end{aligned}$$
d) $$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

5. Determinar un sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz aumentada.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

6. a) Encontrar una ecuación lineal en las variables x y y que tenga la solución general $x = 5 + 2t$, $y = t$.

b) Demostrar que $x = t$, $y = \frac{1}{2}t --$ también es la solución general de la ecuación del inciso a).

7. La curva $y = ax^2 + bx + c$ de la figura 2 pasa por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Demostrar que los coeficientes a, b y c son una solución del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

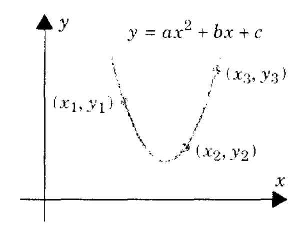


Figura 2

8. ¿Para qué valor(es) de la constante k el siguiente sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones? ¿exactamente una solución? ¿infinidad de soluciones?

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

9. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \\ ex + fy &= m \end{aligned}$$

Analizar las posiciones relativas de las rectas $ax + by = k$, $cx + dy = l$ y $ex + fy = m$ cuando el sistema

a) no tiene soluciones.
b) tiene exactamente una solución.
c) tiene infinidad de soluciones.

10. Demostrar que si el sistema de ecuaciones del ejercicio 9 es consistente, entonces del sistema es posible eliminar por lo menos una ecuación sin modificar el conjunto solución.

11. Sean $k = l = m = 0$ en el ejercicio 9; demostrar que el sistema debe ser consistente. ¿Qué se puede decir del punto de intersección de las tres rectas si el sistema tiene exactamente una solución?

12. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x \quad\; + z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{aligned}$$

Demostrar que para que este sistema sea consistente, a, b y c deben satisfacer $c = a + b$.

13. Demostrar lo siguiente: Si las ecuaciones lineales $x_1 + kx_2 = c$ y $x_1 + lx_2 = d$ tienen el mismo conjunto solución, entonces las ecuaciones son idénticas.

1.2 ELIMINACIÓN GAUSSIANA

En esta sección se dará un procedimiento sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales; el método se basa en la idea de reducir la matriz aumentada a una forma suficientemente simple para que el sistema de ecuaciones se pueda resolver por inspección.

FORMA ESCALONADA REDUCIDA

En el ejemplo 3 de la sección precedente, el sistema lineal se resolvió al reducir la matriz aumentada a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a partir de lo cual la solución del sistema era evidente. Este es un ejemplo de una matriz que está en ***forma escalonada reducida***. Para que una matriz sea de esta forma, debe tener las siguientes propiedades.

1. *Si un renglón no consta completamente de ceros, entonces el primer número diferente de cero en el renglón es un* 1. (*Que se denomina **1 principal**.*)
2. *Si hay renglones que constan completamente de ceros, se agrupan en la parte inferior de la matriz.*
3. *En dos renglones consecutivos cualesquiera que no consten completamente de ceros, el 1 principal del renglón inferior aparece más a la derecha que el 1 principal en el renglón superior.*
4. *Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.*

Se dice que una matriz con las propiedades **1**, **2** y **3** (pero no necesariamente con la propiedad 4) está en ***forma escalonada***.

Ejemplo 1 Las siguientes matrices están en forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes matrices están en forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El lector debe verificar que cada una de las matrices anteriores satisface todos los requisitos necesarios.

OBSERVACIÓN. Según el ejemplo precedente, una matriz en forma escalonada tiene ceros abajo de cada 1 principal, mientras que una matriz en forma escalonada reducida tiene ceros tanto arriba como abajo de cada 1 principal.

Si, por medio de una serie de operaciones elementales en los renglones, se llega a la forma escalonada reducida a partir de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, entonces el conjunto solución del sistema será evidente por inspección o al cabo de unos cuantos pasos simples. Este hecho se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Suponer que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales se ha reducido por operaciones en los renglones a la forma escalonada reducida dada. Resolver el sistema.

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{d)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución a). El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 5 \\ x_2 \qquad &= -2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Por inspección se obtiene que $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

Solución b). El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 4x_4 &= -1 \\ x_2 \qquad + 2x_4 &= 6 \\ x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Ya que x_1, x_2 y x_3 corresponden a unos principales en la matriz aumentada, se denominan ***variables principales***. Las variables no principales (en este caso x_4) se denominan ***variables libres***. Al expresar las variables principales en términos de las variables libres se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 4x_4 \\ x_2 &= 6 - 2x_4 \\ x_3 &= 2 - 3x_4 \end{aligned}$$

A partir de esta forma de las ecuaciones se observa que a la variable libre x_4 se le puede asignar algún valor, por ejemplo t, que luego determina el valor de las variables principales x_1, x_2 y x_3. Por tanto, existe una infinidad de soluciones y la solución general está definida por las fórmulas

$$x_1 = -1 - 4t, \qquad x_2 = 6 - 2t, \qquad x_3 = 2 - 3t, \qquad x_4 = t$$

Solución c). El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \qquad\qquad\quad + 4x_5 &= -2 \\ x_3 \qquad + 3x_5 &= 1 \\ x_4 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Aquí las variables principales son x_1, x_3 y x_4, y las variables libres son x_2 y x_5. Al expresar las variables principales en términos de las variables libres se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - 6x_2 - 4x_5 \\ x_3 &= 1 - 3x_5 \\ x_4 &= 2 - 5x_5 \end{aligned}$$

Puesto que x_5 puede asumir un valor cualesquiera t y x_2 puede asignarse un valor s, entonces existe una infinidad de soluciones. La solución general está definida por las fórmulas

$$x_1 = -2 - 6s - 4t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = 1 - 3t, \qquad x_4 = 2 - 5t, \qquad x_5 = t$$

Solución d). La última ecuación en el sistema de ecuaciones correspondiente es

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Como no es posible que esta ecuación se cumpla, entonces el sistema no tiene solución. Δ

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Se ha visto cuán fácil es resolver un sistema de ecuaciones lineales una vez que su matriz aumentada se escribe en forma escalonada reducida. A continuación se proporcionará un procedimiento paso a paso que puede usarse para expresar cualquier matriz en forma escalonada reducida. A medida que se escriba cada paso del procedimiento, se ilustrará la idea al expresar la siguiente matriz en forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Localizar la columna de la izquierda que no conste completamente de ceros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

↑ **Columna de la orilla izquierda diferente de cero**

Paso 2. Intercambiar el renglón superior con otro renglón, en caso de ser necesario, para que en la parte superior de la columna determinada en el paso 1 haya un elemento diferente de cero.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Se intercambiaron los renglones primero y segundo en la matriz precedente.

Paso 3. Si el elemento que está ahora en la parte superior de la columna determinada en el paso 1 es a, multiplicar el primer renglón por $1/a$ a fin de introducir un 1 principal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la matriz precedente se multiplicó por 1/2.

Paso 4. Sumar múltiplos adecuados del renglón superior a los renglones inferiores para que todos los elementos abajo de 1 principal se vuelvan ceros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la matriz precedente se sumó -2 veces al tercer renglón.

Paso 5. A continuación, cubrir el renglón superior de la matriz y comenzar de nuevo con el paso 1 aplicado a la submatriz restante. Continuar de esta manera hasta que *toda* la matriz esté en forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

↑ **Columna de la orilla izquierda diferente de cero en la submatriz**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la submatriz se multiplicó por $-1/2$ para introducir un 1 principal.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la submatriz se sumó -5 veces al segundo renglón de la submatriz para introducir un cero abajo del 1 principal.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

El renglón superior de la submatriz se cubrió, y se volvió nuevamente al paso 1.

Columna de la orilla izquierda diferente de cero en la nueva submatriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El primer (y único) renglón en la nueva submatriz se multiplicó por 2 para introducir un 1 principal.

Ahora *toda* la matriz está en forma escalonada. Para determinar la forma escalonada reducida es necesario efectuar el siguiente paso adicional.

Paso 6. Empezando con el último renglón diferente de cero y trabajando hacia arriba, sumar múltiplos adecuados de cada renglón a los renglones de arriba con objeto de introducir ceros arriba de los unos principales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El tercer renglón de la matriz precedente se sumó 7/2 veces al segundo renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El tercer renglón se sumó -6 veces al primer renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El segundo renglón se sumó 5 veces al primer renglón.

La última matriz está en forma escalonada reducida

El procedimiento anterior para expresar una matriz en forma escalonada reducida se denomina ***eliminación de Gauss-Jordan****(véase la página 34). Si sólo se efectúan los cinco primeros pasos, el procedimiento se denomina ***eliminación gaussiana*** y produce una forma escalonada.

OBSERVACIÓN. Se puede demostrar que *toda matriz tiene una forma escalonada reducida única*; es decir, se obtiene la misma forma escalonada reducida de una matriz dada sin importar cómo se hagan variar las operaciones en los renglones. (Una demostración de este hecho puede consultarse en el artículo "*The Reduced Row Echelon Form of a Matrix is Unique: A Simple Proof*", de Thomas Yuster, *Mathematics Magazine*, Vol. 57, No. 2, 1984, págs. 93–94.) En contraste, *una forma escalonada de una matriz dada no es única*: diferentes secuencias de operaciones en los renglones pueden producir formas escalonadas diferentes.

Ejemplo 3 Resolver por eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + 2x_5 \qquad\qquad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad\qquad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}$$

****Karl Friedrich Gauss*** **(1777-1855)** fue un matemático y científico alemán. Algunas veces nombrado "príncipe de los matemáticos", Gauss es considerado junto con Isaac Newton y Arquímedes como uno de los tres más grandes matemáticos que han existido. En toda la historia de las matemáticas quizá nunca ha habido un niño tan precoz como Gauss: según cuenta él mismo, ya dominaba las bases de las matemáticas aún antes de poder hablar. Un día, cuando aún no tenía tres años de edad, su genio se manifestó a sus padres de manera bastante elocuente. Su padre estaba preparando la nómina semanal de los obreros a su cargo mientras el niño lo observaba en silencio desde un rincón de la habitación. Al final de los cálculos largos y tediosos, Gauss dijo a su padre que había un error en el resultado y le dijo la respuesta, a la que había llegado mentalmente. Para sorpresa de sus padres, ¡al comprobar los cálculos se dieron cuenta de que Gauss tenía razón!

En su disertación doctoral, Gauss proporcionó la primera demostración completa del teorema fundamental del álgebra, que establece que toda ecuación polinómica tiene cuando mucho.tantas soluciones como su grado. A los 19 años de edad resolvió un problema que desconcertó a Euclides: inscribir un polígono regular de 17 lados en una circunferencia usando sólo regla y transportador; y en 1801, a los 24 años de edad, publicó su primera obra maestra, *Disquisitiones Arithmeticae*, considerada por muchos como uno de los logros más brillantes en matemáticas. En este documento, Gauss sistematizó el estudio de la teoría de números (propiedades de los enteros) y formuló los conceptos básicos que constituyen los cimientos de ese tema.

Entre la multitud de logros alcanzados, Gauss descubrió la curva "acampanada" o gaussiana que es fundamental en probabilidad, proporcionó la primera interpretación geométrica de los números complejos y estableció el papel fundamental de éstos en las matemáticas, desarrolló métodos para caracterizar superficies intrínsecamente por medio de las curvas contenidas en aquéllas, desarrolló la teoría del mapeo conforme (que preserva ángulos) y descubrió la geometría no euclidiana 30 años antes de que estas ideas fueran publicadas por otros. En física realizó contribuciones esenciales a la teoría de las lentes y a la acción capilar, y junto con Wilhelm Weber realizó trabajo fundamental en electromagnetismo. Gauss inventó el heliotropo, el magnetómetro bifilar y el electrotelégrafo.

Gauss era profundamente religioso y se comportaba como aristócrata. Dominaba fácilmente otros idiomas, leía bastante y disfrutaba la mineralogía y la botánica como pasatiempos. No le agradaba dar clases y solía ser frío y poco alentador con otros matemáticos, quizá porque ya había anticipado el trabajo de éstos. Se ha afirmado que si Gauss hubiera publicado todos sus descubrimientos, el estado actual de las matemáticas habría avanzado 50 años. Sin duda alguna es el matemático más grande de la época moderna.

Wilhelm Jordan **(1842–1899)** fue un matemático alemán que se especializó en geodesia. Su contribución a la resolución de sistemas lineales apareció en su libro conocido, *Handbuch der Vermessungskunde*, en 1888.

La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Al sumar -2 veces el primer renglón a los renglones segundo y cuarto se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar el segundo renglón por -1 y luego sumar -5 veces el nuevo segundo renglón al tercer renglón y -4 veces el nuevo segundo renglón al cuarto renglón se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Al intercambiar los renglones tercero y cuarto y luego multiplicar por $\frac{1}{6}$ el tercer renglón de la matriz resultante se obtiene la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al sumar -3 veces el tercer renglón al segundo renglón y luego sumar 2 veces el segundo renglón de la matriz resultante al primer renglón se obtiene la forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

(Se ha eliminado la última ecuación, $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$, ya que las demás ecuaciones harán que se cumpla de manera automática.) Al despejar las variables principales, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Si a las variables libres x_2, x_4, x_5 se asignan los valores arbitrarios r, s y t, respectivamente, entonces la solución general está dada por las fórmulas

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3} \quad \Delta$$

RETRO-SUSTITUCIÓN

Ejemplo 4 Algunas veces es preferible resolver un sistema de ecuaciones lineales por medio de la eliminación gaussiana a fin de expresar la matriz aumentada en forma escalonada sin continuar hasta obtener la forma escalonada reducida. Cuando se hace lo anterior, el sistema de ecuaciones correspondiente se puede resolver mediante una técnica denominada ***retrosustitución***. Para ilustrar este método se usará el sistema de ecuaciones del ejemplo 3.

Con base en los cálculos en el ejemplo 3, una forma escalonada de la matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones correspondiente

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

se procede como sigue:

Paso 1. Despejar las variables principales en las ecuaciones.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Paso 2. Empezando con la última ecuación y trabajando hacia atrás, sustituir consecutivamente cada ecuación en las ecuaciones anteriores.

Al sustituir $x_6 = \frac{1}{3}$ en la segunda ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

La sustitución de $x_3 = -2x_4$ en la primera ecuación da

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Paso 3. Asignar valores arbitrarios a las variables libres, si hay alguna.

Si a x_2, x_4 y x_5 se asignan valores cualesquiera r, s y t, respectivamente, entonces la solución general está definida por las fórmulas

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \qquad x_2 = r, \qquad x_3 = -2s, \qquad x_4 = s, \qquad x_5 = t, \qquad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

Lo anterior concuerda con la solución obtenida en el ejemplo 3. Δ

OBSERVACIÓN. Los valores que se asignan a las variables libres se llaman ***parámetros***. Aunque para designar a los parámetros en general se usarán las letras $r, s, t, \ldots$, es posible usar cualquier letra que no cause problema con los nombres de las variables.

Ejemplo 5 Resolver

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

por medio de la eliminación gaussiana y la retrosustitución.

Solución. Este es el sistema del ejemplo 3 en la sección 1.1. En ese ejemplo se convirtió la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

a la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El sistema correspondiente a esta matriz es

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Al despejar las variables principales se obtiene

$$\begin{aligned} x &= 9 - y - 2z \\ y &= -\tfrac{17}{2} + \tfrac{7}{2}z \\ z &= 3 \end{aligned}$$

La sustitución de la ecuación inferior en las ecuaciones anteriores da

$$\begin{aligned} x &= 3 - y \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

y la sustitución de la segunda ecuación en la ecuación superior se obtiene

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Esto concuerda con el resultado que se encontró mediante la eliminación de Gauss-Jordan en el ejemplo 3 de la sección 1.1. Δ

SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es ***homogéneo*** si todos los términos constantes son cero; es decir, el sistema es de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo es consistente, ya que una solución de todos estos sistemas es $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Esta solución se denomina ***solución trivial***; en caso de que haya otras soluciones, se denominan ***soluciones no triviales***.

Debido a que un sistema lineal homogéneo siempre tiene la solución trivial, entonces para sus soluciones sólo hay dos posibilidades:

- El sistema sólo tiene la solución trivial.
- El sistema tiene infinidad de soluciones además de la solución trivial.

En el caso especial de un sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas, por ejemplo

$$a_1x + b_1y = 0 \qquad (a_1, b_1 \text{ no son cero a la vez})$$
$$a_2x + b_2y = 0 \qquad (a_2, b_2 \text{ no son cero a la vez})$$

las gráficas de las ecuaciones son rectas que pasan por el origen, y la solución trivial corresponde al punto de intersección en el origen (figura 1).

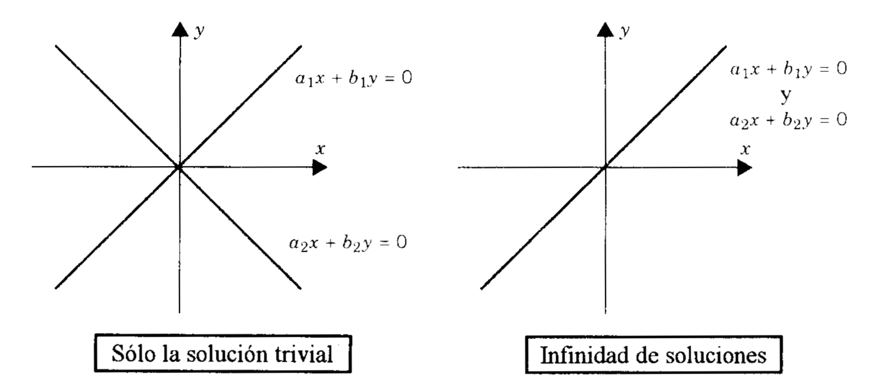


Figura 1 Sólo la solución trivial — Infinidad de soluciones

Existe un caso en el cual se asegura que un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales, a saber, siempre que el sistema tenga más incógnitas que ecuaciones. Para ver por qué, considerar el siguiente ejemplo de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas.

Ejemplo 6 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo por eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Solución. La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Al reducir esta matriz a la forma escalonada reducida, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 &= 0 \\ x_3 \quad + x_5 &= 0 \\ x_4 \qquad &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Al despejar las variables principales se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - x_5 \\ x_3 &= -x_5 \\ x_4 &= \ \ 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general es

$$x_1 = -s - t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = -t, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = t$$

Observar que la solución trivial se obtiene cuando $s = t = 0$. Δ

El ejemplo 6 ilustra dos cuestiones importantes respecto a la solución de sistemas homogéneos de ecuaciones lineales. Primera, ninguna de las tres operaciones elementales en los renglones modifica la columna final de ceros en la matriz aumentada, de modo que el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada reducida de la matriz aumentada también debe ser un sistema homogéneo, véase el sistema (2) . Segunda, dependiendo de si la forma escalonada reducida de la matriz aumentada contiene algún renglón de ceros, el número de ecuaciones en el sistema reducido es menor o igual que el número de ecuaciones del sistema original, comparar los sistemas (1) y (2). Por tanto, si el sistema homogéneo dado contiene m ecuaciones con n incógnitas donde $m < n$, y si en la forma escalonada reducida de la matriz aumentada hay r renglones diferentes de cero, entonces se tendrá $r < n$. Se concluye que el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada reducida de la matriz aumentada es de la forma

$$\begin{aligned} \cdots x_{k_1} \qquad\qquad + \Sigma(\ ) &= 0 \\ \cdots x_{k_2} \qquad + \Sigma(\ ) &= 0 \\ \ddots \qquad \vdots \ \ & \\ x_{k_r} + \Sigma(\ ) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde x_{k_1}, x_{k_2}, . . . , x_{k_r} son las variables principales y Σ ( ) denota sumas (posiblemente todas diferentes) que incluyen a las $n - r$ variables libres, comparar el sistema (3) con el sistema (2) . Al despejar las variables principales se obtiene

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= -\Sigma(\ ) \\ x_{k_2} &= -\Sigma(\ ) \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= -\Sigma(\ ) \end{aligned}$$

Así como en el ejemplo 6, es posible asignar valores cualesquiera a las variables libres del miembro derecho y obtener así una infinidad de soluciones del sistema.

En resumen, se tiene el siguiente teorema importante.

Teorema 1.2.1. *Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinidad de soluciones.*

OBSERVACIÓN. Se debe notar que el teorema 1.2.1 es válido sólo para sistemas homogéneos. Un sistema no homogéneo con más incógnitas que ecuaciones no necesariamente es consistente (ejercicio 34); sin embargo, si el sistema es consistente, entonces tiene infinidad de soluciones. Este hecho se demostrará después.

SOLUCIONES POR COMPUTADORA DE SISTEMAS LINEALES

En las aplicaciones no es raro encontrar grandes sistemas lineales que es necesario resolver por computadora. Casi todos los algoritmos de cómputo para resolver los sistemas se basan en la eliminación gaussiana o en la eliminación de Gauss-Jordan, aunque los procedimientos básicos son modificados a menudo para poder abordar cuestiones como

- reducir los errores por redondeo,
- disminuir el uso del espacio de memoria de la computadora,
- y resolver el sistema a la velocidad máxima.

Algunas de estas cuestiones se considerarán en el capítulo 9. En cálculos manuales, las fracciones son un inconveniente que a menudo es imposible evitar. Sin embargo, en algunos casos sí se puede hacer al variar de manera conveniente las operaciones elementales en los renglones. Por tanto, una vez que el lector domine los métodos de eliminación gaussiana y eliminación de Gauss-Jordan puede modificar los pasos en problemas específicos a fin de evitar las fracciones (véase el ejercicio 18).

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.2

1. De las siguientes matrices 3 x 3, ¿cuáles están en forma escalonada reducida?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. De las siguientes matrices 3 x 3, ¿cuáles están en forma escalonada?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. En cada inciso, determinar si la matriz está en forma escalonada, en forma escalonada reducida, en ambas formas o en ninguna.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. En cada inciso, suponer que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido reducida mediante operaciones en los renglones a la forma escalonada reducida dada. Resolver el sistema.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. En cada inciso, suponer que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido reducida mediante operaciones en los renglones a la forma escalonada dada. Resolver el sistema.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Resolver cada uno de los siguientes sistemas aplicando eliminación de Gauss-Jordan.

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \qquad\qquad - 3w &= -3 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$

7. Resolver cada uno de los sistemas del ejercicio 6 aplicando eliminación gaussiana.

8. Resolver cada uno de los siguientes sistemas aplicando eliminación de Gauss-Jordan.

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 10y - 4z + w &= 1 \\ x + 4y - z + w &= 2 \\ 3x + 2y + z + 2w &= 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w &= -4 \\ x - 6y + 3z \qquad &= 1 \end{aligned}$

9. Resolver cada uno de los sistemas del ejercicio 8 aplicando eliminación gaussiana.

10. Resolver cada uno de los siguientes sistemas aplicando eliminación de Gauss-Jordan.

a) $\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} w + 2x - y &= 4 \\ x - y &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x \qquad &= 7 \end{aligned}$

11. Resolver cada uno de los sistemas del ejercicio 10 aplicando eliminación gaussiana.

12. Sin usar lápiz y papel, determinar cuáles de los siguientes sistemas homogéneos tienen soluciones no triviales.

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

13. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos aplicando cualquier método.

a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w \qquad - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$

14. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos aplicando cualquier método.

a) $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

15. Resolver los siguientes sistemas aplicando cualquier método.

a) $\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 \qquad - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 \qquad - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 \qquad + Z_5 &= 0 \end{aligned}$

16. Resolver los siguientes sistemas, donde a, b y c son constantes.

a) $\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$

17. ¿Para qué valores de a el siguiente sistema no tiene solución? ¿exactamente una solución? ¿infinidad de soluciones?

$$\begin{aligned} x + 2y - \qquad 3z &= 4 \\ 3x - y + \qquad 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

18. Expresar

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

en forma escalonada reducida sin introducir ninguna fracción.

19. Encontrar dos formas escalonadas diferentes de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

20. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales para los ángulos desconocidos α, y β, donde $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, y $0 \leq \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2\,\text{sen}\,\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3 \\ 4\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma &= 2 \\ 6\,\text{sen}\,\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{aligned}$$

21. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales para x, y y z.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

22. Demostrar que el siguiente sistema no lineal tiene 18 soluciones si $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, y $0 \leq \gamma < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha + 2\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ 2\operatorname{sen}\alpha + 5\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha - 5\cos\beta + 5\tan\gamma &= 0 \end{aligned}$$

23. ¿Para qué valor(es) de γ el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales?

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)x + y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)y &= 0 \end{aligned}$$

24. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \\ ex + fy &= 0 \end{aligned}$$

Analizar las posiciones relativas de las rectas $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ y $ex + fy = 0$ cuando

a) el sistema tiene sólo la solución trivial, b) el sistema tiene soluciones no triviales.

25. En la figura 2 se muestra la gráfica de una ecuación cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Encontrar los coeficientes a, b, c y d.

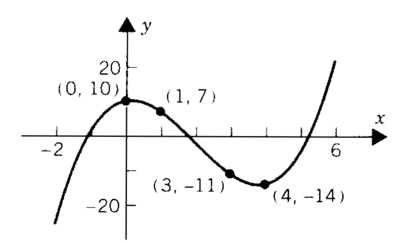


Figura 2

26. Recordar que en geometría plana tres puntos no colineales determinan una circunferencia de manera única. En geometría analítica se demuestra que la ecuación de una circunferencia en el plano xy es de la forma

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$$

Encontrar la ecuación de la circunferencia que se muestra en la figura 3.

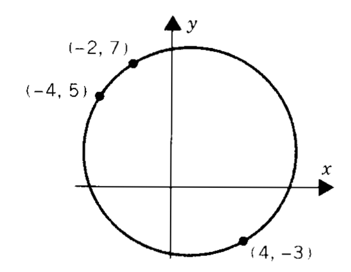


Figura 3

27. Describir las posibles formas escalonadas reducidas de

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

28. Demostrar que si $ad - bc \neq 0$, entonces la forma escalonada reducida de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

29. Usar el ejercicio 28 para demostrar que si $ad - bc = 0$, entonces el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

tiene exactamente una solución.

30. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

para x_1, x_2 y x_3 si
a) $\lambda = 1$ b) $\lambda = 2$

31. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

a) Demostrar que si $x = x_0$, $y = y_0$ es cualquier solución del sistema y k es cualquier constante, entonces $x = kx_0$, $y = ky_0$ también es una solución.
b) Demostrar que si $x = x_0$, $y = y_0$ y $x = x_1$, $y = y_1$ son dos soluciones cualesquiera, entonces $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$ también es una solución.

32. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\text{(I)} \begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned} \qquad \text{(II)} \begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

a) Demostrar que si $x = x_1$, $y = y_1$ y $x = x_2$, $y = y_2$ son soluciones de I, entonces $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ es una solución de II.
b) Demostrar que si $x = x_1$, $y = y_1$ es una solución de I y $x = x_0$, $y = y_0$ es una solución de II, entonces $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$ es una solución de I.

33. a) En el sistema de ecuaciones numerado con (3), explicar por qué sería incorrecto denotar a las variables principales por $x_1, x_2, \ldots, x_r$ en vez de por $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ como se hizo.

b) El sistema de ecuaciones numerado con (2) es un caso específico de (3). ¿Qué valor tiene r en este caso? ¿Cuáles son $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ en este caso? Escribir las sumas denotadas por Σ ( ) en (3).

34. Encontrar un sistema lineal inconsistente que tenga más incógnitas que ecuaciones.

1.3 MATRICES Y OPERACIONES CON MATRICES

Los arreglos rectangulares de números reales surgen en muchos contextos distintos a las matrices aumentadas de sistemas de ecuaciones lineales. En esta sección estos arreglos se considerarán como objetos en sí y se desarrollarán algunas de sus propiedades para aplicarlas más tarde.

NOTACIÓN Y TERMINOLOGÍA DE MATRICES

Definición. Una ***matriz*** es un arreglo rectangular de números. Los números en el arreglo se denominan ***elementos*** de la matriz.

Ejemplo 1 Algunos ejemplos de matrices son

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4] \quad \Delta$$

El ***tamaño*** de una matriz se describe en términos del número de renglones (líneas horizontales) y de columnas (líneas verticales) que contiene. Por ejemplo, la primera matriz del ejemplo 1 tiene tres renglones y dos columnas, de modo que su tamaño es 3 por 2 (que se escribe 3×2). En la descripción del tamaño, el primer número siempre denota el número de renglones y el segundo, el de columnas. Las demás matrices del ejemplo 1 son de tamaño 1×4, 3×3, 2×1 y 1×1, respectivamente. Una matriz con una sola columna se denomina ***matriz columna*** (o ***vector columna***), y una matriz con un solo renglón se denomina ***matriz renglón*** (o ***vector renglón***). Así, en el ejemplo 1, la matriz 2×1 es una matriz columna, la matriz 1×4 es una matriz renglón y la matriz 1×1 es tanto una matriz renglón como una matriz columna. (El término *vector* tiene otro significado que será analizado en capítulos ulteriores.

OBSERVACIÓN. Se acostumbra omitir los corchetes en una matriz 1×1. Así, se podría escribir 4 en vez de 4 . Aunque lo anterior imposibilita saber si 4 denota el número "cuatro" o la matriz 1×1 cuyo elemento es "cuatro", excepcionalmente causa problemas, ya que casi siempre es posible inferir el significado a partir del contexto en que aparece el símbolo.

Para denotar matrices se usarán mayúsculas y para denotar cantidades, minúsculas; así, se podría escribir

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Al estudiar matrices, es común denominar ***escalares*** a las cantidades numéricas. A menos que se establezca otra cosa, los *escalares serán números reales*; los escalares complejos serán considerados en el capítulo 10.

El elemento que aparece en el renglón i y la columna j de una matriz A se denota por a_{ij}.
Así, una matriz general 3×4 se puede escribir como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

y una matriz general $m \times n$, como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Cuando se desea que la notación sea condensada, la matriz precedente se puede expresar como

$$[a_{ij}]_{m \times n} \qquad \text{o} \qquad [a_{ij}]$$

la primera notación se usa cuando en el análisis es importante conocer el tamaño y la segunda cuando no es necesario recalcar el tamaño. Por lo general, la letra que denota una matriz corresponde a la letra que denota sus elementos; así, para una matriz B en general se usará b_{ij} para denotar el elemento en el renglón i y la columna j, y para una matriz C se usará c_{ij}.

El elemento en el renglón i y la columna j de una matriz A se denota por el símbolo $(A)_{ij}$. Así, para la matriz (1) anterior, se tiene

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

y para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene $(A)_{11} = 2$, $(A)_{12} = -3$, $(A)_{21} = 7$, y $(A)_{22} = 0$.

Las matrices renglón y columna revisten especial importancia y se denotan con minúsculas negritas en vez de mayúsculas. En estas matrices es innecesario usar subíndices dobles para los elementos. Entonces, una matriz renglón general **a** $1 \times n$ y una matriz columna general **b** $m \times 1$ se escribirán como

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Una matriz A con n renglones y n columnas se denomina ***matriz cuadrada de orden n***, y se dice que los elementos $\boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{a_{22}}, \ldots, \boldsymbol{a_{nn}}$ están en la ***diagonal principal*** de A (véanse los elementos en tipo negro en la figura 1).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Figura 1

OPERACIONES CON MATRICES

Hasta el momento, las matrices se han usado para abreviar el trabajo al resolver sistemas de ecuaciones lineales. Para otras aplicaciones, sin embargo, es deseable desarrollar una "aritmética de matrices" en la que sea posible sumar, restar y multiplicar matrices de manera útil. El resto de esta sección se dedicará al desarrollo de esa aritmética.

> **Definición.** Dos matrices son ***iguales*** si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

En notación matricial, si $A = [a_{ij}]$ y $[B = b_{ij}]$ son del mismo tamaño, entonces $A = B$ si y sólo si $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ o, equivalentemente, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i y j.

Ejemplo 2 Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $x = 5$, entonces $A = B$, pero para los demás valores de x las matrices A y B no son iguales, ya que no todos sus elementos correspondientes son iguales. No hay ningún valor de x para el que $A = C$, ya que los tamaños de A y C son diferentes. ∆

> **Definición.** Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces la ***suma*** $A + B$ es la matriz obtenida al sumar los elementos de B con los elementos correspondientes de A, y la ***diferencia*** $A - B$ es la matriz obtenida al restar los elementos de B de los elementos correspondientes de A. No es posible sumar o restar matrices de tamaños diferentes.

En notación matricial, si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son del mismo tamaño, entonces

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{y} \qquad (A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Ejemplo 3 Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Las expresiones $A + C$, $B + C$, $A - C$ y $B - C$ no están definidas. Δ

Definición. Si A es cualquier matriz y c es cualquier escalar, entonces el ***producto*** cA es la matriz obtenida al multiplicar cada elemento de A por c.

En notación matricial, si $A = [a_{ij}]$, entonces

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Ejemplo 4 Para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \tfrac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Es común denotar $(-1)B$ por $-B$. Δ

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son matrices del mismo tamaño y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son escalares, entonces una expresión de la forma

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_n A_n$$

se denomina ***combinación lineal*** de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con ***coeficientes*** $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Por ejemplo, si A, B y C son las matrices del ejemplo 4, entonces

$$\begin{aligned} 2A - B + \tfrac{1}{3}C &= 2A + (-1)B + \tfrac{1}{3}C \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

es la combinación lineal de A, B y C con coeficientes escalares 2, -1 y $\frac{1}{3}$.

Hasta el momento se ha definido la multiplicación de una matriz por un escalar, pero no la multiplicación de dos matrices. Como la suma de matrices se ejecuta sumando los elementos correspondientes y la resta de matrices se ejecuta restando los elementos correspondientes, parecería natural definir el producto de matrices como la multiplicación de los elementos correspondientes. Sin embargo, resulta que la definición no es de mucha utilidad en la mayor parte de los problemas. La experiencia ha llevado a los matemáticos a la siguiente definición, menos natural pero más útil, de producto de matrices.

Definición. Si A es una matriz $m \times r$ y B es una matriz $r \times n$, entonces el ***producto*** AB es la matriz $m \times n$ cuyos elementos se determinan como sigue. Para encontrar el elemento en el renglón i y en la columna j de AB, considerar sólo el renglón i de la matriz A y la columna j de la matriz B. Multiplicar entre sí los elementos correspondientes del renglón y de la columna mencionados y luego sumar los productos resultantes.

Ejemplo 5 Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Como A es una matriz 2×3 y B es una matriz 3×4, el producto AB es una matriz 2×4. Para determinar, por ejemplo, el elemento en el renglón 2 y en la columna 3 de AB, sólo se consideran el renglón 2 de A y la columna 3 de B. Luego, como se ilustra a continuación, los elementos correspondientes (en tipo negro) se multiplican entre sí y se suman los productos obtenidos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & \mathbf{4} & 3 \\ 0 & -1 & \mathbf{3} & 1 \\ 2 & 7 & \mathbf{5} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{26} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26}$$

El elemento en el renglón 1 y en la columna 4 de AB (en negro) se calcula como sigue.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & \mathbf{3} \\ 0 & -1 & 3 & \mathbf{1} \\ 2 & 7 & 5 & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \boxed{13} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13}$$

Los cálculos para los demás productos son

$$\begin{aligned} (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) &= 12 \\ (1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) &= 27 \\ (1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) &= 30 \\ (2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) &= 8 \\ (2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) &= -4 \\ (2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) &= 12 \quad \Delta \end{aligned} \qquad AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Para formar el producto AB, la definición de multiplicación de matrices requiere que el número de columnas del primer factor A sea el mismo que el número de renglones del segundo factor B. Si no se cumple esta condición, entonces el producto está indefinido. Una manera conveniente para determinar si el producto de dos matrices está definido es escribir el tamaño del primer factor y, a la derecha, escribir el tamaño del segundo factor. Si, como se observa en la figura 2, los números interiores son iguales, entonces el producto está definido. Los números exteriores proporcionan entonces el tamaño del producto.

$$\underset{m \times r}{A} \qquad \underset{r \times n}{B} = \underset{m \times n}{AB}$$

Medios

Extremos

Figura 2

Ejemplo 6 Suponer que A, B y C son matrices con los siguientes tamaños:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ 3 \times 4 & 4 \times 7 & 7 \times 3 \end{matrix}$$

Entonces AB está definido y se trata de una matriz 3×7; CA está definido y se trata de una matriz 7×4; y BC está definido y se trata de una matriz 4×3. Los productos AC, CB y BA están indefinidos.

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz general $m \times r$ y $B = [b_{ij}]$ es una matriz general $r \times n$, entonces como se ilustra con tipo negro de la figura 3, el elemento $(AB)_{ij}$ en el renglón i y la columna j de AB está definido por

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \tag{2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{ir}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boldsymbol{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \boldsymbol{b_{2j}} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & \boldsymbol{b_{rj}} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

Figura 3 Δ

PARTICIÓN DE MATRICES

Una matriz se puede subdividir o ***partir*** en matrices más pequeñas insertando rectas horizontales y verticales entre renglones y columnas selectos. Por ejemplo, a continuación se muestran tres posibles particiones de una matriz general A 3 × 4: la primera es una partición de A en cuatro ***submatrices*** A_{11}, A_{12}, A_{21} y A_{22}; la segunda es una partición de A en sus matrices renglón $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$; y la tercera es una partición de A *en* sus matrices columna $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ y $\mathbf{c}_4$:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES POR COLUMNAS Y POR RENGLONES

Algunas veces es necesario encontrar un renglón o una columna particulares de un producto AB de matrices sin calcular todo el producto. Los siguientes resultados, cuyas demostraciones se dejan como ejercicios, son útiles para este propósito:

$$\boxed{j\text{-ésima matriz columna de } AB = A\ [j\text{-ésima matriz columna de } B]} \tag{3}$$

$$\boxed{i\text{-ésima matriz renglón de } AB = [i\text{-ésima matriz renglón de } A]B} \tag{4}$$

Ejemplo 7 Si A y B son las matrices del ejemplo 5, entonces por (3) la segunda matriz columna de AB se puede obtener al calcular

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Segunda columna de B — **Segunda columna de AB**

y por (4), la primera matriz renglón de AB se puede obtener al calcular

$$[1 \quad 2 \quad 4] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = [12 \quad 27 \quad 30 \quad 13]$$

Primer renglón de A — **Primer renglón de AB**

Si $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ denotan las matrices renglón de A y $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ denotan las matrices columna de B, entonces por las fórmulas (3) y (4) se concluye que

$$\boxed{AB = A[\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n] = [A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{b}_n]} \tag{5}$$

(AB calculada columna por columna)

$$\boxed{AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix}} \tag{6}$$

(AB calculada renglón por renglón)

OBSERVACIÓN. Las fórmulas (5) y (6) son casos especiales de un procedimiento más general para multiplicar matrices divididas (véanse los ejercicios 15, 16 y 17).

PRODUCTOS DE MATRICES COMO COMBINACIONES LINEALES

Las matrices renglón y columna proporcionan otra manera de concebir la multiplicación de matrices. Por ejemplo, suponer que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

En palabras, la fórmula (7) establece que *el producto* $A\mathbf{x}$ *de una matriz* A *y una matriz columna* $\mathbf{x}$ *es una combinación lineal de las matrices columna de* A *con los coeficientes que provienen de la matriz* $\mathbf{x}$. En los ejercicios de la sección se pide al lector demostrar que *el producto* $\mathbf{y}A$ *de una matriz* $\mathbf{y}$ $1 \times m$ *y una matriz* A $m \times n$ *es una combinación lineal de las matrices renglón de* A *con coeficientes escalares que provienen de* $\mathbf{y}$.

Ejemplo 8 El producto matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

se puede escribir como la combinación lineal

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

y el producto matricial

$$[1 \quad -9 \quad -3]\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = [-16 \quad -18 \quad 35]$$

se puede escribir como la combinación lineal

$$1[-1 \quad 3 \quad 2] - 9[1 \quad 2 \quad -3] - 3[2 \quad 1 \quad -2] = [-16 \quad -18 \quad 35] \quad \Delta$$

Por (5) y (7) se concluye que *la j-ésima matriz columna de un producto* AB *es una combinación lineal de las matrices columna de* A *con los coeficientes que provienen de la j-ésima columna de* B.

Ejemplo 9 En el ejemplo 5 se demostró que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Las matrices columna de AB se pueden expresar como combinaciones lineales de las matrices columna de A en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA LINEAL

La multiplicación de matrices tiene una aplicación importante a los sistemas de ecuaciones lineales. Considerar cualquier sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Como dos matrices son iguales si y sólo si sus elementos correspondientes son iguales, es posible sustituir las m ecuaciones lineales en este sistema por la simple ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matriz $m \times 1$ en el miembro izquierdo de esta ecuación se puede escribir como un producto para obtener

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Si estas matrices se designan por A, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente, entonces el sistema original de m ecuaciones con n incógnitas ha sido reemplazado por la ecuación matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

La matriz A en esta ecuación se denomina ***matriz de coeficientes*** del sistema. La matriz aumentada del sistema se obtiene adjuntando $\mathbf{b}$ a A como última columna; así, la matriz aumentada es

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Esta sección termina con la definición de dos operaciones matriciales que carecen de análogo en los números reales.

> **Definición.** Si A es cualquier matriz $m \times n$, entonces la ***transpuesta de A***, denotada por A^T, se define como la matriz $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones y las columnas de A; es decir, la primera columna de A^T es el primer renglón de A, la segunda columna de A^T del segundo renglón de A, y así sucesivamente.

Ejemplo 10 A continuación se presentan algunos ejemplos de matrices y sus transpuestas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 3 \quad 5] \quad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad D^T = [4] \quad \Delta$$

Observar no sólo que las columnas de A^T son los renglones de A, sino que los renglones de A^T son las columnas de A. Así, el elemento en el renglón i y la columna j de A^T es el elemento en el renglón j y la columna i de A, es decir,

$$\boxed{(A^T)_{ij} = (A)_{ji}} \tag{8}$$

Observar la inversión de los subíndices.

En el caso especial en que A es una matriz cuadrada, la transpuesta de A se puede obtener al intercambiar los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal (figura 4). Planteado de otra forma, A^T se puede obtener "reflejando" A con respecto a su diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & 7 & \mathbf{0} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{8} & 6 \end{bmatrix} \to A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Intercambiar los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal.

Figura 4

TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Definición. Si A es una matriz cuadrada, entonces la ***traza de A***, denotada por $\text{tr}(A)$, se define como la suma de los elementos de la diagonal principal de A. La traza de A no está definida si A no es una matriz cuadrada.

Ejemplo 11 A continuación se presentan algunos ejemplos de matrices y sus trazas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}} \qquad \boxed{\text{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11} \quad \Delta$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.3

1. Suponer que A, B, C, D y F son matrices de los tamaños siguientes:

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Determinar cuáles de las siguientes expresiones de matrices están definidas. Para las que estén definidas, proporcionar el tamaño de la matriz resultante.

a) BA b) $AC + D$ c) $AE + B$ d) $AB + B$
e) $E(A + B)$ f) $E(AC)$ g) E^TA h) $(A^T + E)D$

2. Resolver la siguiente ecuación matricial para a, b, c y d.

$$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Considerar las matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcular lo siguiente (en caso de ser posible).

a) $D + E$ b) $D - E$ c) $5A$ d) $-7C$
e) $2B - C$ f) $4E - 2D$ g) $-3(D + 2E)$ h) $A - A$
i) $\text{tr}(D)$ j) $\text{tr}(D - 3E)$ k) $4\,\text{tr}(7B)$ l) $\text{tr}(A)$

4. Con las matrices del ejercicio 3, calcular lo siguiente (en caso de ser posible).

a) $2A^T + C$ b) $D^T - E^T$ c) $(D - E)^T$ d) $B^T + 5C^T$
e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$ f) $B - B^T$ g) $2E^T - 3D^T$ h) $(2E^T - 3D^T)^T$

5. Usar las matrices del ejercicio 3 para calcular lo siguiente (en caso de ser posible).

a) AB b) BA c) $(3E)D$ d) $(AB)C$
e) $A(BC)$ f) CC^T g) $(DA)^T$ h) $(C^TB)A^T$
i) $\text{tr}(DD^T)$ j) $\text{tr}(4E^T - D)$ k) $\text{tr}(C^TA^T + 2E^T)$

6. Mediante las matrices del ejercicio 3, calcular lo siguiente (en caso de ser posible).

a) $(2D^T - E)A$ b) $(4B)C + 2B$ c) $(-AC)^T + 5D^T$
d) $(BA^T - 2C)^T$ e) $B^T(CC^T - A^TA)$ f) $D^TE^T - (ED)^T$

7. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Con el método del ejemplo 7, encontrar

a) el primer renglón de AB, c) la segunda columna de AB, e) el tercer renglón de AA, y
b) el tercer renglón de AB, d) la primera columna de BA, f) la tercera columna de AA.

8. Sean A y B las matrices del ejercicio 7.

a) Expresar cada matriz columna de AB como una combinación lineal de las matrices columna de A.
b) Expresar cada matriz columna de BA como una combinación lineal de las matrices columna de B.

9. Sean

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Demostrar que el producto $\mathbf{y}A$ se puede expresar como una combinación lineal de las matrices renglón de A con los coeficientes escalares de $\mathbf{y}$.

10. Sean A y B las matrices del ejercicio 7.

a) Usar el resultado del ejercicio 9 para expresar cada matriz renglón de AB como una combinación lineal de las matrices renglón de B.
b) Con el resultado del ejercicio 9 expresar cada matriz renglón de BA como una combinación lineal de las matrices renglón de A.

11. Sean C, D y E las matrices del ejercicio 3. Efectuando el menor número de cálculos posible, determinar el elemento en el renglón 2 y en la columna 3 de $C(DE)$.

12. a) Demostrar que si AB y BA están definidos, entonces AB y BA son matrices cuadradas.
b) Demostrar que si A es una matriz $m \times n$ y $A(BA)$ está definido, entonces B es una matriz $n \times m$.

13. En cada inciso determinar las matrices A, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ que expresen el sistema de ecuaciones lineales dado como una simple ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x_1 \phantom{{}+ 5x_2} - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 \phantom{{}+ 9x_3} - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

14. En cada inciso expresar la ecuación matricial como un sistema de ecuaciones lineales.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. Si A y B se dividen en submatrices, por ejemplo

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{y} \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

entonces AB se puede expresar como

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

en el supuesto de que los tamaños de las submatrices A y B sean tales que las operaciones indicadas se puedan efectuar. Este método para multiplicar matrices divididas se denomina ***multiplicación en bloque***. En cada inciso, calcular el producto por medio de multiplicación en bloque. Comprobar los resultados multiplicando directamente.

a) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

b) $A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 0 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

16. Adaptar el método del ejercicio 15 para calcular los siguientes productos mediante multiplicación en bloque.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cc} 2 & -5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{array}\right]$

17. En cada inciso, determinar si la multiplicación en bloque se puede usar para calcular AB a partir de las particiones dadas. En caso afirmativo, calcular el producto mediante multiplicación en bloque.

a) $A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

18. a) Demostrar que si A contiene un renglón de ceros y B es cualquier matriz para la que AB está definido, entonces AB también contiene un renglón de ceros.
b) Encontrar un resultado semejante, pero respecto a una columna de ceros.

19. Sea A cualquier matriz $m \times n$ y sea O la matriz $m \times n$, cada uno de cuyos elemento es cero. Demostrar que si $kA = 0$, entonces $k = 0$ o $A = 0$.

20. Sea I la matriz $n \times n$ cuyo elemento en el renglón i y en la columna j es

$$\begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Demostrar que $AI = IA = A$ para toda matriz A $n \times n$.

21. En cada inciso, encontrar una matriz $[a_{ij}]$ 6×6 que cumpla la condición que se establece. Hacer que las respuestas sean lo más generales posible usando letras en vez de números específicos para denotar los elementos diferentes de cero.

a) $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (b) $a_{ij} = 0$ si $i > j$ (c) $a_{ij} = 0$ si $i < j$ (d) $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$

22. Encontrar una matriz $A = [a_{ij}]$ de 4×4 cuyos elementos cumplan la condición que se establece.

a) $a_{ij} = i + j$ b) $a_{ij} = i^{j-1}$ c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |i - j| > 1 \\ -1 & \text{si} \quad |i - j| \leq 1 \end{cases}$

23. Demostrar lo siguiente: Si A es una matriz $m \times n$, entonces

$$\text{tr}(AA^T) = \text{tr}(A^TA) = s$$

donde s es la suma de los cuadrados de los elementos de A.

24. Usando el resultado del ejercicio 23, demostrar lo siguiente.
a) Si A es una matriz $m \times n$ tal que $AA^T = 0$ o $A^TA = 0$, entonces $A = 0$.
b) Si A es una matriz $n \times n$ tal que $A = A^T$ y $A^2 = 0$, entonces $A = 0$.

1.4 INVERSAS; REGLAS DE LA ARITMÉTICA DE MATRICES

En esta sección se analizarán algunas propiedades de las operaciones aritméticas sobre matrices. Se verá que muchas de las reglas básicas de la aritmética de los números reales también se cumplen para matrices, aunque unas cuantas no.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON MATRICES

Para números reales a y b siempre se tiene que $ab = ba$, lo cual se denomina *ley conmutativa de la multiplicación*. Para matrices, sin embargo, AB y BA no necesariamente son iguales. Es posible que la igualdad no se cumpla debido a tres razones. Puede suceder, por ejemplo, que AB esté definido pero que BA no. Este es el caso si A es una matriz 2×3 y B es una matriz 3×4. También, puede suceder que AB y BA estén definidos aunque sean de tamaños distintos. Esta es la situación si A es una matriz 2×3 y B es una matriz 3×2. Finalmente, como se muestra en el ejemplo 1, se puede tener $AB \neq BA$ inclusive si tanto AB como BA están definidos y son del mismo tamaño.

Ejemplo 1 Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar se obtiene

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, $AB \neq BA$. Δ

Aunque la ley conmutativa de la multiplicación no es válida en aritmética matricial, muchas leyes conocidas de la aritmética son válidas para matrices. En el siguiente teorema se resumen algunas de las más importantes, así como sus denominaciones.

Teorema 1.4.1. *Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que las operaciones indicadas se pueden efectuar, entonces son válidas las siguientes reglas de aritmética matricial.*

a) $A + B = B + A$ **(*Ley conmutativa de la adición*)**
b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **(*Ley asociativa de la adición*)**
c) $A(BC) = (AB)C$ **(*Ley asociativa de la multiplicación*)**
d) $A(B + C) = AB + AC$ **(*Ley distributiva por la izquierda*)**
e) $(B + C)A = BA + CA$ **(*Ley distributiva por la derecha*)**
f) $A(B - C) = AB - AC$
g) $(B - C)A = BA - CA$
h) $a(B + C) = aB + aC$
i) $a(B - C) = aB - aC$
j) $(a + b)C = aC + bC$
k) $(a - b)C = aC - bC$
l) $a(bC) = (ab)C$
m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Para probar las igualdades de este teorema es necesario demostrar que la matriz del miembro izquierdo es del mismo tamaño que la matriz del miembro derecho y que los elementos correspondientes en ambos miembros son iguales. Con excepción de la ley asociativa del inciso *c*), todas las demostraciones siguen el mismo

patrón general. Como ilustración, se demostrará el inciso *d*). La demostración de la ley asociativa, que es más complicada, se esboza en los ejercicios.

Demostración de d). Es necesario demostrar que $A(B + C)$ y $AB + AC$ son del mismo tamaño y que los elementos correspondientes son iguales. Para formar $A(B + C)$, las matrices B y C deben ser del mismo tamaño, por ejemplo $m \times n$, y entonces la matriz A debe tener m columnas, de modo que su tamaño debe ser de la forma $r \times m$. Con lo anterior, se tiene que $A(B + C)$ es una matriz $r \times n$. Se concluye que $AB + AC$ también es una matriz $r \times n$ y, en consecuencia, $A(B + C)$ y $AB + AC$ son del mismo tamaño.

Suponer que $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ y $C = [c_{ij}]$. Se quiere demostrar que los elementos correspondientes de $A(B + C)$ y $AB + AC$ son iguales; es decir, que

$$[A(B + C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$

para todos los valores de i y j. Pero por las definiciones de adición y multiplicación de matrices se tiene

$$\begin{aligned}[A(B + C)]_{ij} &= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj} + c_{mj}) \\ &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj}) \\ &= [AB]_{ij} + [AC_{ij}] = [AB + AC]_{ij} \quad \square\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Aunque las operaciones de adición y multiplicación de matrices se definieron para pares de matrices, las leyes asociativas *b*) y *c*) permiten denotar sumas y productos de tres matrices como $A + B + C$ y ABC sin introducir ningún paréntesis. Lo anterior se justifica por el hecho de que sin importar cómo se introducen paréntesis, las leyes asociativas garantizan la obtención del mismo resultado final. En general, *dados cualquier suma o producto de matrices, en las expresiones se pueden introducir o eliminar pares de paréntesis sin afectar el resultado final.*

Ejemplo 2 Como ilustración de la ley asociativa de la multiplicación de matrices, considerar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

y

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

de modo que $(AB)C = A(BC)$, como garantiza el teorema 1.4.1*c*. Δ

MATRICES CERO

Una matriz que tiene todos sus elemento iguales a cero, como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [0]$$

se denomina ***matriz cero***. Una matriz cero se denotará por 0; si es importante destacar el tamaño, se escribirá $0_{m \times n}$ para denotar la matriz cero $m \times n$.

Si A es cualquier matriz y 0 es la matriz cero del mismo tamaño que A, resulta evidente que $A + 0 = 0 + A = A$. La matriz 0 desempeña casi la misma función en estas ecuaciones matriciales que la desempeñada por el número 0 en las ecuaciones numéricas $a + 0 = 0 + a = a$.

Como ya se sabe que algunas de las reglas de la aritmética para los números reales no se cumplen en la aritmética matricial, sería temerario asumir que todas las propiedades del número real cero se cumplen para las matrices cero. Por ejemplo, considerar los dos resultados normales siguientes de la aritmética para los números reales.

- Si $ab = ac$ y $a = 0$, entonces $b = c$. (Esto se denomina *ley de cancelación.*)
- Si $ad = 0$ entonces por lo menos uno de los factores del miembro izquierdo es cero.

Como se muestra en el siguiente ejemplo, en general los resultados correspondientes no son ciertos en aritmética matricial.

Ejemplo 3 Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Aunque $A \neq 0$, es incorrecto cancelar la A en ambos miembros de la ecuación $AB = AC$ y escribir $B = C$. Así, la ley de cancelación no se cumple para matrices. También, $AD = 0$, aunque $A \neq 0$ y $D \neq 0$. Δ

A pesar del ejemplo anterior, existen varias propiedades conocidas de número real 0 que *se cumplen* en las matrices cero. Algunas de las más importantes se resumen en el siguiente teorema. Las demostraciones se dejan como ejercicio.

Teorema 1.4.2. *Si se supone que los tamaños de las matrices son tales que es posible efectuar las operaciones que se indican, las siguientes reglas de aritmética matricial son válidas.*

a) $A + 0 = 0 + A = A$
b) $A - A = 0$
c) $0 - A = -A$
d) $A0 = 0$; $0A = 0$

MATRICES IDENTIDAD

De especial interés son las matrices cuadradas que tienen unos en la diagonal principal y ceros fuera de ésta, como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{etcétera.}$$

Una matriz de esta forma se denomina ***matriz identidad*** y se denota por I. Si es importante recalcar el tamaño, se escribirá I_n para denotar la matriz identidad $n \times n$.

Si A es una matriz $m \times n$, entonces, como se ilustra en el siguiente ejemplo,

$$AI_n = A \qquad \text{y} \qquad I_mA = A$$

Así, en aritmética matricial la matriz identidad juega un papel bastante semejante al que desempeña el número 1 en las relaciones numéricas $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Ejemplo 4 Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

y

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A \quad \Delta$$

Como se muestra en el siguiente teorema, las matrices identidad surgen de manera natural en el estudio de formas escalonadas reducidas de matrices *cuadradas*.

Teorema 1.4.3. *Si R es la forma escalonada reducida de una matriz A de $n \times n$, entonces R tiene un renglón de ceros, o bien, R es la matriz identidad I_n.*

Demostración. Suponer que la forma escalonada reducida de A es

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces sucede que el ultimo renglón de esta matriz está integrado completamente de ceros o no lo está. En caso de que no lo esté, la matriz no contiene renglones cero y, en consecuencia, cada uno de los n renglones contiene un elemento principal igual a 1. Como estos unos principales aparecen progresivamente cada vez más lejos hacia la derecha a medida que la matriz se recorre hacia abajo, cada uno de estos unos debe aparecer en la diagonal principal. Ya que los demás elementos en la misma columna de uno de los unos principales son cero, entonces R debe ser I_n. Así, R tiene un renglón de ceros, o bien, $R = I_n$. □

INVERSA DE UNA MATRIZ

Definición. Si A es una matriz cuadrada y si se puede encontrar una matriz B del mismo tamaño tal que $AB = BA = I$, entonces se dice que A es ***invertible*** y B se denomina una ***inversa*** de A.

Ejemplo 5 La matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{es una inversa de} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ya que

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \Delta$$

Ejemplo 6 La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

no es invertible. Para ver por qué, sea

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

cualquier matriz 3×3. La tercera columna de BA es

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$BA \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

PROPIEDADES DE LAS INVERSAS

Es razonable preguntar si una matriz invertible puede tener más de una inversa. El siguiente teorema muestra que la respuesta es no: *una matriz invertible tiene exactamente una inversa.*

Teorema 1.4.4. *Si B y C son, ambas, inversas de la matriz A, entonces $B = C$.*

Demostración. Ya que B es una inversa de A, se tiene que $BA = I$. Al multiplicar ambos miembros por la derecha por C se obtiene $(BA)C = IC = C$. Pero $(BA)C = B(AC) = BI = B$, de modo que $C = B$. □

Como una consecuencia de este importante resultado, ahora es posible hablar de "la" inversa de una matriz invertible. Si A es invertible, entonces su inversa se denota por el símbolo A^{-1}. Así,

$$AA^{-1} = I \quad \text{y} \quad A^{-1}A = I$$

La inversa de A tiene en aritmética matricial casi la misma función que el recíproco a^{-1} juega en las relaciones numéricas $aa^{-1} = 1$ y $a^{-1}a = 1$.

En la siguiente sección se desarrollará un método para determinar inversas de matrices invertibles de cualquier tamaño; sin embargo, el siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales una matriz 2×2 es invertible y proporciona una fórmula sencilla para encontrar la inversa.

Teorema 1.4.5. *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es invertible si $ad - bc \neq 0$, *en cuyo caso la inversa está definida por la fórmula*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & -\dfrac{b}{ad - bc} \\ -\dfrac{c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Demostración. Se deja para el lector la comprobación de que $AA^{-1} = I_2$ y $A^{-1}A = I_2$. □

Teorema 1.4.6. *Si A y B son matrices invertibles del mismo tamaño, entonces*

a) AB *es invertible,*
b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración. Si se puede demostrar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, entonces se habrá demostrado simultáneamente que la matriz AB es invertible y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Pero $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. Con un razonamiento semejante se demuestra que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. □

Aunque este resultado no se demostrará, se puede extender para incluir tres o más factores; es decir,

Un producto de cualquier número de matrices invertibles es invertible, y la inversa del producto es el producto de las inversas en orden invertido.

Ejemplo 7 Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula del Teorema 1.4.5, se obtiene

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad (AB)^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

También,

$$B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, como garantiza el teorema 1.4.6. Δ

POTENCIAS DE UNA MATRIZ

A continuación se definirán las potencias de una matriz cuadrada y se analizarán sus propiedades.

Definición. Si A es una matriz cuadrada, entonces las potencias enteras no negativas de A se definen como

$$\boxed{A^0 = I} \qquad \boxed{A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ factores}} \qquad (n > 0)}$$

Además, si A es invertible, entonces las potencias enteras negativas de A se definen como

$$\boxed{A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n \text{ factores}}}$$

Debido a que esta definición es paralela a la de los números reales, se cumplen las leyes usuales de los exponentes. (Se omiten los detalles.)

Teorema 1.4.7. *Si A es una matriz cuadrada y r y s son enteros, entonces*

$$\boxed{A^rA^s = A^{r+s} \qquad (A^r)^s = A^{rs}}$$

El siguiente teorema establece algunas propiedades importantes de los exponentes negativos.

Teorema 1.4.8. *Si A es una matriz invertible, entonces*

a) A^{-1} *es invertible y* $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) A^n es invertible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ *para* $n = 0, 1, 2,$

c) Para cualquier escalar k diferente de cero la matriz kA es invertible y $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

Demostración

a) Como $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, la matriz A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
b) Este inciso se deja como ejercicio.
c) Si k es cualquier escalar diferente de cero, entonces por los resultados *l*) y *m*) del teorema 1.4.1 es posible escribir

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = \left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1} = (1)I = I$$

De manera semejante, $\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA) = I$ de modo que kA es invertible y $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

Ejemplo 8 Sean A y A^{-1} como en el ejemplo 7; es decir,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

EXPRESIONES POLINÓMICAS EN QUE APARECEN MATRICES

Si A es una matriz cuadrada, por ejemplo $m \times m$, y si

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \tag{1}$$

es cualquier polinomio,, entonces se define

$$p(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$$

donde I es la matriz identidad $m \times m$. En palabras, $p(A)$ es la matriz $m \times m$ que se obtiene cuando A se sustituye por x en (1) y a_0 se reemplaza por a_0I.

Ejemplo 9 Si

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 4 \qquad \text{y} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 4I = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

PROPIEDADES DE LA TRANSPUESTA

En el siguiente teorema se enumeran las propiedades más importantes de la operación de transposición.

Teorema 1.4.9. *Si los tamaños de las matrices son tales que se pueden efectuar las operaciones planteadas, entonces*

a) $((A)^T)^T = A$
b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ *y* $(A - B)^T = A^T - B^T$
c) $(kA)^T = kA^T$, *donde k es cualquier escalar*
d) $(AB)^T = B^T A^T$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Considerando que al transponer una matriz se intercambian sus renglones y sus columnas, los incisos *a*), *b*) y *c*) deben ser evidentes. Por ejemplo, en el inciso *a*) se establece que al intercambiar renglones y columnas dos veces la matriz permanece sin modificar; en el inciso *b*) se afirma que al sumar y luego intercambiar renglones y columnas se obtiene el mismo resultado que cuando primero se intercambian renglones y columnas y luego se suma; y en el inciso *c*) se establece que al multiplicar por un escalar y luego intercambiar renglones y columnas se obtiene el mismo resultado que si primero se intercambian renglones y columnas y luego se multiplica por un escalar. El inciso (*d*) no es tan evidente, por lo que se demostrará.

***Demostración de d*).** Sean

$$A = [a_{ij}]_{m \times r} \qquad \text{y} \qquad B = [b_{ij}]_{r \times n}$$

de modo que es posible formar los dos productos AB y $B^T A^T$. Se deja para el lector comprobar que $(AB)^T$ y $B^T A^T$ son del mismo tamaño; a saber, que son $n \times m$. Así, queda por demostrar que los elementos correspondientes de $(AB)^T$ y $B^T A^T$ son los mismos; es decir,

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (B^T A^T)_{ij} \tag{2}$$

Al aplicar la fórmula (8) de la sección 1.3 al miembro izquierdo de esta ecuación y usar la definición de multiplicación de matrices, se obtiene

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri} \tag{3}$$

Para evaluar el miembro derecho de (2) es conveniente que a'_{ij} y b'_{ij} denoten los ij-ésimos elementos de A^T y B^T, respectivamente, de modo que

$$a'_{ij} = a_{ji} \qquad \text{y} \qquad b'_{ij} = b_{ji}$$

Con base en estas relaciones y la definición de multiplicación de matrices se obtiene

$$\begin{aligned}(B^TA^T)_{ij} &= b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + \cdots + b'_{ir}a'_{rj}\\ &= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}a_{jr}\\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri}\end{aligned}$$

Lo anterior, junto con (3), demuestra (2). □

Aunque no se demostrará este hecho, el inciso *d*) del teorema se puede extender para incluir tres o más factores; es decir,

> *La transpuesta de un producto de cualquier número de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden invertido.*

OBSERVACIÓN. Nótese la semejanza entre este resultado y el resultado, que está a continuación del teorema 1.4.6, respecto a la inversa de un producto de matrices.

INVERTIBILIDAD DE UNA TRANSPUESTA

El siguiente teorema establece una relación entre la inversa de una matriz invertible y la inversa de su transpuesta.

> **Teorema 1.4.10.** *Si A es una matriz invertible, entonces A^T también es invertible y*
>
> $$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \tag{4}$$

Demostración. Se puede probar la invertibilidad de A^T y obtener (4) al demostrar que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^TA^T = I$$

Pero por el inciso *d*) del teorema 1.4.9 y el hecho de que $I^T = I$, se tiene

$$\begin{aligned}A^T(A^{-1})^T &= (A^{-1}A)^T = I^T = I\\ (A^{-1})^TA^T &= (AA^{-1})^T = I^T = I\end{aligned}$$

con lo que se completa la demostración. □

Ejemplo 10 Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el teorema 1.4.5 se obtiene

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Como garantiza el teorema 1.4.10, estas matrices satisfacen la fórmula (4). Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.4

1. Sean

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&4&5\\-2&1&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8&-3&-5\\0&1&2\\4&-7&6\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&-2&3\\1&7&4\\3&5&9\end{bmatrix},\quad a=4,\quad b=-7$$

Demostrar que

a) $A+(B+C)=(A+B)+C$ b) $(AB)C=A(BC)$ c) $(a+b)C=aC+bC$
d) $a(B-C)=aB-aC$

2. Usando las matrices y los escalares del ejercicio 1, demostrar que

a) $a(BC)=(aB)C=B(aC)$ b) $A(B-C)=AB-AC$ c) $(B+C)A=BA+CA$
d) $a(bC)=(ab)C$

3. Usando las matrices y los escalares del ejercicio 1, demostrar que

a) $(A^T)^T=A$ b) $(A+B)^T=A^T+B^T$ c) $(aC)^T=aC^T$ d) $(AB)^T=B^TA^T$

4. Usar el teorema 1.4.5 para calcular las inversas de las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-3\\4&4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$$

5. Comprobar que las tres matrices A, B y C del ejercicio 4 satisfacen las relaciones $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ y $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

6. Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. ¿$(AB)^2=A^2B^2$ es una igualdad matricial válida? Justificar la respuesta.

7. En cada inciso, usar la información dada para encontrar A.

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\3&5\end{bmatrix}$ b) $(7A)^{-1}=\begin{bmatrix}-3&7\\1&-2\end{bmatrix}$

c) $(5A^T)^{-1}=\begin{bmatrix}-3&-1\\5&2\end{bmatrix}$ d) $(I+2A)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2\\4&5\end{bmatrix}$

8. Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix}2&0\\4&1\end{bmatrix}$$

Calcular A^3, A^{-3} y A^2-2A+I.

9. Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}$$

En cada inciso, determinar $p(A)$.

a) $p(x) = x - 2$ b) $p(x) = 2x^2 - x + 1$ c) $p(x) = x3 - 2x + 4$

10. Sean $p_1(x) = x_2 - 9$, $p_2(x) = x + 3$ y $p_3(x) = x - 3$.
a) Demostrar que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$ para la matriz A del ejercicio 9.
b) Demostrar que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$ para cualquier matriz cuadrada A.

√**11.** Encontrar la inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

12. a) Encontrar matrices A y B 2×2 tales que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
b) Demostrar que si A y B son matrices cuadradas tales que $AB = BA$, entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

c) Encontrar un desarrollo de $(A + B)^2$ que sea válido para todas las matrices cuadradas A y B del mismo tamaño.

13. Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$. Demostrar que A es invertible y encontrar su inversa.

14. Demostrar que si una matriz cuadrada A satisface $A^3 - 3A + I = 0$, entonces $A^{-1} = 3I - A$.

15. a) Demostrar que una matriz con un renglón de ceros no puede tener inversa.
b) Demostrar que una matriz con una columna de ceros no puede tener inversa.

16. La suma de dos matrices invertibles, ¿necesariamente es invertible?

17. Sean A y B matrices cuadradas tales que $AB = 0$. Demostrar que si A es invertible, entonces $B = 0$.

18. En el teorema 1.4.2, ¿por qué el inciso *d*) no se escribió como $A0 = 0 = 0A$?

19. La ecuación real $a^2 = 1$ tiene exactamente dos soluciones. Encontrar por lo menos ocho matrices diferentes 3×3 que cumplan la ecuación matricial $A^2 = I_3$. [***Sugerencia.*** Buscar soluciones en las que todos los elementos fuera de la diagonal principal sean iguales a cero.]

20. a) Encontrar una matriz A 3×3 diferente de cero tal que $A^T = A$.
b) Encontrar una matriz A 3×3 diferente de cero tal que $A^T = -A$.

21. Una matriz cuadrada A se denomina **simétrica** si $A^T = A$ y **antisimétrica** es $A^T = -A$. Demostrar que si B es una matriz cuadrada, entonces
a) BB^T y $B + B^T$ son simétricas. b) $B - B^T$ es antisimétrica.

22. Si A es una matriz cuadrada y n es un entero positivo, ¿es cierto que $(A^n)^T = (A^T)^n$? Justificar la respuesta.

23. Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar si A es invertible y, en caso afirmativo, encontrar su inversa. [***Sugerencia.*** Resolver $AX = I$ igualando los elementos correspondientes de ambos miembros.]

24. Demostrar lo siguiente:
a) Inciso *b*) del teorema 1.4.1. b) Inciso *i*) del teorema 1.4.1. c) Inciso *m*) del teorema 1.4.1.

25. Aplicar los incisos *d*) y *m*) del teorema 1.4.1 a las matrices A, B y $(-1)C$ para obtener el resultado del inciso *f*).

26. Demostrar el teorema 1.4.2.

27. Considerar las leyes de los exponentes $A^rA^s = A^{r+s}$ y $(A^r)^s = A^{rs}$.
a) Demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada, entonces estas leyes son válidas para todos los valores enteros no negativos de r y s.
b) Demostrar que si A es invertible, entonces estas leyes son válidas para todos los valores enteros negativos de r y s.

28. Demostrar que si A es invertible y k es cualquier escalar diferente de cero, entonces $(kA)^n = k^nA^n$ para todos los valores enteros de n.

29. a) Demostrar que si A es invertible y $AB = AC$, entonces $B = C$.
b) Explicar por qué el inciso a) y el ejemplo 3 no se contradicen entre sí.

30. Demostrar el inciso *c*) del teorema 1.4.1. [***Sugerencia.*** Suponer que A es $m \times n$, que B es $n \times p$ y que C es $p \times q$. El *ij*-ésimo elemento en el miembro izquierdo es $l_{ij} = a_{i1}BC_{1j} + a_{i2}BC_{2j} + \cdots + a_{in}BC_{nj}$, y el *ij*-ésimo elemento en el miembro derecho es $r_{ij} = AB_{i1}c_{1j} + AB_{i2}c_{2j} + \cdots + AB_{ip}c_{pj}$. Comprobar que $l_{ij} = r_{ij}$.]

1.5 MATRICES ELEMENTALES Y UN MÉTODO PARA DETERMINAR A^{-1}

En esta sección se obtendrá un algoritmo para determinar la inversa de una matriz invertible y se analizarán algunas propiedades básicas de las matrices invertibles.

MATRICES ELEMENTALES

Definición. Una matriz $n \times n$ se denomina ***matriz elemental*** si se puede obtener a partir de la matriz identidad I_n $n \times n$ al efectuar una sola operación elemental en los renglones.

Ejemplo 1 A continuación se muestran cuatro matrices elementales y las operaciones con que se obtuvieron.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicar por -3 el segundo renglón de I_2	Intercambiar los renglones segundo y cuarto de I_4	Sumar 3 veces el tercer renglón de I_3 al primer renglón	Multiplicar por 1 el primer renglón de I_3

Cuando una matriz A se multiplica por la *izquierda* por una matriz elemental E, el efecto es efectuar una operación elemental en los renglones de A. Este es el contenido del siguiente teorema, cuya demostración se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 1.5.1. *Si la matriz elemental E resulta de la ejecución de ciertas operaciones en los renglones de I_m y si A es una matriz $m \times n$, entonces el producto EA es la matriz que se obtiene cuando la misma operación en los renglones se efectúa en A.*

Ejemplo 2 Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

y considerar la matriz elemental

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta al sumar 3 veces el primer renglón de I_3 al tercero. El producto EA es

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

que es precisamente la misma matriz que se obtiene al sumar 3 veces el primer renglón de A al tercer renglón. Δ

OBSERVACIÓN. El teorema 1.5.1 reviste esencialmente interés teórico y será usado para obtener algunos resultados sobre matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Desde un punto de vista de esfuerzo de cómputo, es preferible efectuar operaciones en los renglones directamente, en vez de multiplicar por la izquierda por una matriz elemental.

Si una operación elemental en los renglones se ejecuta en una matriz elemental I para obtener una matriz elemental E, entonces existe una segunda operación en los renglones que, al ser efectuada en E, produce nuevamente I. Por ejemplo, si E se obtiene al multiplicar el i-ésimo renglón de I por una constante c diferente de cero, entonces I se puede recuperar si el i-ésimo renglón de E se multiplica por $1/c$. En la tabla 1 se enumeran las diversas posibilidades.

TABLA 1

Operaciones en los renglones de I que producen E	**Operaciones en los renglones de E que reproducen I**
Multiplicar el renglón i por $c \neq 0$	Multiplicar el renglón i por $1/c$
Intercambiar los renglones i y j	Intercambiar los renglones i y j
Sumar c veces el renglón i al renglón j	Sumar $-c$ veces el renglón i al renglón j

Las operaciones en la columna derecha de la tabla se denominan ***operaciones inversas*** de las operaciones correspondientes en la columna izquierda.

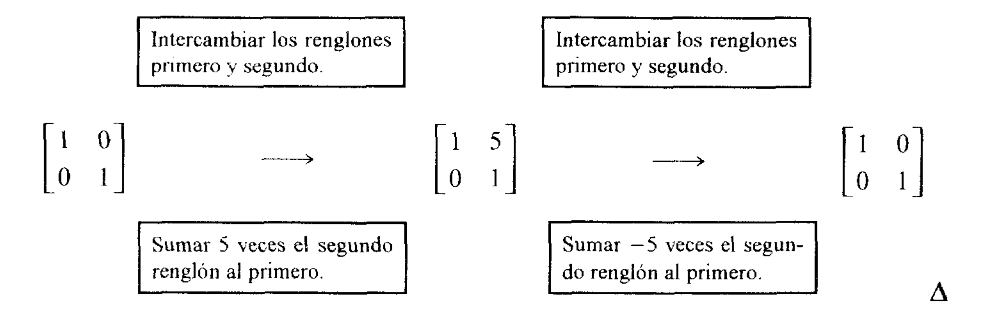
Ejemplo 3 En cada una de las siguientes situaciones se efectuó una operación elemental en un renglón de la matriz identidad 2×2 para obtener una matriz elemental E, y luego E se convirtió en la matriz identidad mediante la operación inversa en el mismo renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicar por 7 el segundo renglón.

Multiplicar por 1/7 el segundo renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Δ

El siguiente teorema establece una propiedad importante de las matrices elementales.

Teorema 1.5.2. *Toda matriz elemental es invertible, y la inversa también es una matriz elemental.*

Demostración. Si E es una matriz elemental, entonces E se obtiene al efectuar algunas operaciones en los renglones de I. Sea E_0 la matriz que se obtiene cuando la inversa de esta operación se efectúa en I. Al aplicar el teorema 1.5.1 y usando el hecho de que las operaciones inversas en los renglones cancelan mutuamente su efecto, se concluye que

$$E_0 E = I \qquad \text{y} \qquad E E_0 = I$$

Así, la matriz elemental E_0 es la inversa de E. ☐

El siguiente teorema establece algunas relaciones fundamentales entre invertibilidad, sistemas lineales homogéneos, formas escalonadas reducidas y matrices elementales. Estos resultados son extremadamente importantes y se usarán muchas veces en secciones ulteriores.

Teorema 1.5.3. *Si A es una matriz $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes; es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.*
a) A es invertible.
b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
c) La forma escalonada reducida de A es I_n.
d) A se puede expresar como un producto de matrices elementales.

Demostración. Se demostrará la equivalencia estableciendo la cadena de implicaciones $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow a$.

$a \Rightarrow b$: Suponer que A es invertible y sea $\mathbf{x}_0$ cualquier solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; así, $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Al multiplicar ambos miembros de esta ecuación por la matriz A^{-1} se obtiene

$A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{-1}\mathbf{0}$, o $(A^{-1}A)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, o $I\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, o $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Por tanto, $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.

$b \Rightarrow c$: Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ la forma matricial del sistema

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{array} \tag{1}$$

y suponer que el sistema sólo tiene la solución trivial. Si el sistema se resuelve por eliminación de Gauss-Jordan, entonces el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada reducida de la matriz aumentada es

$$\begin{array}{llll} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \\ & & \ddots & \\ & & & x_n = 0 \end{array} \tag{2}$$

Así, la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

de (1) se puede reducir a la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de (2) por medio de una sucesión de operaciones elementales en los renglones. Si en cada una de estas matrices se elimina la última columna (de ceros), se puede concluir que la forma escalonada reducida de A es I_n.

$c \Rightarrow d$: Suponer que la forma escalonada reducida de A es I_n, de modo que A se puede reducir a I_n mediante una sucesión finita de operaciones elementales en los renglones. Por el teorema 1.5.1, cada una de las operaciones se puede efectuar

multiplicando por la izquierda por una matriz elemental idónea. Así, es posible hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \tag{3}$$

Por el teorema 1.5.2, las matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son invertibles. Al multiplicar por la izquierda ambos miembros de la ecuación (3) sucesivamente por $E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ se obtiene

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{4}$$

Por el teorema 1.5.2, esta ecuación expresa A como un producto de matrices elementales.

$d \Rightarrow a$: Si A es un producto de matrices elementales, entonces por los teoremas 1.4.6 y 1.5.2 la matriz A es un producto de matrices invertibles, y por tanto es invertible. □

EQUIVALENCIA POR RENGLONES

Si una matriz B se puede obtener a partir de una matriz A mediante la ejecución de una sucesión finita de operaciones elementales en los renglones, entonces resulta evidente que B se puede convertir de nuevo en A mediante la ejecución al revés de las inversas de tales operaciones elementales en los renglones. Las matrices que se pueden obtener a partir de otra matriz mediante la ejecución de una sucesión finita de operaciones elementales en los renglones se denominan ***equivalentes por renglones***. Con esta terminología, por los incisos *a*) y *c*) del teorema 1.5.3 se concluye que una matriz A $n \times n$ es invertible si y sólo si es equivalente por renglones a la matriz identidad $n \times n$.

UN MÉTODO PARA INVERTIR MATRICES

Como primera aplicación del teorema 1.5.3, se establecerá un método para determinar la inversa de una matriz invertible. Al invertir los miembros izquierdo y derecho de (4) se obtiene $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$ o, de manera equivalente,

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I_n \tag{5}$$

que establece que A^{-1} se puede obtener al multiplicar I_n sucesivamente por la izquierda por las matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$. Como cada multiplicación por la izquierda por una de estas matrices elementales efectúa una operación en los renglones, al comparar las ecuaciones (3) y (5) se concluye que *la sucesión de operaciones en los renglones que reduce A a I_n también reduce I_n a A^{-1}*. Así, se tiene el siguiente resultado:

Para determinar la inversa de una matriz invertible A, es necesario encontrar una sucesión de operaciones elementales en los renglones que reduzca A a la matriz identidad y luego efectuar esta misma sucesión de operaciones en I_n para obtener A^{-1}.

En el siguiente ejemplo se proporciona un método sencillo para llevar a cabo el procedimiento anterior.

Ejemplo 4 Encontrar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución. Se desea reducir A a la matriz identidad mediante operaciones en los renglones y aplicar simultáneamente las operaciones a I para obtener A^{-1}. Para lograr ésto, la matriz identidad se adjunta a la derecha de A, con lo que se obtiene una matriz de la forma

$$[A \mid I]$$

y luego se aplican operaciones en los renglones a esta matriz hasta que el lado izquierdo se reduce a I; estas operaciones convierten el lado derecho en A^{-1}, de modo que la matriz final es de la forma

$$[I \mid A^{-1}]$$

Los cálculos son como sigue:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se sumó -2 veces el primer renglón al segundo y -1 vez el primer renglón al tercero.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Se sumó 2 veces el segundo renglón al tercero.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

El tercer renglón se multiplicó por -1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Se sumó 3 veces el tercer renglón al segundo y -3 veces el tercer renglón al primero.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Se sumó -2 veces el segundo renglón al primero.

Así,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

A menudo no es posible saber de antemano si una matriz dada es invertible. Si una matriz A $n \times n$ no es invertible, entonces no se puede reducir a I_n por medio de operaciones elementales en los renglones [inciso (*c*) del teorema 1.5.3.] Planteado de otra forma, la forma escalonada reducida de A contiene por lo menos un renglón de ceros. Así, si el procedimiento del último ejemplo se intenta con una matriz que no es invertible, entonces en algún momento de los cálculos aparecerá un renglón de ceros en el *lado izquierdo*. Entonces es posible concluir que la matriz dada no es invertible, de modo que ya no se realizan más cálculos.

Ejemplo 5 Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el procedimiento del ejemplo 4 se obtiene

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se sumó -2 veces el primer renglón al segundo y se sumó el primer renglón al tercero.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Se sumó el segundo renglón al tercero.

Dado que en el lado izquierdo se ha obtenido un renglón de ceros, se concluye que A no es invertible. Δ

Ejemplo 6 En el ejemplo 4 se demostró que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

es una matriz invertible. Por el teorema 1.5.3 se concluye que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

sólo tiene la solución trivial. Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.5

1. De las siguientes matrices, ¿cuáles son elementales?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Encontrar una operación en los renglones que convierta la matriz elemental dada en una matriz identidad.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontrar matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 tales que
a) $E_1A = B$ b) $E_2B = A$ c) $E_3A = C$ d) $E_4C = A$

4. En el ejercicio 3, ¿es posible encontrar una matriz elemental E tal que $EB = C$? Justificar la respuesta.

En los ejercicios 5, 6 y 7, aplicar el método mostrado en los ejemplos 4 y 5 para encontrar la inversa de la matriz dada si la matriz es invertible, y comprobar la respuesta por multiplicación.

5. a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

6. a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

8. Encontrar la inversa de cada una de las siguientes matrices 4×4, donde k_1, k_2, k_3, k_4 y k son, todos, diferentes de cero.

a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

9. Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar matrices elementales E_1 y E_2 tales que $E_2E_1A = I$.
b) Escribir A^{-1} como un producto de dos matrices elementales.
c) Escribir A como un producto de dos matrices elementales.

10. En cada inciso, efectuar en

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

la operación en los renglones que se indica, multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental. En cada caso, comprobar la respuesta efectuando la operación en los renglones directamente en A.
a) Intercambiar los renglones primero y tercero.
b) Multiplicar por $\frac{1}{3}$ el segundo renglón.
c) Sumar dos veces el segundo renglón al primer renglón.

11. Expresar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

en la forma $A = EFGR$, donde E, F y G son matrices elementales y R está en forma escalonada.

12. Demostrar que si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

es una matriz elemental, entonces por lo menos un elemento en el tercer renglón debe ser igual a cero.

13. Demostrar que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

no es invertible para cualesquiera valores de los elementos.

14. Demostrar que si A es una matriz $m \times n$, entonces existe una matriz invertible C tal que CA está en forma escalonada reducida.

15. Demostrar que si A es una matriz invertible y B es equivalente por renglones a A, entonces B también es invertible.

16. a) Demostrar: Si A y B son matrices $m \times n$, entonces A y B son equivalentes por renglones si y sólo si A y B tienen la misma forma escalonada reducida.
b) Demostrar que A y B son equivalente por renglones, y encontrar una sucesión de operaciones elementales en los renglones que produzca B a partir de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

17. Demostrar el teorema 1.5.1.

1.6 OTROS RESULTADOS SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES E INVERTIBILIDAD

En esta sección se establecerán más resultados sobre sistemas de ecuaciones lineales e invertibilidad de matrices. El trabajo dará por resultado un método totalmente nuevo para resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

UN TEOREMA FUNDAMENTAL

Se empezará por demostrar un resultado fundamental sobre sistemas lineales, que ya fue anticipado en la primera sección de este libro.

Teorema 1.6.1. *Todo sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, tiene exactamente una solución o tiene infinidad de soluciones.*

Demostración. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales, entonces exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera: a) el sistema no tiene solución, b) el sistema tiene exactamente una solución, o bien, c) el sistema tiene más de una solución. La demostración estará completa si se puede demostrar que el sistema tiene infinidad de soluciones en el caso c).

Suponer que $Ax = \mathbf{b}$ tiene más de una solución, y sea $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, donde x_1 y $\mathbf{x}_2$ son dos soluciones distintas cualesquiera. Debido a que $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son distintas, entonces la matriz $\mathbf{x}_0$ es diferente de cero; además,

$$A\mathbf{x}_0 = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Si ahora se deja que k sea cualquier escalar, entonces

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0) &= A\mathbf{x}_1 + A(k\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + k(A\mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{b} + k\mathbf{0} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Pero esto establece que $\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Como $\mathbf{x}_0$ es diferente de cero y existen infinidad de elecciones para k, entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinidad de soluciones. □

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES POR INVERSIÓN DE MATRICES

Hasta el momento se han estudiado dos métodos para resolver sistemas lineales: la eliminación gaussiana y la eliminación de Gauss-Jordan. El siguiente teorema proporciona un nuevo método para resolver ciertos sistemas lineales.

Teorema 1.6.2. *Si A es una matriz invertible $n \times n$, entonces para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$, el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución; a saber,* $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Demostración. Como $A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$, se concluye que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para demostrar que esta es la única solución, se supondrá que $\mathbf{x}_0$ es una solución arbitraria y luego se demostrará que $\mathbf{x}_0$ debe ser la solución $A^{-1}\mathbf{b}$.

Si $\mathbf{x}_0$ es cualquier solución, entonces $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. Al multiplicar ambos miembros por A^{-1} se obtiene $\mathbf{x}_0 = A^{-1}\mathbf{b}$. □

Ejemplo 1 Considerar el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

En forma matricial, este sistema se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 4 de la sección precedente se demostró que A es invertible y que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Por el teorema 1.6.2, la solución del sistema es

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o bien, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$. Δ

OBSERVACIÓN. Nótese que el método de ejemplo 1 es aplicable sólo cuando el sistema tiene tantas ecuaciones como incógnitas y la matriz de coeficientes es invertible.

RESOLUCIÓN DE VARIOS SISTEMAS LINEALES CON UNA MATRIZ DE COEFICIENTES COMÚN

Frecuentemente es necesario resolver una sucesión de sistemas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \quad \ldots, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$$

cada uno de los cuales tiene la misma matriz de coeficientes A. Si A es invertible, entonces las soluciones

$$\mathbf{x}_1 = A^{-1}\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{x}_2 = A^{-1}\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{x}_3 = A^{-1}\mathbf{b}_3, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_k = A^{-1}\mathbf{b}_k$$

se pueden obtener con una inversión matricial y k multiplicaciones de matrices. Sin embargo, un método más eficaz es formar la matriz

$$[A \mid \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_k] \tag{1}$$

donde la matriz de coeficientes A es "aumentada" por todas las k matrices $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, . . . , $\mathbf{b}_k$. Al expresar (1) en forma escalonada reducida, por eliminación de Gauss-Jordan se pueden resolver a la vez todos los k sistemas. Este método tiene la ventaja de que se puede aplicar aun cuando A no sea invertible.

Ejemplo 2 Resolver los sistemas

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Solución. Los dos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes. Si esta matriz de coeficientes se aumenta con las columnas de constantes que están en los miembros derechos de tales sistemas, se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

Al expresar esta matriz en forma escalonada reducida se obtiene (comprobar)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Con base en las dos últimas columnas, se concluye que la solución del sistema a) es $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$, y que solución del sistema b) es $x_1 = 2, x_2 = 1$ y $x_3 = -1$. Δ

PROPIEDADES DE LAS MATRICES INVERTIBLES

Hasta el momento, para demostrar que una matriz A $n \times n$ es invertible ha sido necesario encontrar una matriz B $n \times n$ tal que

$$AB = I \qquad \text{y} \qquad BA = I$$

El siguiente teorema demuestra que si se obtiene una matriz B $n \times n$ que satisface *cualquier* condición, entonces la otra condición se cumple automáticamente.

> **Teorema 1.6.3.** *Sea A una matriz cuadrada.*
> *a) Si B es una matriz cuadrada que satisface* $BA = I$, *entonces* $B = A^{-1}$.
> *b) Si B es una matriz cuadrada que satisface* $AB = I$, *entonces* $B = A^{-1}$.

Se demostrará el inciso *a*), y el inciso *b*) se deja como ejercicio.

Demostración a). Suponer que $BA = I$. Si es posible probar que A es invertible, la demostración se puede completar multiplicando $BA = I$ en ambos miembros por A^{-1} para obtener

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \qquad \text{o} \qquad BI = IA^{-1} \qquad \text{o} \qquad B = A^{-1}$$

Para probar que A es invertible, basta demostrar que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial (véase el teorema 1.5.3). Sea $\mathbf{x}_0$ cualquier solución de este sistema. Si ambos miembros de $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ se multiplican por la izquierda por B, se obtiene $BA\mathbf{x}_0 = B\mathbf{0}$ o $I\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ o $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Así, el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial. □

Ahora ya es posible añadir dos proposiciones más que son equivalentes a las cuatro dadas en el teorema 1.5.3.

> **Teorema 1.6.4.** *Si A es una matriz* $n \times n$, *entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*
> *a) A es invertible.*
> *b)* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *sólo tiene la solución trivial.*
> *c) La forma escalonada reducida de A es* I_n.
> *d) A es expresable como un producto de matrices elementales.*
> *e)* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *es consistente para toda matriz* $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
> *f)* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tiene exactamente una solución para toda matriz* $\mathbf{b}$ $n \times 1$.

Demostración. Como en el teorema 1.5.3 se demostró que *a*), *b*), *c*) y *d*) son equivalentes, basta demostrar que $a \Rightarrow f \Rightarrow e \Rightarrow a$.

$a \Rightarrow f$: Este hecho ya se demostró en el teorema 1.6.2.

$f \Rightarrow e$: Esta implicación es de por sí evidente. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para toda matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.

$e \Rightarrow a$: Si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$, entonces en particular los sistemas

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

son consistentes. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ las soluciones de los sistemas respectivos, y se forma una matriz C $n \times n$ que tenga estas soluciones como columnas. Así, C es de la forma

$$C = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n]$$

Como se analizó en la sección 1.3, las columnas sucesivas del producto AC son

$$A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n$$

Así,

$$AC = [A\mathbf{x}_1 \mid A\mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Por el inciso *b*) del teorema 1.6.3 se concluye que $C = A^{-1}$. Entonces, A es invertible. □

Por el trabajo realizado antes se sabe que factores de matrices invertibles producen un producto invertible. En el siguiente teorema se considera la conversa: se demuestra que si el producto de matrices cuadradas es invertible, entonces los factores mismos deben ser invertibles.

Teorema 1.6.5. *Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. Si AB es invertible, entonces A y B también deben ser invertibles.*

Más tarde se encontrará que el siguiente problema fundamental aparece en varios contextos.

Un problema fundamental. Sea A una matriz fija $m \times n$. Encontrar todas las matrices $\mathbf{b}$ $m \times 1$ tales que el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea consistente.

Si A es una matriz invertible, el teorema 1.6.2 resuelve por completo este problema al establecer que para *toda* matriz $\mathbf{b}$ $m \times 1$ el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene la solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Si A no es cuadrada, o si A es cuadrada pero no invertible, entonces el teorema 1.6.2 no es válido. En estos casos la matriz $\mathbf{b}$ debe satisfacer ciertas condiciones a fin de que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea consistente. El siguiente ejemplo ilustra cómo se puede usar la eliminación gaussiana para determinar tales condiciones.

Ejemplo 3 ¿Qué condiciones deben satisfacer b_1, b_2 y b_3 para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

sea consistente?

Solución. La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

que se puede expresar en forma escalonada reducida como sigue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Se sumó -1 veces el primer renglón al segundo y se sumó -2 veces el primer renglón al tercero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

El segundo renglón se multiplicó por -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

El segundo renglón se sumó al tercero.

Por el tercer renglón de la matriz, ahora resulta evidente que el sistema tiene una solución si y sólo si b_1, b_2 y b_3 satisfacen la condición

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \qquad \text{o} \qquad b_3 = b_1 + b_2$$

Expresado de otra forma, esta condición es: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ es una matriz de la forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

donde b_1 y b_2 son arbitrarios. Δ

Ejemplo 4 ¿Qué condiciones deben satisfacer b_1, b_2 y b_3 para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

sea consistente?

Solución. La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Al expresar esta matriz en forma escalonada reducida se obtiene (comprobar)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

En este caso no hay restricciones sobre b_1, b_2 y b_3; es decir, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado tiene la solución única

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, \quad x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, \quad x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \tag{3}$$

para toda $\mathbf{b}$. Δ

OBSERVACIÓN. Debido a que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ del ejemplo anterior es consistente para toda $\mathbf{b}$, entonces por el teorema 1.6.4 se concluye que A es invertible. Se deja para el lector comprobar que las fórmulas en (3) también se pueden obtener calculando $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.6

En los ejercicios del 1 al 8, resolver el sistema invirtiendo la matriz de coeficientes y aplicando el teorema 1.6.2.

1. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} -x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

9. Resolver el siguiente sistema general invirtiendo la matriz de coeficientes y aplicando el teorema 1.6.2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

Usando las fórmulas resultantes, encontrar la solución si

a) $b_1 = -1, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 4$ b) $b_1 = 5, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0$ c) $b_1 = -1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 3$

10. Resolver los tres sistemas del ejercicio 9 aplicando el método del ejemplo 2.

En los ejercicios del 11 al 14, usar el método del ejemplo 2 para resolver simultáneamente los sistemas en todos los incisos.

11. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

a) $b_1 = 1, \quad b_2 = 4$
b) $b_1 = -2, \quad b_2 = 5$

12. $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

a) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0$
b) $b_1 = -3, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = -5$

13. $\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

a) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1$
b) $b_1 = -4, \quad b_2 = 6$
c) $b_1 = -1, \quad b_2 = 3$
d) $b_1 = -5, \quad b_2 = 1$

14. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$

a) $b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -1$
b) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1$
c) $b_1 = -1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 0$

15. El método del ejemplo 2 se puede usar para resolver sistemas lineales que tienen infinidad de soluciones. Usando ese método, resolver al mismo tiempo los sistemas de ambos incisos.

a) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

En los ejercicios del 16 al 19, encontrar condiciones que deben satisfacer las b para que el sistema sea consistente.

16. $$\begin{aligned} 6x_1 - 4x_2 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_1 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_1 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_1 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_1 &= b_4 \end{aligned}$$

20. Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ se puede volver a escribir como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y usar este resultado para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$.

b) Resolver $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

21. Resolver la siguiente ecuación matricial para X.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. En cada inciso, determinar si el sistema homogéneo tiene una solución no trivial (sin usar lápiz y papel); luego, establecer si la matriz dada es invertible.

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ 7x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

23. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales en n incógnitas que sólo tiene la solución trivial. Demostrar que si k es cualquier entero positivo, entonces el sistema $A^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ también tiene sólo la solución trivial.

24. Sean $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas y Q una matriz invertible n x n. Demostrar que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial si y sólo si $(QA)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.

25. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cualquier sistema de ecuaciones lineales consistente, y sea $\mathbf{x}_1$ una solución fija. Demostrar que toda solución del sistema se puede escribir en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}_0$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. También demostrar que toda matriz de esta forma es una solución.

26. Usar el inciso *a*) del teorema 1.6.3 para demostrar el inciso *b*).

1.7 MATRICES DIAGONALES, TRIANGULARES Y SIMÉTRICAS

En esta sección se considerarán ciertas clases de matrices que tienen formas especiales. Las matrices que se estudiarán en esta sección se encuentran entre las más importantes del álgebra lineal y se presentan en muchas situaciones a lo largo de este texto.

MATRICES DIAGONALES

Una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero se denomina ***matriz diagonal***; algunos ejemplos son

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Una matriz diagonal general D $n \times n$ se puede escribir como

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

Una matriz diagonal es invertible si y sólo si todos los elementos en su diagonal principal son diferentes de cero; en este caso la inversa de (1) es

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

El lector debe comprobar que $DD^{-1} = D^{-1}D = I$.

Las potencias de las matrices diagonales son fáciles de calcular; se deja para el lector comprobar que si D es la matriz diagonal (1) y k es un entero positivo, entonces

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad A^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{243} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Los productos de matrices en que aparecen factores diagonales son especialmente fáciles de calcular. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} & d_1a_{14} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} & d_2a_{24} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} & d_3a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & d_3a_{13} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & d_3a_{23} \\ d_1a_{31} & d_2a_{32} & d_3a_{33} \\ d_1a_{41} & d_2a_{42} & d_3a_{43} \end{bmatrix}$$

En palabras, *para multiplicar una matriz A por la izquierda por una matriz diagonal D, es posible multiplicar renglones sucesivos de A por los elementos diagonales sucesivos de D, y para multiplicar A por la derecha por D es posible multiplicar columnas sucesivas de A por los elementos diagonales sucesivos de D.*

MATRICES TRIANGULARES

Una matriz cuadrada en la que todos los elementos arriba de la diagonal principal son cero se denomina ***triangular inferior***, y una matriz cuadrada en la que todos los elementos abajo de la diagonal principal son cero se denomina ***triangular superior***. Una matriz que es triangular superior o triangular inferior se denomina ***triangular***.

Ejemplo 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Una matriz triangular superior general 4×4.

Una matriz triangular inferior general 4×4.

OBSERVACIÓN. Nótese que las matrices diagonales son tanto triangulares superiores como triangulares inferiores, ya que tienen ceros por abajo y por arriba de la diagonal principal. Nótese también que una matriz *cuadrada* en forma escalonada es triangular superior porque tiene ceros por abajo de la diagonal principal.

A continuación se proporcionan cuatro caracterizaciones útiles de las matrices triangulares. El lector encontrará instructivo comprobar que las matrices en el ejemplo 2 tienen las propiedades establecidas.

- Una matriz cuadrada A = [aij] es triangular superior si y sólo si el i-ésimo renglón empieza con por lo menos i − 1 ceros.
- Una matriz cuadrada A = [aij] es triangular inferior si y sólo si la j-ésima columna empieza con por lo menos j − 1 ceros.
- Una matriz cuadrada A = [aij] es triangular superior si y sólo si [aij] = 0 para i > j.
- Una matriz cuadrada A = [aij] es triangular inferior si y sólo si [aij] = 0 para i < j.

En el siguiente teorema se enumeran algunas de las propiedades básicas de las matrices triangulares.

Teorema 1.7.1.

a) *La transpuesta de una matriz triangular inferior es triangular superior, y la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior.*

b) *El producto de matrices triangulares inferiores es triangular inferior, y el producto de matrices triangulares superiores es triangular superior.*

c) *Una matriz triangular es invertible si y sólo si todos sus elementos diagonales son diferentes de cero.*

d) *La inversa de una matriz triangular inferior invertible es triangular inferior, y la inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior.*

El inciso *a*) es evidente a partir del hecho de que la trasposición de una matriz se puede efectuar reflejando los elementos con respecto a la diagonal principal; se omite la demostración formal. Se demostrará *b*), pero las demostraciones de *c*) y *d*) se pospondrán para el siguiente capítulo, donde se contará con los medios para probar los resultados de manera más eficaz.

***Demostración de b*).** Se demostrará el resultado para matrices triangulares inferiores; la demostración para matrices triangulares superiores es semejante. Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices triangulares inferiores $n \times n$, y sea $C = [c_{ij}]$ el producto $C = AB$. Por la observación que precede a este teorema, se puede probar que C es triangular inferior demostrando que $[c_{ij}] = 0$ para $i < j$. Pero por la definición de multiplicación de matrices,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Si se supone que $i < j$, entonces los términos de esta expresión se pueden agrupar como sigue:

$$c_{ij} = \underbrace{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ij-1}b_{j-1j}}_{\substack{\text{Términos en los cuales el} \\ \text{número de renglón de } b \text{ es} \\ \text{menor que el número de} \\ \text{columna de } b.}} + \underbrace{a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}}_{\substack{\text{Términos en los cuales el} \\ \text{número de renglón de } a \text{ es} \\ \text{menor que el número de} \\ \text{columna de } a.}}$$

En el primer agrupamiento, todos los factores b son cero, ya que B es triangular inferior, y en el segundo agrupamiento todos los factores a son cero, ya que A es triangular inferior. Así, $c_{ij} = 0$, que es lo que se quería demostrar. □

Ejemplo 3 Considerar las matrices triangulares superiores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A es invertible, ya que sus elementos diagonales son diferentes de cero, pero la matriz B no lo es. Se deja para el lector calcular la inversa de A aplicando el método de la sección 1.5 y demostrar que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Esta inversa es triangular superior, como garantiza el inciso *d*) del teorema 1.7.1. También se deja para el lector comprobar que el producto AB es

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Este producto es triangular superior, como garantiza el inciso *b*) del teorema 1.7.1. Δ

MATRICES SIMÉTRICAS

Una matriz cuadrada A es ***simétrica*** si $A = A^T$.

Ejemplo 4 Las siguientes matrices son simétricas, ya que cada una es igual a su propia transpuesta (comprobar).

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Es fácil reconocer las matrices simétricas por inspección: Los elementos de la diagonal principal pueden ser cualesquiera, pero las "imágenes especulares" de los otros elementos de la matriz con respecto a la diagonal principal deben ser iguales (figura 1).

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Figura 1

Este hecho se concluye porque la transposición de una matriz cuadrada se puede efectuar al intercambiar los elementos que son simétricos con respecto a la diagonal principal. Expresado en términos de los elementos individuales, una matriz $A = [a_{ij}]$ es simétrica si y sólo si $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ para todos los valores de i y j. Como se ilustra en el ejemplo 4, todas las matrices diagonales son simétricas.

En el siguiente teorema se enumeran las propiedades algebraicas más importantes de las matrices simétricas. Las demostraciones son consecuencias directas del teorema 1.4.9 y se dejan como ejercicios.

Teorema 1.7.2. Si A y B son matrices simétricas del mismo tamaño y si k es cualquier escalar, entonces:
a) A^T *es simétrica.*
b) $A + B$ *y* $A - B$ *son simétricas.*
c) kA *es simétrica.*

OBSERVACIÓN. En general, no es cierto que el producto de matrices simétricas es simétrico. Para ver esto, sean A y B matrices simétricas del mismo tamaño. Entonces por el inciso *d*) del teorema 1.4.9 y por la simetría se tiene

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

Como AB y BA suelen ser diferentes, se concluye que en términos generales AB no es simétrico. Sin embargo, en el caso especial en que $AB = BA$, el producto AB es simétrico. Si A y B son matrices tales que $AB = BA$, entonces se dice que A y B ***conmutan***. En resumen: *el producto de dos matrices simétricas es simétrico si y sólo si las matrices conmutan.*

Ejemplo 5 En la primera de las siguientes ecuaciones se muestra un producto de matrices simétricas que *no* es simétrico, y en la segunda se observa un producto de matrices simétricas que *sí* es simétrico. Se concluye que los factores de la primera ecuación no conmutan, pero que los de la segunda sí lo hacen. Se deja para el lector comprobar ambos hechos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

En general, una matriz simétrica no necesariamente es invertible; por ejemplo, una matriz cuadrada cero es simétrica, pero no invertible. Sin embargo, si una matriz simétrica es invertible, entonces su inversa también es simétrica.

Teorema 1.7.3. *Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es simétrica.*

Demostración. Suponer que A es simétrica e invertible. Por el teorema 1.4.10 y el hecho de que $A = A^T$, se tiene

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

lo que demuestra que A^{-1} es simétrica. □

MATRICES DE LA FORMA AA^T Y A^TA

Los productos matriciales de la forma AA^T y A^TA se presentan en varias aplicaciones. Si A es una matriz $m \times n$, entonces A^T es una matriz $n \times m$, de modo que los dos productos AA^T y A^TA son matrices cuadradas; la matriz AA^T es de tamaño $m \times m$ y la matriz A^TA es de tamaño $n \times n$. Estos productos siempre son simétricos porque

$$(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T \qquad \text{y} \qquad (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

Ejemplo 6 Sea A la matriz 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Observar que A^TA y AA^T son simétricas, como era de esperarse. Δ

Más tarde en este texto se obtendrán condiciones generales para A bajo las cuales AA^T y A^TA son invertibles. Sin embargo, para el caso especial en que A es *cuadrada*, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.7.4. *Si A es una matriz invertible, entonces AA^T y A^TA también son invertibles.*

Demostración. Como A es invertible, entonces por el teorema 1.4.10 también lo es A^T. Así, AA^T y A^TA son invertibles, ya que son el producto de matrices invertibles.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.7

1. Determinar si la matriz es invertible; en caso afirmativo, encontrar la inversa por inspección.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2. Calcular el producto por inspección.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Encontrar A, A^2 y A^{-k} por inspección.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

4. ¿Cuáles de las siguientes matrices son simétricas?

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Por inspección, determinar si la matriz triangular dada es invertible.

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

6. Encontrar todos los valores de a, b y c para los cuales A es simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a - 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & 5 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

7. Encontrar todos los valores de a, b y c para los cuales A y B, ambas, no son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} a + b - 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2a - 3b - 7 \end{bmatrix}$$

8. Aplicar la ecuación dada para determinar por inspección si las matrices de la izquierda conmutan.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

9. Demostrar que A y B conmutan si $a - d = 7b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

10. Encontrar una matriz diagonal A que cumpla

a) $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. a) Factorizar A en la forma $A = BD$, donde D es una matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 3a_{11} & 5a_{12} & 7a_{13} \\ 3a_{21} & 5a_{22} & 7a_{23} \\ 3a_{31} & 5a_{32} & 7a_{33} \end{bmatrix}$$

b) La factorización efectuada, ¿es la única posible? Explicar la respuesta.

12. Comprobar el teorema 1.7.1*b* para el producto AB, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

13. Comprobar el teorema 1.7.1*d* para las matrices A y B del ejercicio 12.

14. Comprobar el teorema 1.7.3 para la matriz dada A.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

15. Sea A una matriz simétrica.
a) Demostrar que A^2 es simétrica.
b) Demostrar que $2A^2 - 3A + I$ es simétrica.

16. Sea A una matriz simétrica.
a) Demostrar que A^k es simétrica si k es cualquier entero no negativo.
b) Si $p(x)$ es un polinomio, ¿es necesariamente simétrico $p(A)$? Explicar la respuesta.

17. Sea A una matriz triangular superior y sea $p(x)$ un polinomio. ¿$p(A)$ es necesariamente triangular superior? Explicar la respuesta.

18. Demostrar: Si $A^TA = A$, entonces A es simétrica y $A = A^2$.

19. ¿Cuál es el número máximo de elementos distintos que puede contener una matriz simétrica de $n \times n$?

20. Sea $A = a_{ij}$ una matriz $n \times n$. Determinar si A es simétrica.

a) $a_{ij} = i^2 + j^2$ b) $a_{ij} = i^2 - j^2$
c) $a_{ij} = 2i + 2j$ d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

21. Con base en la experiencia adquirida en el ejercicio 20, instrumentar una prueba general que se pueda aplicar a una fórmula para a_{ij} a fin de determinar si $A = a_{ij}$ es simétrica.

22. Una matriz cuadrada A se denomina ***antisimétrica*** si $A^T = -A$. Demostrar lo siguiente:

a) Si A es una matriz antisimétrica invertible, entonces A^{-1} es antisimétrica.

b) Si A y B son antisimétricas, entonces también lo son A^T, $A + B$, $A -+ B$ y kA para cualquier escalar k.

c) Toda matriz cuadrada se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

23. En el texto se demostró que el producto de matrices simétricas es simétrico si y sólo si las matrices conmutan. El producto de matrices antisimétricas que conmutan, ¿es antisimétrico? Explicar la respuesta.

24. Si la matriz A $n \times n$ se puede expresar como $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior, entonces el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede expresar como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y se puede resolver en dos pasos:

Paso 1. Sea $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, de modo que $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede expresar como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Resolver este sistema.

Paso 2. Resolver el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para $\mathbf{x}$.

En cada inciso, aplicar el método anterior de dos pasos para resolver el sistema dado.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS 1.7

1. Usar eliminación de Gauss-Jordan para resolver para x' y y' en términos de x y y.

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$$
$$y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

2. Usar eliminación de Gauss-Jordan para resolver para x' y y' en términos de x y y.

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

3. Encontrar un sistema lineal homogéneo con dos ecuaciones que no sean múltiplos entre sí y tales que

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2$$

y

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -1$$

sean soluciones del sistema.

4. Una caja contiene en total 13 monedas distintas de 1, 5 y 10 centavos, cuyo valor total es de 83 centavos. ¿Cuántas monedas de cada denominación hay en la caja?

5. Encontrar enteros positivos que cumplan

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ x + 5y + 10z &= 44 \end{aligned}$$

6. ¿Para qué valor(es) de a el siguiente sistema no tiene solución, tiene exactamente una solución y tiene una infinidad de soluciones?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 &= 2 \\ (a^2 - 4)x_3 &= a - 2 \end{aligned}$$

7. Sea

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

la matriz aumentada de un sistema lineal. ¿Para qué valores de a y b el sistema

a) tiene una solución única?
b) tiene una solución de un parámetro?
c) tiene una solución de dos parámetros?
d) no tiene solución?

8. Resolver para x, y y z.

$$\begin{aligned} xy - 2\sqrt{y} + 3zy &= 8 \\ 2xy - 3\sqrt{y} + 2zy &= 7 \\ -xy + \sqrt{y} + 2zy &= 4 \end{aligned}$$

9. Encontrar una matriz K tal que $AKB = C$ dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. ¿Cómo se debe elegir los coeficientes a, b y c de modo que el sistema

$$\begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned}$$

tenga la solución $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$?

11. En cada inciso, resolver la ecuación matricial para X.

a) $X\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $X\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

12. a) Expresar las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 &= 3x_1 + x_2 - 4x_3 \\ y_3 &= -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} z_1 &= 4y_1 - y_2 + y_3 \\ z_2 &= -3y_1 + 5y_2 - y_3 \end{aligned}$$

en las formas matriciales $Y = AX$ y $Z = BY$. Luego, usar estas formas para obtener una relación directa $Z = CX$ entre Z y X.

b) Usar la ecuación $Z = CX$ obtenida en el inciso a) para expresar z_1 y z_2 en términos de x_1, x_2 y x_3.

c) Comprobar el resultado del inciso b) sustituyendo directamente las ecuaciones para y_1, y_2 y y_3 en las ecuaciones para z_1 y z_2 y luego simplificando.

13. Si A es $m \times n$ y B es $n \times p$, ¿cuántas operaciones de multiplicación y cuántas operaciones de adición son necesarias para calcular el producto matricial AB?

14. Sea A una matriz cuadrada.

a) Demostrar que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ si $A^4 = 0$.
b) Demostrar que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ si $A^{n+1} = 0$.

15. Encontrar valores de a, b y c de modo que la gráfica del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(1, 2)$, $(-1, 6)$ y $(2, 3)$.

16. ***(Para lectores que ya estudiaron Cálculo.)*** Encontrar valores de a, b y c de modo que la gráfica del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $(-1, 0)$ y tenga una tangente horizontal en $(2, -9)$.

17. Sea J_n la matriz $n \times n$ integrada completamente por elementos iguales 1. Demostrar que

$$(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n$$

18. Demostrar que si una matriz cuadrada A satisface $A^3 + 4A^2 - 2A + 7I$, entonces también A^T cumple esta ecuación.

19. Demostrar: Si B es invertible, entonces $AB^{-1} = B^{-1}A$ si y sólo si $AB = BA$.

20. Demostrar: Si A es invertible, entonces ambas $A + B$ e $I + BA^{-1}$ son invertibles o ambas no son invertibles.

21. Demostrar que si A y B son matrices $n \times n$, entonces

a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ b) $\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A)$ c) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$ d) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

22. Usar el ejercicio 21 para demostrar que no existen matrices cuadradas A y B tales que $AB - BA = I$.

23. Demostrar: Si A es una matriz $m \times n$ y B es la matriz $n \times 1$ integrada completamente por elementos iguales a $1/n$, entonces

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$$

donde $\bar{r}_i$ es la media de los elementos en el i-ésimo renglón de A.

24. ***(Para lectores que ya estudiaron Cálculo.)*** Si los elementos de la matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) & \cdots & c_{1n}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) & \cdots & c_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(x) & c_{m2}(x) & \cdots & c_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

son funciones diferenciables de x, entonces se define

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) & \cdots & c'_{1n}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) & \cdots & c'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c'_{m1}(x) & c'_{m2}(x) & \cdots & c'_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Demostrar que si los elementos de A y B son funciones diferenciables de x y los tamaños de las matrices son tales que es posible ejecutar las operaciones indicadas, entonces

a) $\dfrac{d}{dx}(kA) = k\dfrac{dA}{dx}$ (b) $\dfrac{d}{dx}(A + B) = \dfrac{dA}{dx} + \dfrac{dB}{dx}$ (c) $\dfrac{d}{dx}(AB) = \dfrac{dA}{dx}B + A\dfrac{dB}{dx}$

25. ***(Para lectores que ya estudiaron Cálculo.)*** Usar el inciso c) del ejercicio 24 para demostrar que

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

Escribir todas las hipótesis establecidas para obtener esta fórmula.

26. Encontrar los valores de A, B y C que hacen la ecuación

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{3x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

una identidad. [***Sugerencia.*** Multiplicar todo por $(3x - 1)(x^2 + 1)$ e igualar los coeficientes correspondientes de los polinomios en cada miembro de la ecuación resultante].

27. Si P es una matriz $n \times 1$ tal que $P^TP = 1$, entonces $H = I - 2PP^T$ se denomina ***matriz de Householder*** correspondiente (en honor del matemático estadunidense A. S. Householder).

a) Comprobar que $P^TP = 1$ si $P^T = 3/4 \;\; 1/6 \;\; 1/4 \;\; 5/12 \;\; 5/12$ y calcular la matriz de Householder correspondiente.

b) Demostrar que si H es cualquier matriz de Householder, entonces $H = H^T$ y $H^TH = I$.
c) Demostrar que la matriz de Householder determinada en el inciso a) satisface las condiciones demostradas en el inciso b).

28. Suponiendo que las inversas indicadas existen, demostrar las siguientes igualdades.

(a) $(C^{-1} + D^{-1})^{-1} = C(C + D)^{-1}D$ (b) $(I + CD)^{-1}C = C(I + DC)^{-1}$
(c) $(C + DD^T)^{-1}D = C^{-1}D(I + D^TC^{-1}D)^{-1}$

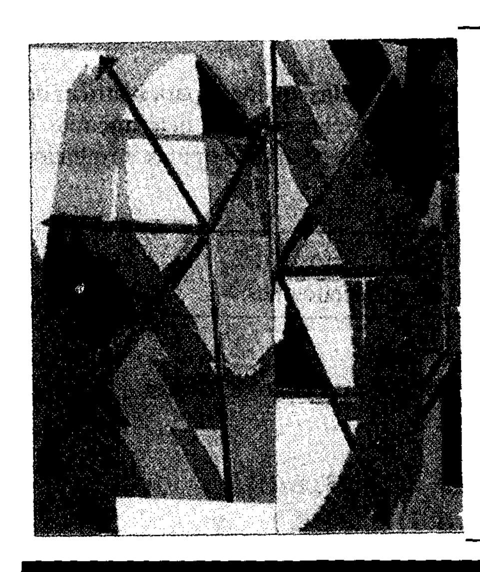
29. a) Demostrar que si $a \neq b$, entonces

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

b) Usar el resultado del inciso a) para encontrar

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}$$

[***Nota.*** Este ejercicio se basa en un problema de John M. Johnson, *The Mathematics Teacher*, Vol. 85, No. 9, 1992.]



CAPÍTULO 2

DETERMINANTES

2.1 LA FUNCIÓN DETERMINANTE

El lector está familiarizado con funciones como $f(x)$ = sen x y $f(x) = x^2$, que asocian un número real $f(x)$ a un valor real de la variable x. Como x y $f(x)$ asumen sólo valores reales, tales funciones se describen como "funciones con valores reales de una variable real". En esta sección se estudiará la ***función determinante****, que es una "función con valores reales de una variable matricial" en el sentido de que asocia un número real $f(X)$ con una matriz X. El trabajo que se efectuará sobre funciones determinantes tendrá importantes aplicaciones en la teoría de sistemas de ecuaciones lineales y también conducirá a una fórmula explícita para calcular la inversa de una matriz invertible.*

De acuerdo con el teorema 1.4.5, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es invertible si $ad - bc \neq 0$. La expresión $ad - bc$ aparece con tanta frecuencia en matemáticas que tiene un nombre; se llama *determinante* de la matriz A 2×2, y se denota por el símbolo $\det(A)$. Con esta notación, la inversa de A se puede expresar como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Uno de los objetivos de este capítulo es obtener fórmulas análogas para matrices de orden superior. Esto requerirá que se amplíe el concepto de determinante a matrices de orden superior. Para este fin serán necesarios algunos resultados preliminares sobre permutaciones.

PERMUTACIONES

Definición. Una ***permutación*** del conjunto de enteros $\{1, 2, \ldots, n\}$ es un arreglo de éstos en algún orden sin omisiones ni repeticiones.

Ejemplo 1 Existen seis permutaciones diferentes del conjunto de enteros $\{1, 2, 3\}$, que son

$$\begin{array}{ccc} (1, 2, 3) & (2, 1, 3) & (3, 1, 2) \\ (1, 3, 2) & (2, 3, 1) & (3, 2, 1) \end{array} \quad \Delta$$

Un método conveniente para enumerar sistemáticamente las permutaciones es por medio de un *árbol de permutaciones*. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Enumerar todas las permutaciones del conjunto de enteros $\{1, 2, 3, 4\}$.

Solución. Considerar la figura 1. Los cuatro puntos identificados por 1, 2, 3, 4 en la parte superior de la figura representan las elecciones posibles para el primer número de la permutación. Las tres ramas que salen de cada uno de estos puntos representan las posibilidades para elegir la segunda posición en la permutación. Entonces, si la permutación empieza como $(2, -, -, -)$, las tres posibilidades para la segunda posición son 1, 3 y 4. Las dos ramas que salen de cada punto en la segunda posición representan las elecciones posibles para la tercera posición. Así, si la permutación empieza como $(2, 3, -, -)$, las dos elecciones posibles para la tercera posición son 1 y 4. Por último, la rama que sale de cada punto en la tercera posición representa la única elección posible para la cuarta posición. Entonces, si la permutación para la cuarta posición empieza como $(2, 3, 4, -)$, la única elección para la cuarta posición es 1. Ahora es posible enumerar las distintas permutaciones siguiendo todas las trayectorias posibles a lo largo del "árbol", desde la primera posición hasta la última. Por medio de este proceso se obtiene la siguiente lista.

$$\begin{array}{cccc} (1, 2, 3, 4) & (2, 1, 3, 4) & (3, 1, 2, 4) & (4, 1, 2, 3) \\ (1, 2, 4, 3) & (2, 1, 4, 3) & (3, 1, 4, 2) & (4, 1, 3, 2) \\ (1, 3, 2, 4) & (2, 3, 1, 4) & (3, 2, 1, 4) & (4, 2, 1, 3) \\ (1, 3, 4, 2) & (2, 3, 4, 1) & (3, 2, 4, 1) & (4, 2, 3, 1) \\ (1, 4, 2, 3) & (2, 4, 1, 3) & (3, 4, 1, 2) & (4, 3, 1, 2) \\ (1, 4, 3, 2) & (2, 4, 3, 1) & (3, 4, 2, 1) & (4, 3, 2, 1) \end{array} \quad \Delta$$

A partir de este ejemplo se observa que existen 24 permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Si se hubiera razonado como sigue, este resultado hubiera podido anticiparse sin necesidad de enumerar realmente las permutaciones. Como la primera posición puede ocuparse de cuatro formas y luego la segunda posición puede ocuparse de tres formas, hay $4 \cdot 3$ formas para ocupar las dos primeras posiciones. Como la tercera posición se puede ocupar entonces en dos formas, existen $4 \cdot 3 \cdot 2$ formas para ocupar las tres primeras posiciones. Finalmente, como la última posición se puede ocupar de una sola forma, existen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas de ocupar las cuatro posiciones. En general, el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tiene $n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ permutaciones diferentes.

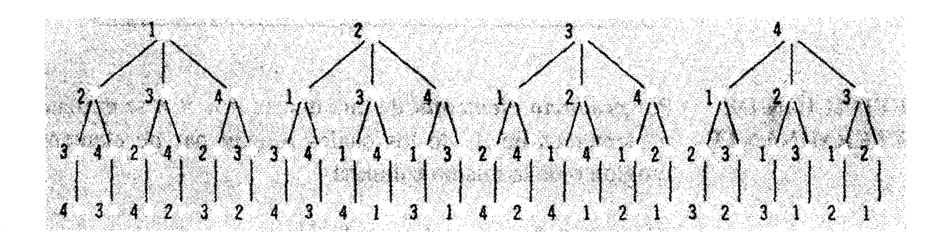


Figura 1

Para denotar una permutación general del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, se escribirá $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Aquí, j_1 es el primer entero en la permutación, j_2 es el segundo, y así sucesivamente. Se dice que en una permutación $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ocurre una ***inversión*** siempre que un entero mayor precede a uno menor. El número total de inversiones que ocurren en una permutación puede obtenerse como sigue: (1) encontrar el número de enteros que son menores que j_1 y que están después de j_1 en la permutación; (2) encontrar el número de enteros que son menores que j_2 y que están después de j_2 en la permutación. Continuar este proceso de conteo para $j_3, \ldots, j_{n-1}$. La suma de estos números es el número total de inversiones que hay en la permutación.

Ejemplo 3 Determinar el número de inversiones que hay en las siguientes permutaciones:

a) (6, 1, 3, 4, 5, 2) b)(2, 4, 1, 3) c) (1, 2, 3, 4)

Solución.

a) El número de inversiones es $5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$.
b) El número de inversiones es $1 + 2 + 0 = 3$.
c) En esta permutación no hay inversiones. Δ

Definición. Se dice que una permutación es ***par*** si el número total de inversiones es un entero par, y es ***impar*** si el número total de inversiones es un entero impar.

Ejemplo 4 En la tabla siguiente, cada una de las permutaciones de $\{1, 2, 3\}$ se clasifica como par o impar.

Permutación	Número de inversiones	Clasificación
(1, 2, 3)	0	par
(1, 3, 2)	1	impar
(2, 1, 3)	1	impar
(2, 3, 1)	2	par
(3, 1, 2)	2	par
(3, 2, 1)	3	impar

DEFINICIÓN DE DETERMINANTE

Por ***producto elemental*** de una matriz A $n \times n$ se entiende cualquier producto de n elementos de A, de los cuales ningún par de elementos proviene del mismo renglón o de la misma columna.

Ejemplo 5 Enumerar los productos elementales de las matrices

$$\text{a)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Solución de a). Como cada producto elemental tiene dos factores y cada factor proviene de un renglón diferente, entonces un producto elemental se puede escribir en la forma

$$a_{1_}a_{2_}$$

donde los espacios en blanco indican números de columna. Como ninguna pareja de factores en el producto proviene de la misma columna, entonces los números de columna deben ser $\underline{1}\ \underline{2}$ o $\underline{2}\ \underline{1}$. Así, los únicos productos elementales son $a_{11}a_{22}$ y $a_{12}a_{21}$.

Solución de b). Como cada producto elemental tiene tres factores, cada uno de los cuales proviene de un renglón diferente, entonces un producto elemental se puede escribir en la forma

$$a_{1_}a_{2_}a_{3_}$$

Como ninguna pareja de factores en el producto proviene de la misma columna, entonces los números de columna no tienen repeticiones; en consecuencia, deben formar una permutación del conjunto $\{1, 2, 3\}$. Estas $3! = 6$ permutaciones producen la siguiente lista de productos elementales.

$a_{11}a_{22}a_{33}$ $a_{12}a_{21}a_{33}$ $a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$ $a_{12}a_{23}a_{31}$ $a_{13}a_{22}a_{31}$ Δ

Como indica este ejemplo, una matriz A de $n \times n$ tiene $n!$ productos elementales. Son los productos de la forma $a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, donde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ Por un ***producto elemental con signo de A*** se entenderá un producto elemental $a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ multiplicado por $+1$ o por -1. Si $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es una permutación par se usa el signo +, y si $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es una permutación impar, se usa el signo −.

Ejemplo 6 Enumerar todos los productos elementales con signo de las matrices

$$\text{a)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Solución.

a)

Producto elemental	Permutación asociada	Par o impar	Producto elemental con signo
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	par	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	impar	$-a_{12}a_{21}$

b)

Producto elemental	Permutación asociada	Par o impar	Producto elemental con signo
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	par	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	impar	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	impar	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	par	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	par	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	impar	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Ahora ya es posible definir la función determinante.

Definición. Sea A una matriz cuadrada. La ***función determinante*** se denota por ***det***, y $\det(A)$ se define como la suma de los productos elementales con signo de A. El número $\det(A)$ se denomina ***determinante de A***.

EVALUACIÓN DE DETERMINANTES 2 × 2 Y 3 × 3

Ejemplo 7 Con referencia al ejemplo 6, se obtiene

a) $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ Δ

Para no tener que memorizar estas expresiones difíciles de manejar, se sugiere usar técnicas mnemónicas que se describen en la figura 2. La primera fórmula del ejemplo 7 se obtiene de la figura 2*a* al multiplicar los elementos de la flecha hacia la derecha y restar el producto de los elementos de la flecha hacia la izquierda. La segunda fórmula del ejemplo 7 se obtiene escribiendo de nuevo las columnas primera y segunda como se muestra en la figura 2*b*. Luego, el determinante se calcula sumando los productos de las flechas hacia la derecha y restando del resultado la suma de los productos de las flechas hacia la izquierda.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Figura 2 *a*) *b*)

Ejemplo 8 Evaluar los determinantes de

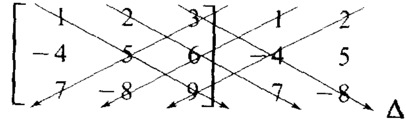
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución. Con el método de la figura 2*a* se obtiene

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

El método de la figura 2*b* produce

$$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$



Advertencia. Se recalca que los métodos que se muestran en la figura 2 no funcionan para determinantes de matrices 4 × 4 o superiores.

La evaluación directa de determinantes a partir de la definición conduce a dificultades de cómputo. En efecto, la evaluación directa de un determinante 4×4 podría incluiría el cálculo de $4! = 24$ productos elementales con signo, y un determinante 10×10 incluiría el cálculo de $10! = 3\ 628\ 800$ productos elementales con signo. Aplicando este método, inclusive la computadora digital más rápida es incapaz de manejar en una cantidad razonable de tiempo el cálculo de un determinante 25×25. Por consiguiente, gran parte del resto del capítulo se dedica al desarrollo de propiedades de determinantes, que simplificarán la evaluación de éstos.

COMENTARIOS SOBRE LA NOTACIÓN Y LA TERMINOLOGÍA

Esta sección concluye con algunos comentarios sobre la terminología y la notación. Primero, se observa que el símbolo A es otra notación para $\det(A)$. Por ejemplo, el determinante de una matriz de 3×3 se puede escribir como

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Con la última notación, el determinante de la matriz A del ejemplo 8 se escribiría como

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

OBSERVACIÓN. En términos concretos, el determinante de una matriz es un número. Sin embargo, se acostumbra "abusar" ligeramente de la terminología y usar èl término "determinante" para referirse a la *matriz* cuyo determinante está siendo calculado. Así,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

se podría identificar como un determinante 2×2 y denominar 3 al elemento que está en primer renglón y en la primera columna del determinante.

Por último, se observa que el determinante de A a menudo se escribe simbólicamente como

$$\boxed{\det(A) = \sum \pm a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}} \qquad (1)$$

donde $\sum$ indica que los términos deben sumarse sobre todas las permutaciones $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ y los signos + o − se eligen en cada término según si la permutación es par o impar. Esta notación es útil cuando es necesario recalcar la definición de un determinante.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.1

1. Encontrar el número de inversiones que hay en cada una de las siguientes permutaciones de 1, 2, 3, 4, 5 .
a) (4 1 3 5 2). b) (5 3 4 2 1). c) (3 2 5 4 1). d) (5 4 3 2 1). e) (1 2 3 4 5). f) (1 4 2 3 5).

2. Clasificar cada una de las permutaciones del ejercicio 1 como par o impar.

En los ejercicios del 3 al 12, evaluar el determinante.

3. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ **11.** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ **12.** $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$

13. Encontrar todos los valores de λ para los cuales $\det(A) = 0$.

a) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

14. Clasificar cada una de las permutaciones de $\{1, 2, 3, 4\}$ como par o impar.

15. Usar los resultados del ejercicio 14 para obtener una fórmula del determinante de una matriz 4×4.

16. Usar la fórmula obtenida en el ejercicio 15 para evaluar

$$\begin{vmatrix} 4 & -9 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

17. Usar la definición de determinante para evaluar

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

18. Resolver para x.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

19. Demostrar que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta-\cos\theta & \operatorname{sen}\theta+\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

no depende de θ.

20. Demostrar que si una matriz cuadrada A tiene un renglón o una columna de ceros, entonces $\det(A) = 0$.

21. Demostrar que las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

conmutan si y sólo si

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

2.2 EVALUACIÓN DE DETERMINANTES POR REDUCCIÓN DE RENGLONES

En esta sección se mostrará que el determinante de una matriz se puede evaluar expresando si se reduce la matriz a la forma escalonada. Este método es importante, ya que evita los extensos cálculos que se presentan cuando se usa la definición de determinante.

UN TEOREMA BÁSICO

Se empezará con un teorema fundamental sobre determinantes.

Teorema 2.2.1. *Sea A una matriz cuadrada.*
a) Si A tiene un renglón de ceros o una columna de ceros, entonces det(A) = 0.
b) det(A) = det(A^T).

Demostración de a). Como todo producto elemental con signo de A tiene un factor de cada renglón y un factor de cada columna, entonces todo producto elemental con signo tiene necesariamente un factor de un renglón cero o de una columna cero. En estos casos, todo producto elemental con signo es cero, y $\det(A)$, que es la suma de los productos elementales con signo, es cero. □

Se omite la demostración del inciso *b*), pero se recuerda que un producto elemental tiene un factor de cada renglón y un factor de cada columna, de modo que es evidente que A y A^T tienen exactamente el mismo conjunto de productos elementales. Mediante algunos teoremas sobre permutaciones, cuyo análisis llevaría demasiado lejos, se puede demostrar que en realidad A y A^T tienen el mismo conjunto de productos elementales *con signo*. Esto significa que $\det(A) = \det(A^T)$.

OBSERVACIÓN. Debido al teorema 2.2.1*b*, casi todos los teoremas sobre determinantes que contienen la palabra "renglón" en su enunciación también son

verdaderos cuando en vez de "renglón" se escribe la palabra "columna". Para demostrar una proposición sobre columnas, basta transponer la matriz en cuestión para convertir la proposición sobre columnas en una proposición sobre renglones, y luego aplicar los resultados conocidos sobre renglones.

DETERMINANTES DE MATRICES TRIANGULARES

El siguiente teorema facilita la evaluación del determinante de una matriz triangular, sin importar su tamaño.

Teorema 2.2.2. *Si A es una matriz triangular $n \times n$ (triangular superior, triangular inferior o diagonal), entonces $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal principal; es decir, $\det(A) = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$.*

A fin de facilitar la notación, se demostrará el resultado para una matriz triangular inferior 4×4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

El razonamiento en el caso general $n \times n$ es semejante. Para matrices triangulares superiores se puede obtener una demostración aplicando el teorema 2.2.1*b* y observando que la transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior con los mismos elementos en la diagonal.

Demostración del teorema 2.2.2 (*Caso de una matriz triangular inferior de* 4×4). El único producto elemental de A que puede ser diferente de cero es $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. Para ver que así es, considerar un producto elemental representativo $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$. Como $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$, se debe tener $j_1 = 1$ a fin de tener un producto elemental diferente de cero. Si $j_1 = 1$, se debe cumplir que $j_2 \neq 1$, ya que ninguna pareja de factores comunes proviene de la misma columna. Además, como $a_{23} = a_{24} = 0$, se debe tener $j_2 = 2$ a fin de que el producto elemental sea diferente de cero. Prosiguiendo de esta manera se obtiene $j_3 = 3$ y $j_4 = 4$. Como $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ se multiplica por $+1$ al formar el producto elemental con signo, se obtiene

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \quad \square$$

Ejemplo 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296 \quad \Delta$$

EFECTO DE LAS OPERACIONES

El siguiente teorema muestra cómo una operación elemental en los renglones de una matriz afecta el valor de su determinante.

ELEMENTALES EN LOS RENGLONES SOBRE UN DETERMINANTE

> **Teorema 2.2.3.** *Sea A una matriz $n \times n$.*
>
> *a) Si B es la matriz que se obtiene cuando un solo renglón o una sola columna de A se multiplica por un escalar k, entonces $\det(B) = k\det(A)$.*
> *b) Si B es la matriz que se obtiene cuando se intercambian dos renglones o dos columnas de A, entonces $\det(B) = -\det(A)$.*
> *c) Si B es la matriz que se obtiene cuando un múltiplo de un renglón de A se suma a otro renglón o cuando un múltiplo de una columna se suma a otra columna, entonces $\det(B) = \det(A)$.*

Una demostración de este teorema se puede obtener usando la fórmula (1) de la sección 2.1 para calcular los determinantes que aparecen y comprobando después las igualdades. Se omite la demostración, aunque se proporciona el siguiente ejemplo que ilustra el teorema para determinantes 3×3.

Ejemplo 2

Relación	Operación
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$	El primer renglón de A se multiplica por k.
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	Los renglones primero y segundo de A se intercambian.
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	Un múltiplo del segundo renglón de A se suma al primer renglón.

Se comprobará la ecuación del último renglón de la tabla; las dos primeras se dejan para el lector. Con auxilio del ejemplo 7 de la sección 2.1 se obtiene

$$\begin{aligned}\det(B) &= (a_{11}+ka_{21})a_{22}a_{33} + (a_{12}+ka_{22})a_{23}a_{31} + (a_{13}+ka_{23})a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}(a_{13}+ka_{23}) - a_{33}a_{21}(a_{12}+ka_{22}) - a_{32}a_{23}(a_{11}+ka_{21}) \\ &= \det(A) + k(a_{21}a_{22}a_{33} + a_{22}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{31}a_{22}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{21}) \\ &= \det(A) + 0 = \det(A) \quad \Delta\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Como se observa en la primera ecuación del ejemplo 2, el inciso *a*) del teorema 2.2.3 permite sacar del determinante un "factor común" de cualquier renglón (o columna).

DETERMINANTES DE MATRICES ELEMENTALES

Recordar que una matriz elemental se obtiene cuando se efectúa una sola operación elemental en los renglones de una matriz identidad; así, si en el teorema 2.2.3 se hace que $A = I_n$, de modo que se tiene $\det(A) = \det(I_n) = 1$, entonces la matriz B es una matriz elemental y el teorema conduce al siguiente resultado sobre determinantes de matrices elementales.

> **Teorema 2.2.4.** *Sea E una matriz elemental n × n.*
> *a) Si E se obtiene al multiplicar por k un renglón de In, entonces det(E) = k.*
> *b) Si E se obtiene al intercambiar dos renglones de In, entonces det(E) = −1.*
> *c) Si E se obtiene al sumar un múltiplo de un renglón de In a otro renglón, entonces det(E) = 1.*

Ejemplo 3 Los siguientes determinantes de matrices elementales, que se evalúan por inspección, ilustran el teorema 2.2.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta$$

El segundo renglón de I_4 se multiplicó por 3.

Se intercambiaron los renglones primero y último de I_4.

El último renglón de I_4 se sumó 7 veces al primer renglón.

DETERMINANTES CON RENGLONES O COLUMNAS PROPORCIONALES

Si una matriz cuadrada A tiene dos renglones proporcionales, entonces se puede introducir un renglón de ceros sumando un múltiplo adecuado de uno de los renglones a otro renglón. Lo mismo es cierto para columnas. Pero sumar un múltiplo de un renglón o una columna a otro renglón o a otra columna no cambia el determinante, de modo que por el teorema 2.2.1*a* se debe cumplir que $\det(A) = 0$. Esto demuestra el siguiente teorema.

> **Teorema 2.2.5.** *Si A es una matriz cuadrada con dos renglones o dos columnas proporcionales, entonces det(A) = 0.*

Ejemplo 4 El siguiente cálculo ilustra la introducción de un renglón de ceros cuando hay dos renglones proporcionales:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

El segundo renglón es dos veces el primero, de modo que se sumó −2 veces el primer renglón al segundo para introducir un renglón de ceros.

Cada una de las siguientes matrices tiene dos renglones o dos columnas proporcionales; así, por inspección, el determinante de cada una es cero.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

EVALUACIÓN DE DETERMINANTES POR REDUCCIÓN DE RENGLONES

A continuación se proporcionará un método para evaluar determinantes, el cual requiere sustancialmente menos cálculos que la aplicación directa de la definición de determinante. La idea del método es reducir la matriz dada a la forma triangular superior mediante operaciones elementales en los renglones; luego, calcular el determinante de la matriz triangular superior (lo que es fácil), y, finalmente, relacionar el determinante de ésta con el determinante de la matriz original. A continuación de presenta un ejemplo.

Ejemplo 5 Evaluar det(A), donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. A se reducirá a la forma escalonada (que es triangular superior) y se aplicará el teorema 2.2.3:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Se intercambiaron los renglones primero y segundo de A.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Se obtuvo un factor común 3 en el primer renglón tomando en cuanta el signo del determinante.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

Se sumó -2 veces el primer renglón al tercer renglón.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

Se sumó -10 veces el segundo renglón al tercer renglón.

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Se obtuvo un factor común -55 en el último renglón considerando el signo del determinante.

$$= (-3)(-55)(1) = 165 \quad \Delta$$

OBSERVACIÓN. El método de reducción de renglones se ajusta bien a la evaluación de determinantes por computadora, ya que es sistemático y se puede programar fácilmente. Sin embargo, en secciones ulteriores se desarrollarán métodos que a menudo facilitan los cálculos manuales.

Ejemplo 6 Calcular el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Solución. Este determinante se puede calcular como ya se mostró, mediante operaciones elementales en los renglones para reducir A a la forma escalonada, aunque A también se puede escribir en forma triangular inferior en un paso sumando -3 veces la primera columna a la cuarta para obtener

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

Este ejemplo señala la utilidad de no perder de vista las operaciones en las columnas que pueden abreviar los cálculos. Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.2

1. Comprobar que $\det(A) = \det(A^T)$ para

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

2. Evaluar por inspección los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

3. Encontrar por inspección los determinantes de las siguientes matrices elementales.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 4 al 11, evaluar el determinante de la matriz dada reduciendo la matriz a forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. Dado que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, encontrar

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

13. Por medio de la reducción de renglones demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

14. Con un razonamiento semejante al de la demostración del teorema 2.2.2, mostrar que

a) $\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$ b) $\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

15. Demostrar los siguientes casos especiales del teorema 2.2.3.

a) $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

2.3 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DETERMINANTE

En esta sección se desarrollarán algunas de las propiedades fundamentales de la función determinante. Con el trabajo aquí realizado se adquirirán mayores conocimientos sobre la relación que hay entre una matriz cuadrada y su determinante. Una de las consecuencias inmediatas de este material es una importante prueba de determinante para la invertibilidad de una matriz.

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS DETERMINANTES

Suponer que A y B son matrices $n \times n$ y que k es cualquier escalar. Se comenzará considerando posibles relaciones entre $\det(A)$, $\det(B)$ y

$$\det(kA), \quad \det(A+B) \quad \text{y} \quad \det(AB)$$

Como del determinante puede sacarse un factor común de cualquier renglón de una matriz, y como cada uno de los n renglones de kA tiene un factor común igual a k, se obtiene

$$\boxed{\det(kA) = k^n \det(A)} \tag{1}$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Desafortunadamente, en general no existe ninguna relación simple entre los determinantes $\det(A)$, $\det(B)$ y $\det(A+B)$. En particular, se recalca que $\det(A+B)$ suele *no* ser igual a $\det(A)+\det(B)$. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 1 Considerar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Se tiene $\det(A) = 1$, $\det(B) = 8$ y $\det(A) + \det(B) = 23$; así, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. Δ

A pesar del tono negativo del ejemplo anterior, existe una relación importante en la que intervienen sumas de determinantes que a menudo es útil. Para obtenerla, considerar dos matrices 2×2 que sólo difieren en el segundo renglón:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{12}(a_{21} + b_{21}) \\ &= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así,

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Este es un caso especial del siguiente resultado general.

Teorema 2.3.1. *Sean A, B y C matrices n × n que sólo difieren en un renglón, por ejemplo, el r-ésimo, y suponer que el r-ésimo renglón de C se puede obtener sumando los elementos correspondientes de los r-ésimos renglones de A y B. Entonces*

$$det(C) = det(A) + det(B).$$

El mismo resultado es cierto para columnas.

Ejemplo 2 Con la evaluación de los determinantes se puede comprobar que

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

DETERMINANTE DE UN PRODUCTO DE MATRICES

Cuando se considera la complejidad de las definiciones de la multiplicación de matrices y determinantes de una matriz, parecería improbable que exista alguna relación simple entre ellas. Es esto lo que hace tan sorprendente la sencillez del siguiente resultado. Se demostrará que si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{2}$$

Como la demostración de este teorema es bastante minuciosa, primero es necesario desarrollar algunos resultados preliminares. Se empezará con el caso especial de (2) en que A es una matriz elemental. Debido a que este caso especial es sólo un preludio a (2), se denomina lema.

Lema 2.3.2. *Si B es una matriz n × n y E es una matriz elemental n × n, entonces*

$$det(EB) = det(E)\, det(B)$$

Demostración. Se considerarán tres casos, cada uno dependiendo de la operación en el renglón con que se obtiene E.

Caso 1. Si E se obtiene al multiplicar por k un renglón de I_n, entonces, por el teorema 1.5.1, EB se obtiene a partir de B al multiplicar por k un renglón; así, por el teorema 2.2.3a se tiene que

$$\det(EB) = k\det(B)$$

Pero por el teorema 2.2.4*a* se tiene que $\det(E) = k$, de modo que

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Casos 2 y 3. Las demostraciones de los casos en los que E se obtiene al intercambiar dos renglones de I_n o al sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón siguen el mismo patrón que el caso 1, por lo que se dejan como ejercicios. □

OBSERVACIÓN. Por aplicaciones repetidas del lema 2.3.2 se concluye que si B es una matriz $n \times n$ y $E_1, E_2, \ldots, E_r$ son matrices elementales $n \times n$, entonces

$$\det(E_1 E_2 \cdots E_r B) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B) \qquad (3)$$

Por ejemplo,

$$\det(E_1 E_2 B) = \det(E_1)\det(E_2 B) = \det(E_1)\det(E_2)\det(B)$$

PRUEBA DE LA INVERTIBILIDAD MEDIANTE UN DETERMINANTE

El siguiente teorema es uno de los más importantes en álgebra lineal; proporciona un criterio importante de invertibilidad en términos de determinantes y se usará en la demostración de (2).

Teorema 2.3.3. *Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $\det(A) = 0$.*

Demostración. Sea R la forma escalonada reducida de A. Como paso preliminar se demostrará que tanto $\det(A)$ como $\det(R)$ son cero o diferentes de cero: Sean $E_1, E_2, \ldots, E_r$ las matrices elementales que corresponden a las operaciones elementales en los renglones con que se obtiene R a partir de A. Así,

$$R = E_r \cdots E_2 E_1 A$$

y según (3),

$$\det(R) = \det(E_r)\cdots\det(E_2)\det(E_1)\det(A) \qquad (4)$$

Pero por el teorema 2.2.4, los determinantes de las matrices elementales son diferentes de cero. (Tomar en cuenta que multiplicar por cero un renglón *no* es una operación elemental en los renglones permitida, de modo que $k = 0$ en esta aplicación del teorema 2.2.4.) Así, por (4) se concluye que $\det(A)$ y $\det(R)$ son cero o diferentes de cero. Ahora se procederá a la parte más importante de la demostración.

Si A es invertible, entonces por el teorema 1.6.4 se tiene $R = I$, de modo que $\det(R) = 1 \neq 0$ y, en consecuencia, $\det(A) \neq 0$. Recíprocamente, si $\det(A) \neq 0$, entonces $\det(R) \neq 0$, de modo que R no puede contener un renglón de ceros. Por el teorema 1.4.3 se concluye que $R = I$, de modo que por el teorema 1.6.4 se tiene que A es invertible. □

Por los teoremas 2.3.3 y 2.2.5 se concluye que una matriz cuadrada con dos renglones o columnas proporcionales no es invertible.

Ejemplo 3 Como los renglones primero y tercero de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

son proporcionales, $\det(A) = 0$. Así, A no es invertible. Δ

Ahora ya es posible abordar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.3.4. *Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces*
$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B).$$

Demostración. La demostración se dividirá en dos casos que dependen de si A es invertible o no lo es. Si la matriz A no es invertible, entonces por el teorema 1.6.5 tampoco lo es el producto AB. Así, por el teorema 2.3.3 se tiene que $\det(AB) = 0$ y $\det(A) = 0$, por tanto, se concluye que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Ahora se supone que A es invertible. Por el teorema 1.6.4, la matriz A se puede expresar como producto de matrices elementales, por ejemplo

$$A = E_1 E_2 \cdots E_r \tag{5}$$

de modo que

$$AB = E_1 E_2 \cdots E_r B$$

Si se aplica (3) a esta ecuación se obtiene

$$\det(AB) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B)$$

y aplicando (3) de nuevo se obtiene

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdots E_r)\det(B)$$

que, según (5), se puede escribir como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ □

Ejemplo 4 Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Se deja al lector comprobar que

$$\det(A) = 1 \quad \det(B) = -23 \quad \text{y} \quad \det(AB) = -23$$

Así, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, como garantiza el teorema 2.3.4. Δ

El siguiente teorema proporciona una relación útil entre el determinante de una matriz invertible y el determinante de su inversa.

Teorema 2.3.5. *Si A es invertible, entonces*

$$\boxed{det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}}$$

Demostración. Como $A^{-1}A = I$, se concluye que $\det(A^{-1}A) = \det(I)$. Por consiguiente, se debe tener que $\det(A^{-1})\det(A) = 1$. Como $\det(A) = 0$, la demostración puede completarse dividiendo entre $\det(A)$. ▯

SISTEMAS LINEALES DE LA FORMA $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

Muchas aplicaciones del álgebra lineal están relacionadas con sistemas de n ecuaciones lineales en n incógnitas que se expresan como

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{6}$$

donde λ es un escalar. Estos sistemas son realmente sistemas lineales homogéneos encubiertos, ya que (6) puede escribirse de nuevo como $\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o, insertando una matriz identidad y factorizando, como

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{7}$$

A continuación se proporciona un ejemplo.

Ejemplo 5 El sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= \lambda x_1 \\ 4x_1 + 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que es de la forma (6) con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema puede volver a escribirse como

$$\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix}\lambda-1 & -3\\ -4 & \lambda-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

que es de la forma (7) con

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -3\\ -4 & \lambda-2\end{bmatrix} \quad \Delta$$

El problema de interés esencial en sistemas lineales de la forma (7) es determinar los valores de para los cuales el sistema tiene una solución no trivial; ese valor de λ se denomina ***valor característico*** o ***eigenvalor**** de A. Si λes un eigenvalor de A, entonces las soluciones no triviales de (7) se denominan ***eigenvectores*** de A correspondientes a λ.

De acuerdo con el teorema 2.3.3 se concluye que el sistema (I − A)**x** = **0** tiene una solución no trivial si y sólo si

$$\boxed{\det(\lambda I-A)=0} \tag{8}$$

Ésta se denomina ***ecuación característica*** de A; los eigenvalores de A se pueden encontrar resolviendo esta ecuación para λ.

Los eigenvalores y los eigenvectores se estudiarán de nuevo en otros capítulos, donde se analizará su interpretación geométrica y se desarrollarán sus propiedades con mayor profundidad.

Ejemplo 6 Determinar los eigenvalores y los eigenvectores correspondientes de la matriz A del ejemplo 5.

Solución. La ecuación característica de A es

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3\\ -4 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$$

---

*La palabra *eigenvalor* es una combinación de alemán y español. El prefijo alemán *eigen* puede traducirse como "propio", que resulta de las antiguas publicaciones en las que los eigenvalores se conocían como *valores propios*; también se denominan *raíces latentes*.

o

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

La forma factorizada de esta ecuación es $(\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0$, de modo que los eigenvalores de A son $\lambda = -2$ y $\lambda = 5$.

Por definición,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector de A si y sólo si $\mathbf{x}$ es una solución no trivial de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$; es decir,

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Si $\lambda = -2$, entonces (9) se convierte en

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema se obtiene (comprobar)

$$x_1 = -t, \; x_2 = t$$

de modo que los eigenvectores correspondientes a $\lambda = -2$ son las soluciones diferentes de cero de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$$

De nuevo por (9), los eigenvectores de A correspondientes a $\lambda = 5$ son las soluciones no triviales de

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se deja que el lector resuelva este sistema y demuestre que los eigenvectores de A correspondientes a $\lambda = 5$ son las soluciones diferentes de cero de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix} \quad \Delta$$

RESUMEN

En el teorema 1.6.4 se mencionaron cinco resultados que son equivalentes a la invertibilidad de una matriz A. Esta sección termina con la inclusión del teorema 2.3.3 en esa lista para obtener el siguiente teorema que relaciona los temas primordiales que se han estudiado hasta ahora.

> **Teorema 2.3.6.** *Si A es una matriz $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*
> *a)* *A es invertible.*
> *b)* *$Ax = 0$ sólo tiene la solución trivial.*
> *c)* *La forma escalonada reducida de A es I_n.*
> *d)* *A se puede expresar como un producto de matrices elementales.*
> *e)* *$Ax = b$ es consistente para toda matriz b $n \times 1$.*
> *f)* *$Ax = b$ tiene exactamente una solución para toda matriz b $n \times 1$.*
> *g)* *$\det(A) = 0$.*

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.3

1. Comprobar que $\det(kA) = k^n \det(A)$ para

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $k = 2$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; $k = -2$

2. Comprobar que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Por inspección, explicar por qué $\det(A) = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Con el teorema 2.3.3, determinar cuáles de las siguientes matrices son invertibles.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Suponiendo que $\det(A) = -7$, determinar

a) $\det(3A)$ b) $\det(A^{-1})$ c) $\det(2A^{-1})$ d) $\det((2A)^{-1})$ e) $\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

6. Sin evaluar directamente demostrar que $x = 0$ y $x = 2$ satisfacen

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sin evaluar directamente, demostrar que

$$\det\begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

En los ejercicios del 8 al 11, demostrar la identidad sin evaluar los determinantes

8. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

9. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

10. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

11. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ta_1 & c_1+rb_1+sa_1 \\ a_2 & b_2+ta_2 & c_2+rb_2+sa_2 \\ a_3 & b_3+ta_3 & c_3+rb_3+sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

12. ¿Para qué valor(es) de k se cumple que A no es invertible?

a) $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

13. Con el teorema 2.3.3, demostrar que

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}^2\beta & \operatorname{sen}^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

no es invertible para cualesquiera valores de $\alpha, \beta,$ y γ.

14. Expresar los siguientes sistemas lineales en la forma $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

a) $x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$
$2x_1 + x_2 = \lambda x_2$

b) $2x_1 + 3x_2 = \lambda x_1$
$4x_1 + 3x_2 = \lambda x_2$

c) $3x_1 + x_2 = \lambda x_1$
$-5x_1 - 3x_2 = \lambda x_2$

15. Para cada uno de los sistemas del ejercicio 14, encontrar

a) la ecuación característica,
b) los eigenvalores, y
c) los eigenvectores correspondientes a cada uno de los eigenvalores.

16. Sean A y B matrices $n \times n$. Demostrar que si A es invertible, entonces $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$.

17. a) Expresar

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

como una suma de cuatro determinantes cuyos elementos no contengan sumas.

b) Expresar

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 & e_1 + f_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 & e_2 + f_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 + d_3 & e_3 + f_3 \end{vmatrix}$$

como una suma de ocho determinantes cuyos elementos no contengan sumas.

18. Demostrar que una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si A^TA es invertible.

19. Demostrar los casos 2 y 3 del lema 2.3.2.

2.4 DESARROLLO POR COFACTORES; REGLA DE CRAMER

En esta sección se considerará un método para evaluar determinantes que es útil en la realización de cálculos manuales y reviste importancia teórica. Como consecuencia del trabajo aquí efectuado, se obtendrá una fórmula para calcular la inversa de una matriz invertible, así como una fórmula para encontrar la solución de ciertos sistema de ecuaciones lineales en términos de determinantes.

MENORES Y COFACTORES

Definición. Si A es una matriz cuadrada, entonces el ***menor del elemento*** $\boldsymbol{a_{ij}}$ se denota por M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz que queda después de quitar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A. El número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ se denota por C_{ij} y se denomina ***cofactor del elemento*** $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Ejemplo 1 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

El menor del elemento a_{11} es

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} & 5 & 6 \\ \mathbf{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

El cofactor de a_{11} es

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = 16$$

De manera semejante, el menor del elemento a_{32} es

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

el cofactor de a_{32} es

$$C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32} = -26 \quad \Delta$$

Observar que el cofactor y el menor de un elemento a_{ij} sólo difieren en el signo; es decir, $C_{ij} = {}^{+}M_{ij}$. Una manera rápida para determinar si se usa el signo + o el signo − es aplicar el hecho de que el signo que relaciona C_{ij} con M_{ij} está en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna del arreglo en forma de "tablero de ajedrez"

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, $C_{11} = M_{11}$, $C_{21} = -M_{21}$, $C_{12} = -M_{12}$, $C_{22} = M_{22}$, y así sucesivamente.

DESARROLLOS POR COFACTORES

Considerar la matriz general 3 × 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 7 de la sección 2.1 se demostró que

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1)$$

la cual se puede volver a escribir como

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Debido a que las expresiones entre paréntesis son justamente los cofactores C_{11}, C_{21} y C_{31} (comprobar), se tiene que

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \tag{2}$$

La ecuación (2) muestra que el determinante de A se puede calcular multiplicando los elementos de la primera columna de A por sus cofactores y sumando los producto resultantes. Esta forma de evaluar det(A) se denomina ***desarrollo por cofactores*** a lo largo de la primera columna de A.

Ejemplo 2 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Evaluar det(A) por desarrollo por cofactores a lo largo de la primera columna de A.

Solución. Por (2), se tiene que

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1 \quad \Delta$$

Reordenando los términos de (1) de varias formas, es posible obtener otras fórmulas como (2). No debe haber ningún problema en la comprobación de que todas las siguientes igualdades son correctas (véase el ejercicio 28):

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \end{aligned} \tag{3}$$

Como en cada ecuación todos los elementos y los cofactores provienen del mismo renglón o de la misma columna. Estas ecuaciones se denominan ***desarrollos por cofactores*** de det(A).

Los resultados que acaban de proporcionarse para matrices 3×3 constituyen un caso especial del siguiente teorema general, que se enuncia sin demostración.

Teorema 2.4.1. *El determinante de una matriz A n x n se puede calcular multiplicando los elementos de cualquier renglón (o de cualquier columna) por sus cofactores y sumando los productos resultantes; es decir, para cada 1 i n y 1 j n, se tiene que*

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(*Desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna*)

y

$$\det(A) = a_{j1}C_{j1} + a_{i2}C_{i2} \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(*Desarrollo por cofactores a lo largo del i-ésimo renglón*)

Ejemplo 3 Sea A la matriz del ejemplo 2. Evaluar $\det(A)$ mediante desarrollo por cofactores a lo largo del primer renglón.

Solución.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

Esto concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 2. Δ

OBSERVACIÓN. En este ejemplo no fue necesario calcular el último cofactor, ya que se multiplicó por cero. En general, la mejor estrategia para evaluar un determinante mediante cofactores, hacer el desarrollo a lo largo del renglón o la columna que tenga el mayor número de ceros.

El desarrollo por cofactores y las operaciones en los renglones o en las columnas se pueden combinar algunas veces para obtener un método efectivo de evaluar determinantes. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

Ejemplo 4 Evaluar $\det(A)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución. Sumando múltiplos idóneos del segundo renglón a los demás renglones se obtiene

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$ Desarrollo por cofactores a lo largo de la primera columna.

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$ Se sumó el primer renglón al tercero.

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$ Desarrollo por cofactores a lo largo de la primera columna.

$$= -18 \quad \Delta$$

ADJUNTA DE UNA MATRIZ

En un desarrollo por cofactores, $\det(A)$ se calcula multiplicando los elementos de un renglón o una columna por sus cofactores y sumando los productos resultantes. Resulta que si los elementos de cualquier renglón se multiplican por los cofactores correspondientes de un renglón *diferente*, la suma de tales productos siempre es cero. (Este resultado también se cumple para columnas.) Aunque se omite la demostración general, el siguiente ejemplo ilustra la idea de la demostración en un caso especial.

Ejemplo 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Considerar la cantidad

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$$

que se forma al multiplicar los elementos del primer renglón por los cofactores de los elementos correspondientes en el tercer renglón y sumar los productos resultantes. A continuación se demostrará que esta cantidad es igual a cero mediante la siguiente regla práctica. Obtener una nueva matriz A' sustituyendo el tercer renglón de A por el primer renglón. Así,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Sean C'_{31}, C'_{32}, C'_{33} los cofactores de los elementos del tercer renglón de A'. Como los dos primeros renglones de A y A' son iguales, y dado que en el cálculo de C_{31}, C_{32}, C_{33}, C'_{31}, C'_{32} y C'_{33} sólo intervienen elementos de los dos primeros renglones de A y A', se concluye que

$$C_{31} = C'_{31}, \qquad C_{32} = C'_{32}, \qquad C_{33} = C'_{33}$$

Como A' tiene dos renglones idénticos,

$$\det(A') = 0 \tag{4}$$

Por otro lado, al evaluar $\det(A')$ por desarrollo por cofactores a lo largo del tercer renglón se obtiene

$$\det(A') = a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33} = a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} \tag{5}$$

Por (4) y (5) se obtiene

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0 \quad \Delta$$

Definición. Si A es cualquier matriz $n \times n$ y C_{ij} es el cofactor de a_{ij}, entonces la matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

se denomina ***matriz de cofactores de A***. La transpuesta de esta matriz se denomina ***adjunta de A*** y se denota por $\text{adj}(A)$.

Ejemplo 6 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Los cofactores de A son

$$C_{11} = 12 \qquad C_{12} = 6 \qquad C_{13} = -16$$
$$C_{21} = 4 \qquad C_{22} = 2 \qquad C_{23} = 16$$
$$C_{31} = 12 \qquad C_{32} = -10 \qquad C_{33} = 16$$

de modo que la matriz de cofactores es

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

y la adjunta de (A) es

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Ahora ya es posible obtener una fórmula para la inversa de una matriz invertible.

FÓRMULA PARA LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Teorema 2.4.2. *Si A es una matriz invertible, entonces*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)} \tag{6}$$

Demostración. Primero se demostrará que

$$A \text{ adj}(A) = \det(A)\, I$$

Considerar el producto (resaltado en negro)

$$A \text{ adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

El elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A adj(A) es

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} \tag{7}$$

(véanse los renglones sombreados en las dos matrices anteriores).

Si $i = j$, entonces (7) es el desarrollo por cofactores de det(A) a lo largo del i-ésimo renglón de A (teorema 2.4.1), y si $i = j$, entonces las letras a y los cofactores provienen de renglones diferentes de A, de modo que el valor de (7) es cero. En consecuencia,

$$A\,\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I \qquad (8)$$

Dado que A es invertible, det(A) = 0. Por tanto, la ecuación (8) puede volver a escribirse como

$$\frac{1}{\det(A)}[A\,\text{adj}(A)] = I$$

o

$$A\left[\frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)\right] = I$$

Multiplicando por la izquierda ambos miembros por A^{-1}, se obtiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) \quad \square$$

Ejemplo 7 Por medio de (6), encontrar la inversa de la matriz A del ejemplo 6.

Solución. El lector puede comprobar que det(A) = 64. Así,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix} \quad \Delta$$

APLICACIONES DE LA FÓRMULA DE LA ADJUNTA PARA LA INVERSA

Aunque el método del ejemplo precedente es razonable para invertir manualmente matrices 3×3, el algoritmo de inversión que se analizó en la sección 1.5 es más eficaz para matrices más grandes. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el método de la sección 1.5 es sólo un procedimiento de cómputo, mientras que la fórmula (6) es una fórmula real para encontrar la inversa. Como se verá a continuación, esta fórmula es útil para obtener propiedades de la inversa.

En la sección 1.7 se establecieron sin demostración dos resultados sobre inversas.

- **Teorema 1.7.1*c*:** Una matriz triangular es invertible si y sólo si todos sus elementos diagonales son diferentes de cero.
- **Teorema 1.7.1*d*:** La inversa de una matriz triangular inferior invertible es triangular inferior, y la inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior.

Estos resultados se demostrarán a continuación usando la fórmula de la adjunta para la inversa.

Demostración del teorema 1.7.1c. Sea $A = a_{ij}$ una matriz triangular, de modo que sus elementos diagonales son

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

Por los teoremas 2.2.2 y 2.3.3, la matriz A es invertible si y sólo si

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$$

que es verdadero si y sólo si todos los elementos de la diagonal son diferentes de cero. □

Se deja como ejercicio para el lector usar la fórmula de la adjunta de A^{-1} para demostrar que si $A = a_{ij}$ es una matriz triangular invertible, entonces los elementos diagonales sucesivos de A^{-1} son

$$\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}$$

(Véase el ejemplo 3 de la sección 1.7.)

Demostración del teorema 1.7.1d. El resultado se demostrará para matrices triangulares superiores y se dejará como ejercicio el caso para matrices triangulares inferiores. Suponer que A es triangular superior e invertible. Como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

se puede demostrar que A^{-1} es triangular superior puede probarse probando que adj(A) es triangular superior o, equivalentemente, que la matriz de cofactores es triangular inferior. Lo anterior se puede lograr demostrando que todo cofactor C_{ij} con $i < j$ (es decir, arriba de la diagonal principal) es cero. Como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

basta demostrar que cada menor M_{ij} con $i < j$ es cero. Para este propósito, sea B_{ij} la matriz que se obtiene cuando se quitan el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A, de modo que

$$M_{ij} = \det(B_{ij}) \tag{9}$$

A partir de la hipótesis que $i < j$, se concluye que B_{ij} es triangular superior (ejercicio 32). Como A es triangular superior, su $(i + 1)$-ésimo renglón comienza con por lo menos i ceros. Pero el i-ésimo renglón de B_{ij} es el $(i + 1)$-ésimo renglón de A sin el elemento de la j-ésima columna. Ya que $i < j$, ninguno de los i primeros ceros se elimina quitando la j-ésima columna; así, el i-ésimo renglón de B_{ij} comienza con por lo menos i ceros, lo cual indica que este renglón contiene un cero en la diagonal principal. Ahora, por el teorema 2.2.2 se concluye que $\det(B_{ij}) = 0$, y por la expresión (9) se concluye que $M_{ij} = 0$. □

REGLA DE CRAMER

El siguiente teorema proporciona una fórmula útil para la solución de ciertos sistemas lineales de n ecuaciones con n incógnitas. Esta fórmula, denominada ***regla de Cramer****, es de interés marginal para efectos de cómputo, aunque es útil para estudiar las propiedades matemáticas de una solución sin necesidad de resolver el sistema.

Teorema 2.4.3. ***(Regla de Cramer).*** *Si $Ax = \mathbf{b}$ es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tal que $det(A) = 0$, entonces la solución del sistema es única. Esta solución es*

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

donde A_j es la matriz que se obtiene al sustituir los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos de la matriz

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

****Gabriel Cramer*** **(1704-1752)**, matemático suizo. Aunque Cramer no está considerado al lado de los grandes matemáticos de su tiempo, sus contribuciones como diseminador de las ideas matemáticas le ganaron un bien merecido lugar en la historia de las matemáticas. Cramer viajó bastante y conoció a muchos de los grandes matemáticos de su época. Estos contactos y amistades condujeron a una correspondencia abundante a través de la cual se difundía la información sobre nuevos descubrimientos matemáticos.

Demostración. Si $\det(A) = 0$, entonces A es invertible y, según el teorema 1.6.2, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ es la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. En consecuencia, por el teorema 2.4.2 se tiene

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices se obtiene

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, el elemento en el j-ésimo renglón de $\mathbf{x}$ es

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}}{\det(A)} \tag{10}$$

Ahora, sea

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Como A_j difiere de A sólo en la j-ésima columna, se concluye que los cofactores de los elementos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ en A_j son los mismos que los cofactores de los elementos correspondientes en la j-ésima columna de A. En consecuencia, el desarrollo por cofactores de $\det(A)$ a lo largo de la j-ésima columna es

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

El trabajo más conocido de Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750), es un estudio y una clasificación de las curvas algebraicas; la regla de Cramer apareció en el apéndice. Aunque la regla lleva su nombre, variantes de la idea básica fueron planteadas antes por otros matemáticos. Sin embargo, la notación superior de Cramer ayudó a aclarar y popularizar la técnica.

El exceso de trabajo, combinado con una caída de un carruaje, provocaron su fallecimiento en 1752. Aparentemente, Cramer era una persona de buen corazón y agradable, aunque nunca contrajo matrimonio. Sus intereses eran amplios. Escribió sobre filosofía de las leyes y del gobierno, y sobre la historia de las matemáticas. Trabajó en una oficina pública, participó en la artillería y en actividades de fortificaciones para el gobierno, instruyó a trabajadores sobre técnicas de reparación de catedrales y efectuó excavaciones de archivos catedralicios. Cramer recibió numerosos honores por sus actividades.

Sustituyendo este resultado en (10) se obtiene

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad \square$$

Ejemplo 8 Aplicar la regla de Cramer para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solución.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11} \quad \Delta$$

OBSERVACIÓN. Para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas mediante la regla de Cramer, es necesario evaluar $n + 1$ determinantes de matrices $n \times n$. Para sistemas con más de tres ecuaciones, la eliminación gaussiana es bastante más eficaz, ya que sólo es necesario reducir una matriz aumentada $n \times (n + 1)$. Sin embargo, la regla de Cramer proporciona una fórmula para la solución si el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.4

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar todos los menores de A. b) Encontrar todos los cofactores.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontrar
a) M_{13} y C_{13} b) M_{23} y C_{23} c) M_{22} y C_{22} d) M_{21} y C_{21}

3. Evaluar el determinante de la matriz del ejercicio 1 por desarrollo por cofactores a lo largo de lo siguiente:

a) El primer renglón. b) La primera columna. c) El segundo renglón.
d) La segunda columna. e)* El tercer renglón. f) La tercera columna.

4. Para la matriz del ejercicio 1, encontrar
a) adj(A). b) A^{-1} usando el teorema 2.4.2.

En los ejercicios del 5 al 10, evaluar det(A) mediante desarrollo por cofactores a lo largo de un renglón o una columna que el lector elija.

5. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **6.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ **7.** $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$ **9.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **10.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 11 al 14, encontrar A^{-1} por medio del teorema 2.4.2.

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **12.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

15. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Evaluar A^{-1} usando el teorema 2.4.2.
b) Evaluar A^{-1} con el método del ejemplo 4 de la sección 1.5.
c) ¿Cuál método requiere menos cálculos?

En los ejercicios del 16 al 21, obtener la solución usando la regla de Cramer cuando sea aplicable.

16. $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 4x + 5y \quad &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x - 4y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 \quad &= -2 \\ 4x_1 \quad - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$

22. Demostrar que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible para todos los valores de θ; luego, encontrar A^{-1} usando el teorema 2.4.2.

23. Aplicar la regla de Cramer para hallar y sin resolver para x, z y w.

$$\begin{aligned} 4x + y + z + w &= 6 \\ 3x + 7y - z + w &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + y + z + 2w &= 3 \end{aligned}$$

24. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ el sistema del ejercicio 23.
a) Resolver aplicando la regla de Cramer.
b) Obtener la solución por eliminación de Gauss-Jordan.
c) ¿Cuál método requiere menos cálculos?

25. Demostrar que si $\det(A) = 1$ y todos los elementos de A son enteros, entonces todos los elementos de A^{-1} son enteros.

26. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, coeficientes enteros y constantes enteras. Demostrar que si $\det(A) = 1$, la solución $\mathbf{x}$ tiene elementos enteros.

27. Demostrar que si A es una matriz triangular inferior invertible, entonces A^{-1} es triangular inferior.

28. Obtener los desarrollos por cofactores primero y último que se enumeran en la fórmula (3).

29. Demostrar: La ecuación de la recta que pasa por los puntos distintos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

30. Demostrar: (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son puntos colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

31. Demostrar: La ecuación del plano que pasa por los puntos no colineales (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) y (a_3, b_3, c_3) se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

32. Demostrar que si A es triangular superior y B_{ij} es la matriz que se obtiene cuando se eliminan el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A, entonces B_{ij} es triangular superior si $i < j$.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Con la regla de Cramer, resolver para x' y y' en términos de x y y.

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$$
$$y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

2. Usar la regla de Cramer para que x' y y' queden expresadas en términos de x y y.

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

3. Analizando el determinante de la matriz de coeficientes, demostrar que el siguiente sistema tiene una solución no trivial si y sólo si $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + z &= 0 \end{aligned}$$

4. Sea A una matriz 3×3, cada uno de cuyos elementos es 1 ó 0. ¿Cuál es el máximo valor posible de A ?

5. a) Para el triángulo de la figura 1 que se muestra a continuación, usar trigonometría para demostrar que

$$\begin{aligned} b \cos \gamma + c \cos \beta &= a \\ c \cos \alpha + a \cos \gamma &= b \\ a \cos \beta + b \cos \alpha &= c \end{aligned}$$

y luego aplicar la regla de Cramer para demostrar que

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

b) Con la regla de Cramer obtener fórmulas semejantes para cos β y cos γ.



Figura 1

6. Por medio de determinantes, demostrar que para todos los valores reales de λ la única solución de

$$\begin{aligned} x - 2y &= \lambda x \\ x - \ \ y &= \lambda y \end{aligned}$$

es $x = 0$, $y = 0$.

7. Demostrar: Si A es invertible, entonces adj(A) es invertible y

$$[\operatorname{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = \operatorname{adj}(A^{-1})$$

8. Demostrar: Si A es una matriz $n \times n$, entonces det [adj(A)] = [det(A)]$^{n-1}$.

9. (***Para lectores que ya estudiaron cálculo.***) Demostrar que si $f_1(x), f_2(x)$, $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son funciones derivables y si

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$$

10. a) En la figura 2 que se muestra a continuación, el área del triángulo ABC se puede expresar como

$$\text{Área } ABC = \text{área } ADEC + \text{área } CEFB - \text{área } ADFB$$

Usar ésto y el hecho de que el área de un trapezoide es igual a 1/2 de la altura multiplicada por la suma de los lados paralelos, para demostrar que

$$\text{area } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[***Nota.*** En la obtención de esta fórmula, los vértices se identifican de modo que el triángulo se traza en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj procediendo de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) a (x_3, y_3). Para una orientación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, el determinante anterior produce el ***negativo*** del área.]

b) Usar el resultado del inciso a), para determinar el área del triángulo con vértices (3, 3), (4, 0), (−2, −1).

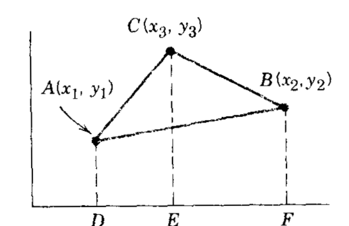


Figura 2

11. Demostrar: Si la suma de los elementos en cada renglón de una matriz A $n \times n$ es cero, entonces el determinante de A es cero. [***Sugerencia.*** Considerar el producto AX, donde X es la matriz $n \times 1$ cuyos elementos son iguales a 1.]

12. Sean A una matriz n x n y B la matriz que se obtiene cuando los renglones de A se escriben en orden invertido. ¿Cómo están relacionados $\det(A)$ y $\det(B)$?

13. ¿Cómo se afecta A^{-1} si
    a) se intercambian los renglones i-ésimo y j-ésimo de A?
    b) el i-ésimo renglón de A se multiplica por un escalar c diferente de cero?;
    c) el i-ésimo renglón de A se suma c veces al j-ésimo renglón?

14. Sea A una matriz de $n \times n$. Suponer que B_1 se obtiene al sumar el mismo número t a cada elemento en el i-ésimo renglón de A, y que B_2 se obtiene al restar t de cada elemento en el i-ésimo renglón de A. Demostrar que $\det(A) = 1/2\ [\det(B_1) + \det(B_2)]$.

15. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

    a) Expresar $\det(\lambda I - A)$ como un polinomio $p(\lambda) = \lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$.
    b) Expresar los coeficientes b y d en términos de determinantes y trazas.

16. Sin evaluar directamente el determinante, demostrar que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \operatorname{sen}(\alpha+\delta) \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \operatorname{sen}(\beta+\delta) \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & \operatorname{sen}(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

17. Usar el hecho de que 21 375, 38 798, 34 162, 40 223 y 79 154 son, todos, divisibles entre 19 para demostrar que

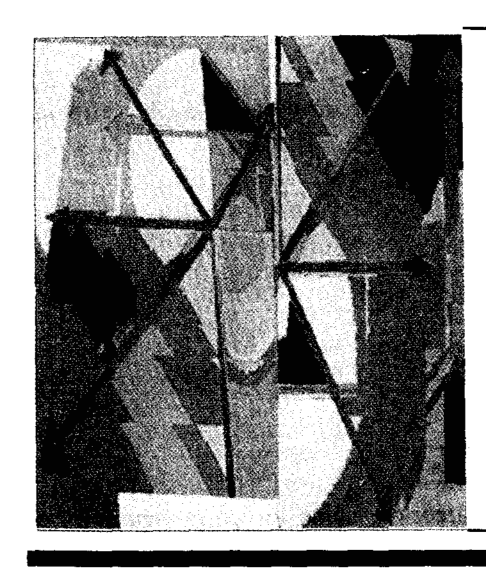
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

es divisible entre 19 sin evaluar directamente el determinante.

18. Calcular los eigenvalores y los eigenvectores correspondientes de cada uno de los siguientes sistemas.

a)
$$\begin{aligned} x_2 + 9x_3 &= \lambda x_1 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= \lambda x_2 \\ x_1 \qquad - 3x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= \lambda x_1 \\ x_1 \qquad - x_3 &= \lambda x_2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$



CAPÍTULO 3

VECTORES EN LOS ESPACIOS BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL

Los lectores familiarizados con el contenido de este capítulo pueden omitirlo y pasar al capítulo 4 sin pérdida de continuidad.

3.1 INTRODUCCIÓN A LOS VECTORES (GEOMÉTRICA)

Muchas cantidades físicas, como área, longitud, masa y temperatura quedan descritas una vez que se conoce la magnitud de la cantidad. Esas cantidades se denominan ***escalares****. Otras cantidades físicas, denominadas* ***vectores****, no quedan determinadas sino hasta que se especifican una magnitud y una dirección. Un caso sería la descripción del movimiento del viento que suele hacerse dando su rapidez y dirección, por ejemplo 20 kph noreste. La rapidez y la dirección del viento constituyen una cantidad vectorial denominada* ***velocidad*** *del viento. Otros ejemplos de vectores son la fuerza y el desplazamiento. En esta sección se hará una presentación geométrica de los vectores en los espacios bidimensional y tridimensional, se definirán las operaciones aritméticas con vectores y se establecerán algunas propiedades básicas de estas operaciones.*

VECTORES GEOMÉTRICOS

Los vectores se pueden representar geométricamente como segmentos de recta dirigidos o flechas en el espacio bidimensional o en el espacio tridimensional; la dirección y la longitud de la flecha especifican, respectivamente, la dirección y la magnitud del vector. La cola de la flecha se denomina *punto inicial* del vector y la punta, *punto terminal*. Los vectores se denotarán con minúsculas negritas (por ejemplo, a, k, v, w y x). Cuando se analizan vectores, los números se denominan *escalares*. Todos los escalares serán números reales y se denotarán por minúsculas cursivas (por ejemplo, a, k, v, w y x).

Si, como en la figura 1*a*, el punto inicial de un vector **v** es A y el punto terminal es B, se escribe

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

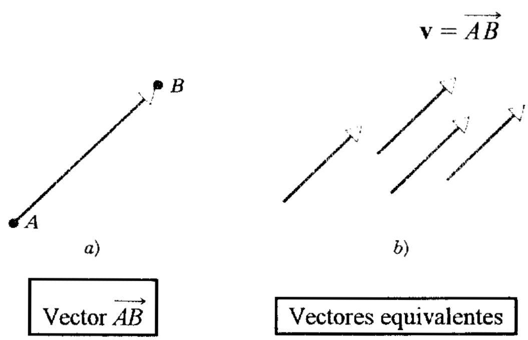


Figura 1 Vector $\overrightarrow{AB}$ — Vectores equivalentes

Los vectores con la misma longitud y dirección, como los de la figura 1*b*, se denominan ***equivalentes***. Como se quiere que un vector quede determinado solamente por su longitud y su dirección, los vectores equivalentes se consideran como ***iguales*** aun cuando puedan estar ubicados en posiciones diferentes. Si **v** y **w** son equivalentes, se escribe

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

> **Definición.** Si **v** y **w** son dos vectores cualesquiera, entonces la ***suma*** **v** + **w** es el vector determinado como sigue: El vector **w** se coloca de modo que su punto inicial coincida con el punto terminal de **v**. El vector **v** + **w** se representa por la flecha que va del punto inicial de **v** al punto terminal de **w** (figura 2*a*).

En la figura 2*b* se han construido dos sumas, **v** + **w** (flecha blanca) y **w** + **v** (flecha negra). Resulta evidente que

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

y que la suma coincide con la diagonal del paralelogramo determinado por **v** y **w** cuando estos vectores se colocan de modo que tienen el mismo punto inicial.

El vector de longitud cero se denomina ***vector cero*** y se denota por **0**. Se define

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

para todo vector **v**. Como para el vector cero no existe ninguna dirección natural, se acuerda que es posible asignarle cualquier dirección conveniente para el problema en cuestión.

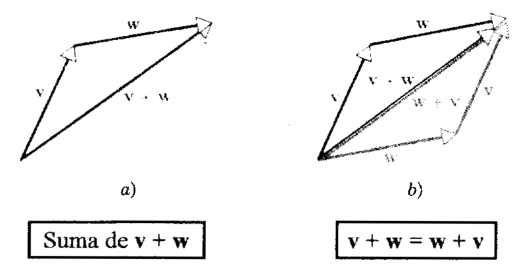


Figura 2 Suma de **v** + **w** — **v** + **w** = **w** + **v**

Si $\mathbf{v}$ es cualquier vector diferente de cero, entonces $-\mathbf{v}$, el ***negativo*** de $\mathbf{v}$, se define como el vector que tiene la misma magnitud que $\mathbf{v}$, pero dirección opuesta (Figura 3).

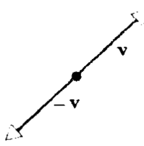


Figura 3 El negativo de $\mathbf{v}$ tiene la misma longitud que $\mathbf{v}$, pero su dirección es opuesta.

Este vector tiene la propiedad

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

(¿Por qué?) Además, se define $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$. La sustracción de vectores se define como sigue.

Definición. Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son dos vectores cualesquiera, entonces la ***diferencia*** de $\mathbf{w}$ con respecto a $\mathbf{v}$ se define como

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

(Figura 4*a*).

Para obtener la diferencia $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ sin construir $-\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se colocan de modo que coincidan sus puntos iniciales; entonces, el vector del punto terminal de $\mathbf{w}$ al punto terminal de $\mathbf{v}$ es el vector $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (figura 4*b*).

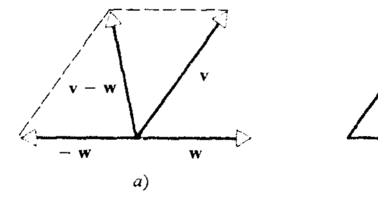


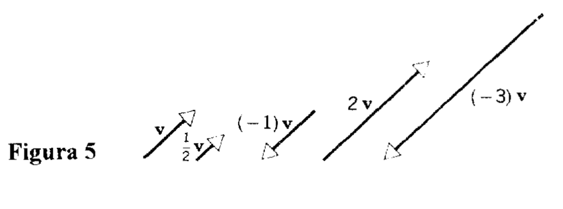
Figura 4 *a*) *b*)

Definición. Si $\mathbf{v}$ es un vector diferente de cero y k es un número real (escalar) diferente de cero, entonces el ***producto*** $k\mathbf{v}$ se define como el vector cuya longitud es $|k|$ veces la longitud de $\mathbf{v}$ y cuya dirección es la misma que la de $\mathbf{v}$ si $k > 0$ y es opuesta a la de $\mathbf{v}$ si $k < 0$. Si $k = 0$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, se define $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

En la figura 5 se ilustra la relación entre un vector $\mathbf{v}$ y los vectores $\frac{1}{2}\mathbf{v}$, $(-1)\mathbf{v}$, $2\mathbf{v}$ y $(-3)\mathbf{v}$. Observar que el vector $(-1)\mathbf{v}$ tiene la misma longitud que $\mathbf{v}$, pero dirección opuesta. Así, $(-1)\mathbf{v}$ es simplemente el negativo de $\mathbf{v}$; es decir,

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Figura 5



Un vector de la forma $k\mathbf{v}$ se denomina ***múltiplo escalar*** de **v**. En la figura 5 se observa que los vectores que son múltiplos escalares entre sí son paralelos. Recíprocamente, se puede demostrar que los vectores paralelos diferentes de cero son múltiplos escalares entre sí. Se omite la demostración.

VECTORES EN SISTEMAS DE COORDENADAS

Los problemas con vectores a menudo se pueden simplificar introduciendo un sistema de coordenadas rectangulares. Por ahora, el análisis se limitará a vectores en el espacio bidimensional (el plano). Sea v cualquier vector en el plano y suponer, como se muestra en la figura 6, que v se ha colocado de modo que su punto inicial está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Las coordenadas (v_1, v_2) del punto terminal de v se denominan ***componentes de v***, y se escribe

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

Si vectores equivalentes **v** y **w** se colocan de modo que sus puntos iniciales estén en el origen, entonces resulta evidente que sus puntos terminales deben coincidir (ya que los vectores tienen la misma longitud y la misma dirección); así, los vectores tienen las mismas componentes. Recíprocamente, los vectores con las mismas componentes son equivalentes, ya que tienen las misma longitud y la misma dirección. En resumen, dos vectores

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

son equivalentes si y sólo si

$$v_1 = w_1 \quad \text{y} \quad v_2 = w_2$$

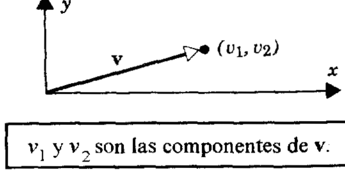


Figura 6 v_1 y v_2 son las componentes de **v**.

Las operaciones de suma vectorial y multiplicación por escalares son fáciles de efectuar en términos de componentes. Como se ilustra en la figura 7, si

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

entonces

$$\boxed{\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)} \tag{1}$$

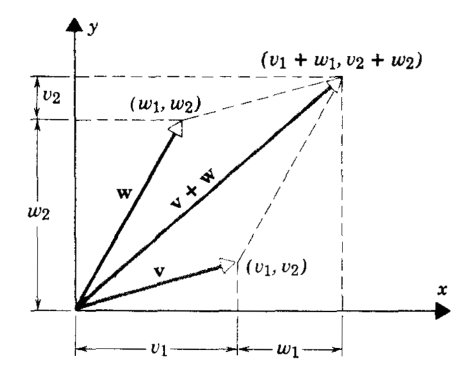


Figura 7

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y k es cualquier escalar, entonces mediante un razonamiento geométrico con triángulos semejantes se puede demostrar (ejercicio 15) que

$$\boxed{k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)} \tag{2}$$

(Figura 8). Así, por ejemplo, si $\mathbf{v} = (1, -2)$ y $\mathbf{w} = (7, 6)$, entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$$

y

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4(1), 4(-2)) = (4, -8)$$

Como $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$, por las fórmulas (1) y (2) se concluye que

$$\boxed{\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)}$$

(Comprobarlo.)

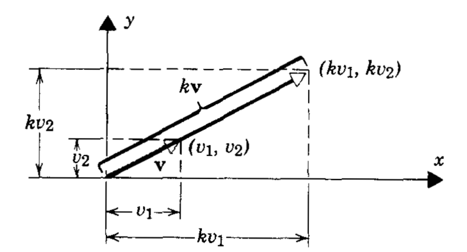


Figura 8

VECTORES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Así como los vectores en el plano se pueden describir por parejas de números reales, los vectores en el espacio tridimensional se pueden describir por ternas de números reales introduciendo un sistema de ***coordenadas rectangulares***. Para construir ese sistema de coordenadas, se elige un punto O, denominado el ***origen***, y se eligen tres rectas perpendiculares entre sí, denominadas ***ejes de coordenadas***, que pasan por el origen. Los ejes se identifican con x, y y z y se elige una dirección positiva para cada eje de coordenadas, así como una unidad de longitud para medir distancias (figura 9*a*). Cada par de ejes de coordenadas determina un plano denominado ***plano de coordenadas***. Estos planos se denominan ***plano xy***, ***plano xz*** y ***plano yz***. A cada punto P en el espacio tridimensional corresponde una terna de números (x, y, z) denominados ***coordenadas de P***, como sigue: Por P se hacen pasar tres planos paralelos a los planos de coordenadas, y los puntos de intersección de estos planos con los tres ejes de coordenadas se denotan por X, Y y Z (figura 9*b*).

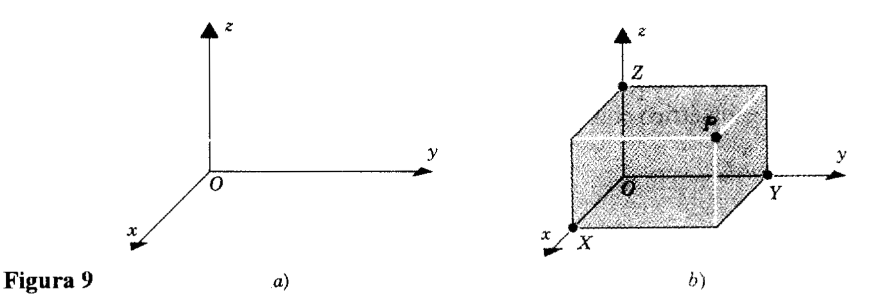


Figura 9

Las coordenadas de P se definen como las longitudes con signo

$$x = OX, y = OY, z = OZ$$

En la figura 10 se muestra la gráfica de los puntos cuyas coordenadas son (4, 5, 6) y (−3, 2, −4).

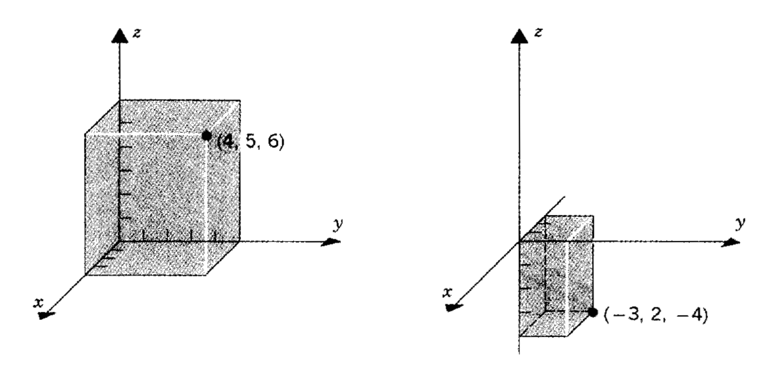


Figura 10

Los sistemas de coordenadas rectangulares en el espacio tridimensional se clasifican en dos categorías: ***izquierdos*** y ***derechos***. Un sistema derecho tiene la propiedad de que un tornillo normal que apunta en la dirección positiva del eje z debe avanzar si el eje x positivo se hace girar 90° hacia el eje y positivo (figura 11*a*); el sistema es izquierdo si el tornillo retrocede (figura 11*b*).

OBSERVACIÓN. En este libro sólo se usarán sistemas de coordenadas derechos.

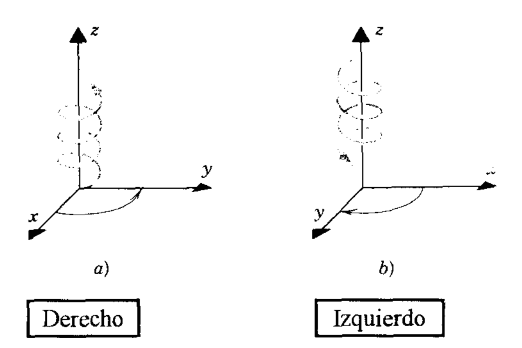


Figura 11

Si, como se observa en la figura 12, un vector **v** en el espacio tridimensional se coloca de modo que su punto inicial esté en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, entonces las coordenadas del punto terminal se denominan ***componentes*** de **v** y se escribe

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son dos vectores en el espacio tridimensional, entonces se pueden usar razonamientos semejantes a los que se siguieron para vectores en el plano a fin de establecer los siguientes resultados.

> **v** y **w** son equivalentes si y sólo si $v_1 = w_1, v_2 = w_2, v_3 = w_3$.
> $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.
> $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$, donde k es cualquier escalar.

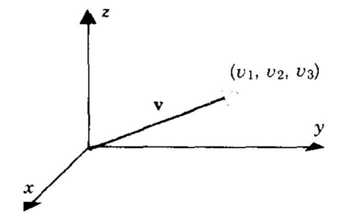


Figura 12

Ejemplo 1 Si $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ y $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$, entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3), \qquad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4), \qquad -\mathbf{w} = (-4, -2, -1)$$
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1) \quad \Delta$$

Algunas veces un vector se coloca de modo que su punto inicial no esté en el origen. Si el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ tiene como punto inicial a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y como punto terminal $P_2(x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Es decir, las componentes de $\overrightarrow{P_1P_2}$ se obtienen al restar las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto terminal. Esto se puede ver usando la figura 1; el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ es la diferencia de los vectores $\overrightarrow{OP_2}$ y $\overrightarrow{OP_1}$, de modo que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

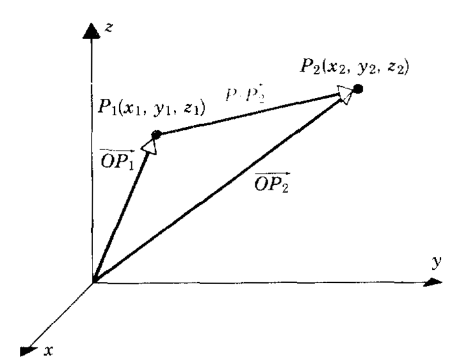


Figura 13

Ejemplo 2 Las componentes del vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ con punto inicial $P_1(2, -1, 4)$ y punto terminal $P_2(7, 5, -8)$ son

$$\mathbf{v} = (7 - 2, 5 - (-1), (-8) - 4) = (5, 6, -12) \quad \Delta$$

En el espacio bidimensional, el vector con punto inicial $P_1(x_1, y_1)$ y punto terminal $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

TRASLACIÓN DE EJES

Las soluciones de muchos problemas se pueden simplificar trasladando los ejes de coordenadas para obtener nuevos ejes paralelos a los originales.

En la figura 14*a*, los ejes de un sistema de coordenadas *xy* se han trasladado para obtener un sistema *x'y'* cuyo origen *O'* está en el punto $(x, y) = (k, l)$. Un punto *P* en el espacio bidimensional ahora tiene las dos coordenadas (x, y) y (x', y'). Para ver cómo se relacionan las coordenadas, considerar el vector $\overrightarrow{O'P}$ (figura 14*b*). En el sistema *xy*, su punto inicial está en (k, l) y su punto terminal

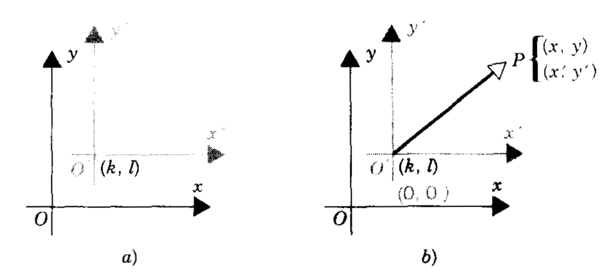


Figura 14

está en (x, y), de modo que $\overrightarrow{O'P} = (x - k, y - l)$. En el sistema $x'y'$, su punto inicial está en $(0, 0)$ y su punto terminal está en (x', y'), de modo que $\overrightarrow{O'P} = (x', y')$. Por consiguiente,

$$\boxed{x' = x - k \qquad y' = y - l}$$

Estas fórmulas se denominan ***ecuaciones de traslación***.

Ejemplo 3 Suponer que un sistema de coordenadas xy se traslada para obtener un sistema de coordenadas $x'y'$ cuyo origen tiene las coordenadas $(k, l) = (4, 1)$.

a) Encontrar las coordenadas $x'y'$ del punto cuyas coordenadas xy son $P(2, 0)$.
b) Encontrar las coordenadas xy del punto cuyas coordenadas $x'y'$ son $Q(-1, 5)$.

Solución de a). Las ecuaciones de traslación son

$$x' = x - 4 \qquad y' = y - 1$$

de modo que las coordenadas $x'y'$ de $P(2, 0)$ son $x' = 2 - 4 = -2$ y $y' = 0 - 1 = -1$.

Solución de b). Las ecuaciones de traslación en *a)* se pueden volver a escribir como

$$x = x' + 4 \qquad y = y' + 1$$

de modo que las coordenadas xy de Q son $x = -1 + 4 = 3$ y $y = 5 + 1 = 6$. Δ

En el espacio tridimensional, las ecuaciones de traslación son

$$\boxed{x' = x - k \qquad y' = y - l \qquad z' = z - m}$$

donde (k, l, m) son las coordenadas xyz del origen $x'y'z'$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.1

1. Trazar un sistema de coordenadas derecho y localizar los puntos cuyas coordenadas son

a) (3, 4, 5) b) (−3, 4, 5) c) (3, −4, 5) d) (3, 4, −5)
e) (−3, −4, 5) f) (−3, 4, −5) g) (3, −4, −5) h) (−3, −4, −5)
i) (−3, 0, 0) j) (3, 0, 3) k) (0, 0, −3) l) (0, 3, 0)

2. Trazar los siguientes vectores con los puntos iniciales ubicados en el origen:

a) $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$ b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$ c) $\mathbf{v}_3 = (-4, -3)$ d) $\mathbf{v}_4 = (5, -4)$ (e) $\mathbf{v}_5 = (3, 0)$
f) $\mathbf{v}_6 = (0, -7)$ g) $\mathbf{v}_7 = (3, 4, 5)$ h) $\mathbf{v}_8 = (3, 3, 0)$ i) $\mathbf{v}_9 = (0, 0, -3)$

3. Encontrar las componentes del vector que tiene punto inicial P_1 y punto terminal P_2.

a) $P_1(4, 8)$, $P_2(3, 7)$ b) $P_1(3, -5)$, $P_2(-4, -7)$ c) $P_1(-5, 0)$, $P_2(-3, 1)$
d) $P_1(0, 0)$, $P_2(a, b)$ e) $P_1(3, -7, 2)$, $P_2(-2, 5, -4)$ f) $P_1(-1, 0, 2)$, $P_2(0, -1, 0)$
g) $P_1(a, b, c)$, $P_2(0, 0, 0)$ h) $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(a, b, c)$

4. Encontrar un vector **u** diferente de cero cuyo punto inicial es $P(-1, 3, -5)$ tal que
a) **u** tiene la misma dirección que $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$.
b) **u** tiene dirección opuesta a la de $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$.

5. Encontrar un vector u diferente de cero cuyo punto terminal es $Q(3, 0, -5)$ tal que
a) u tiene la misma dirección que $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$.
b) u tiene dirección opuesta a la de $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$.

6. Sean $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$ y $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$. Encontrar las componentes de

a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ c) $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$ d) $5(\mathbf{v} - 4\mathbf{u})$ e) $-3(\mathbf{v} - 8\mathbf{w})$ f) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

7. Sean **u**, **v** y **w** los vectores del ejercicio 6. Encontrar las componentes del vector x que satisface a $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$.

8. Sean **u**, **v** y **w** los vectores del ejercicio 6. Encontrar los escalares $c1$, $c2$ y $c3$ tales que

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = (2, 0, 4)$$

9. Demostrar que no existen los escalares $c1$, $c2$ y $c3$ tales que

$$c_1(-2, 9, 6) + c_2(-3, 2, 1) + c_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4)$$

10. Encontrar todos los escalares $c1$, $c2$ y $c3$ tales que

$$c_1(1, 2, 0) + c_2(2, 1, 1) + c_3(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

11. Sean P el punto $(2, 3, -2)$ y Q el punto $(7, -4, 1)$.
a) Encontrar el punto medio del segmento de recta que une a P y Q.
b) Encontrar el punto sobre el segmento de recta que une a P y Q y está a $\frac{3}{4}$ de la distancia de P a Q.

12. Suponer que la traslación de un sistema de coordenadas xy se hace para obtener un sistema de coordenadas $x'y'$ cuyo origen O' tiene las coordenadas $(2, -3)$.
a) Encontrar las coordenadas $x'y'$ del punto P cuyas coordenadas xy son $(7, 5)$.
b) Encontrar las coordenadas xy del punto Q cuyas coordenadas $x'y'$ son $(-3, 6)$.
c) Trazar los ejes de coordenadas xy y $x'y'$ y localizar los puntos P y Q.

13. Suponer que un sistema de coordenadas xyz se traslada para obtener un sistema de coordenadas $x'y'z'$. Sea v un vector cuyas componentes son $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en el sistema xyz. Demostrar que **v** tiene las mismas componentes en el sistema $x'y'z'$.

14. Encontrar las componentes de **u**, **v**, **u** + **v** y **u** − **v** de los vectores que se muestran en la figura 15.

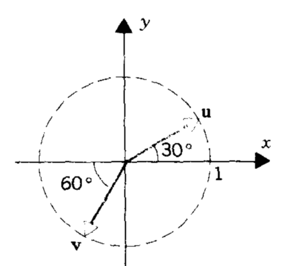


Figura 15

15. Demostrar geométricamente que si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, entonces $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$. (Limitar la demostración al caso $k > 0$ que se ilustra en la figura 8. La demostración completa requiere de varios casos que dependen del signo de k y del cuadrante en que se encuentra el vector.)

3.2 NORMA DE UN VECTOR: ARITMÉTICA VECTORIAL

En esta sección se establecerán las reglas básicas de la aritmética vectorial.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES VECTORIALES

En el siguiente teorema se enumeran las propiedades más importantes de los vectores en los espacios bidimensional y tridimensional.

Teorema 3.2.1. *Si* **u**, **v** *y* **w** *son vectores en el espacio bidimensional o en el espacio tridimensional y k y l son escalares, entonces se cumplen las siguientes relaciones.*

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *b)* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ *d)* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

e) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$ *f)* $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

g) $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ *h)* $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Antes de explicar la demostración, se observa que se han desarrollado dos métodos para el estudio de los vectores: el *geométrico*, en el que los vectores se representan por flechas o segmentos de rectas dirigidos, y el *analítico*, donde los vectores se

representan por parejas o ternas de números denominados componentes. Como consecuencia, las ecuaciones del teorema 3.2.1 se pueden demostrar geométrica o analíticamente. Para ilustrar este hecho, el inciso *b*) se demostrará de ambas formas. Las demás demostraciones se dejan como ejercicio.

Demostración del inciso a) (*analítica*). La demostración se hará para vectores en el espacio tridimensional; la demostración para el espacio bidimensional es semejante. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entonces

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\
&= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2, [u_3 + v_3] + w_3) \\
&= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2], u_3 + [v_3 + w_3]) \\
&= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})
\end{aligned}
$$

Demostración del inciso b) (*geométrica*). Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ cuyas representaciones $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{RS}$ se muestran en la figura 1. Entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{QS} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \overrightarrow{PS}$$

También,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{PR} \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \overrightarrow{PS}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad \square$$

OBSERVACIÓN. En vista del inciso *b*) de este teorema, el símbolo $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ está bien definido, ya que la misma suma se obtiene sin importar dónde se escriban paréntesis. Además, si los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se colocan "punta con cola", entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ es el vector que va del punto inicial de $\mathbf{u}$ al punto final de $\mathbf{w}$ (figura 1).

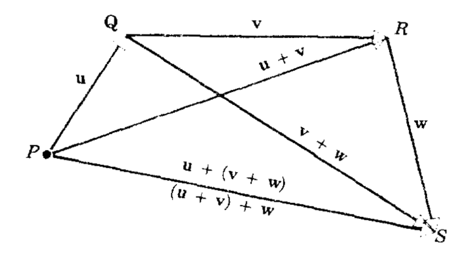


Figura 1 Los vectores $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ y $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ son iguales.

NORMA DE UN VECTOR

La ***longitud*** de un vector **u** a menudo se denomina ***norma*** de **u** y se denota por $\|\mathbf{u}\|$. De acuerdo con el teorema de Pitágoras se concluye que la norma de un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ en el espacio bidimensional es

$$\boxed{\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \tag{1}$$

(Figura 2*a*). Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector en el espacio tridimensional. Usando la figura 2*b* y dos aplicaciones del teorema de Pitágoras se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= (OR)^2 + (RP)^2 \\ &= (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2 \\ &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \tag{2}$$

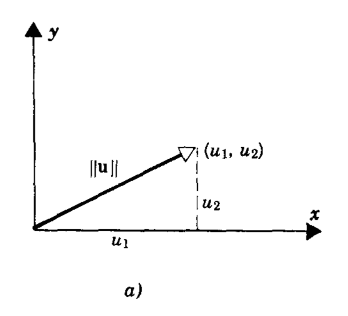


Figura 2 *a)* *b)*

Un vector de norma 1 se denomina ***vector unitario***.

Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos en el espacio tridimensional, entonces la ***distancia*** d entre los puntos es la norma del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ (figura 3). Ya que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

por (2) se concluye que

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \tag{3}$$

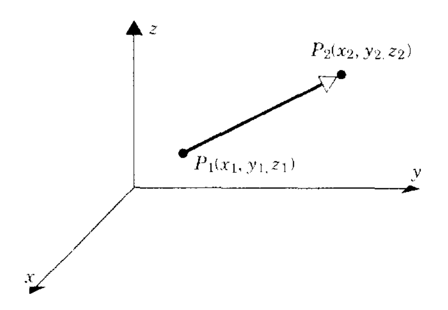


Figura 3 La distancia entre P_1 y P_2 es la norma del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.

De manera semejante, si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos en el espacio bidimensional, entonces la distancia entre ellos está dada por

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{4}$$

Ejemplo 1 La norma del vector $\mathbf{u} = (-3, 2, 1)$ es

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

La distancia d entre los puntos $P_1(2, -1, -5)$ y $P_2(4, -3, 1)$ es

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11} \quad \Delta$$

Por la definición del producto $k\mathbf{u}$, la longitud del vector $k\mathbf{u}$ es k veces la longitud de $\mathbf{u}$. Expresada como ecuación, esta proposición establece que

$$\boxed{\|k\mathbf{u}\| = |k|\,\|\mathbf{u}\|} \tag{5}$$

Esta útil fórmula se aplica tanto en el espacio tridimensional como en el bidimensional.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.2

1. Encontrar la norma de $\mathbf{v}$.

   a) $\mathbf{v} = (4, -3)$ b) $\mathbf{v} = (2, 3)$ c) $\mathbf{v} = (-5, 0)$
   d) $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$ e) $\mathbf{v} = (-7, 2, -1)$ f) $\mathbf{v} = (0, 6, 0)$

2. Encontrar la distancia entre P_1 y P_2.

   a) $P_1(3, 4)$, $P_2(5, 7)$ b) $P_1(-3, 6)$, $P_2(-1, -4)$
   c) $P_1(7, -5, 1)$, $P_2(-7, -2, -1)$ d) $P_1(3, 3, 3)$, $P_2(6, 0, 3)$

3. Sean $\mathbf{u} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$, $\mathbf{w} = (3, 6, -4)$. En cada inciso evaluar la expresión dada.

a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ c) $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$

d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ e) $\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ f) $\left\|\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$

4. Sea $\mathbf{v} = (-1, 2, 5)$. Encontrar todos los escalares k tales que $\|k\mathbf{v}\| = 4$.

5. Sean $\mathbf{u} = (7, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (9, 6, 6)$, $\mathbf{w} = (2, 1, -8)$, $k = -2$ y $l = 5$. Comprobar que estos vectores y escalares satisfacen las igualdades expresadas en el teorema 3.2.1.

a) inciso *b*). b) inciso *e*).
c) inciso *f*). d) inciso *g*).

6. a) Demostrar que si $\mathbf{v}$ es cualquier vector diferente de cero, entonces

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

es un vector unitario.

b) Usar el resultado del inciso a) para encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $\mathbf{v} = (3, 4)$.

c) Usar el resultado del inciso a) para encontrar un vector unitario cuya dirección sea opuesta a la del vector $\mathbf{v} = (-2, 3, -6)$.

7. a) Demostrar que las componentes del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en la figura 4 son $v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos\theta$ y $v_2 = \|\mathbf{v}\|$ sen θ.

b) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ los vectores de la figura 5. Usar el resultado del inciso a) para encontrar las componentes de $4\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$.

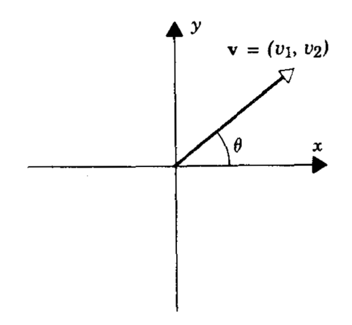


Figura 4

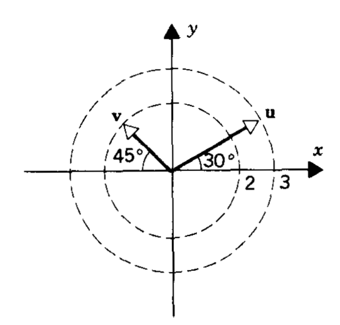


Figura 5

8. Sean $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\mathbf{p} = (x, y, z)$. Describir el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los cuales $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| = 1$.

9. Demostrar geométricamente que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en el espacio bidimensional o en el espacio tridimensional, entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

10. Demostrar analíticamente los incisos *a*), *c*) y *e*) del teorema 3.2.1.

11. Demostrar analíticamente los incisos *d*), *g*) y *h*) del teorema 3.2.1.

12. Demostrar geométricamente el inciso *f*) del teorema 3.2.1.

3.3 PRODUCTO PUNTO: PROYECCIONES

En esta sección se analizará un método para multiplicar vectores en los espacios bidimensional o tridimensional y se proporcionarán algunas aplicaciones de esta multiplicación a la geometría.

PRODUCTO PUNTO DE VECTORES

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero en el espacio bidimensional o en el espacio tridimensional, y suponer que estos vectores se colocan de modo que sus puntos iniciales coinciden. Por ***ángulo entre* u *y* v** se entiende el ángulo θ determinado por **u** y **v** que satisface $0 \le \theta \le \pi$ (figura 1).

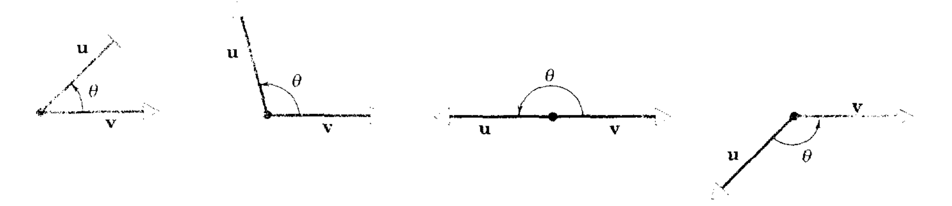


Figura 1 El ángulo θ entre **u** y **v** satisface a $0^{\circ} \le \theta \le \pi$.

Definición. Si **u** y **v** son vectores en el espacio bidimensional o el espacio tridimensional y θ es el ángulo entre **u** y **v**, entonces el ***producto punto*** o ***producto interior euclidiano*** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ se define como

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\begin{cases}\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta & \text{si } \mathbf{u}\neq\mathbf{0} \text{ y } \mathbf{v}\neq\mathbf{0}\\ 0 & \text{si } \mathbf{u}=\mathbf{0} \text{ o } \mathbf{v}=\mathbf{0}\end{cases} \tag{1}$$

Ejemplo 1 Como se muestra en la figura 2, el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ y $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$ es 45°. Así,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta=(\sqrt{0^2+0^2+1^2})(\sqrt{0^2+2^2+2^2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2 \quad \Delta$$

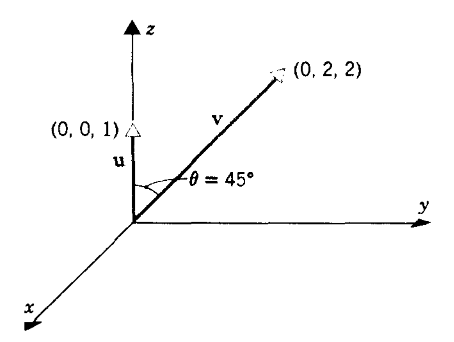


Figura 2

FORMULA DE LAS COMPONENTES PARA EL PRODUCTO PUNTO

Para efectos de cálculo es deseable contar con una fórmula que exprese el producto punto de dos vectores en términos de las componentes de los vectores. La fórmula se obtendrá para vectores en el espacio tridimensional; la obtención para vectores en el espacio bidimensional es semejante.

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores diferentes de cero. Si, como se muestra en la figura 3, θ es el ángulo entre **u** y **v**, entonces la ley de los cosenos da

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{2}$$

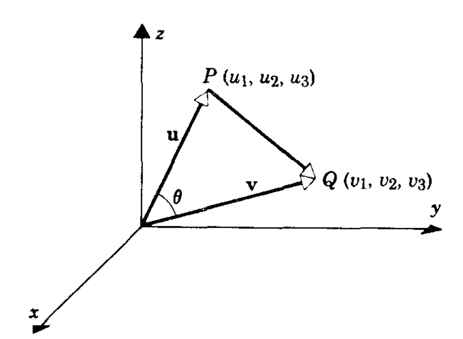


Figura 3

Como $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, (2) se puede volver a escribir como

$$\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

o bien,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

Al sustituir,

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

y

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

después de simplificar se obtiene

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3} \tag{3}$$

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ son dos vectores en el espacio bidimensional, entonces la fórmula correspondiente es

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2} \tag{4}$$

CÁLCULO DEL ÁNGULO ENTRE VECTORES

Si **u** y **v** son vectores diferentes de cero, entonces la fórmula (1) se puede escribir como

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}} \tag{5}$$

Ejemplo 2 Considerar los vectores

$$\mathbf{u} = (2, -1, 1) \text{ y } \mathbf{v} = (1, 1, 2)$$

Encontrar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y determinar el ángulo θ entre **u** y **v**.

Solución.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (1)(2) = 3$$

Para los vectores dados se tiene $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$, de modo que por (5)

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Así, $\theta = 60^0$. Δ

Ejemplo 3 Encontrar el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus aristas.

Solución. Sea k la longitud de una arista, y se introduce un sistema de coordenadas como se muestra en la figura 4.

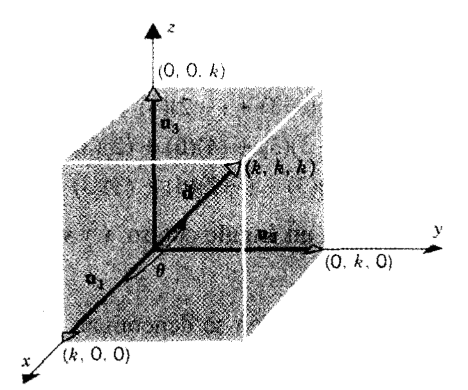


Figura 4

Si se hace que $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$ y $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$, entonces el vector

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

es una diagonal del cubo. El ángulo θ entre **d** y la arista $\mathbf{u}_1$ satisface

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\,\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Así,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54°44' \quad \Delta$$

El siguiente teorema muestra cómo se puede usar el producto punto para obtener información sobre el ángulo entre dos vectores; también establece una importante relación entre la norma y el producto punto.

Teorema 3.3.1. *Sean* **u** *y* **v** *vectores en el espacio bidimensional o el espacio tridimensional.*

a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$; *es decir,* $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$.

b) Si los vectores **u** *y* **v** *son diferentes de cero y* θ *es el ángulo entre ellos, entonces*

θ *es agudo*	*si y sólo si*	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$.
θ *es obtuso*	*si y sólo si*	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$.
$\theta = \pi/2$	*si y sólo si*	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Demostración de a). Como el ángulo θ entre **v** y **v** es 0, se tiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta = \|\mathbf{v}\|^2 \cos 0 = \|\mathbf{v}\|^2$$

Demostración de b). Como θ satisface $0 \le \theta \le \pi$, se concluye que: θ es agudo si y sólo si $\cos\theta > 0$; θ es obtuso si y sólo si cos < 0; y $\theta = \pi/2$ si y sólo si $\cos\theta = 0$. Pero cos θ tiene el mismo signo que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ya que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \cos\theta$, $\|\mathbf{u}\| > 0$ y $\|\mathbf{v}\| > 0$. Así, se concluye el resultado. □

Ejemplo 4 Si $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (-3, 4, 2)$ y $\mathbf{w} = (3, 6, 3)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} &= (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} &= (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0\end{aligned}$$

Por consiguiente, **u** y **v** forman un ángulo obtuso, **v** y **w** forman un ángulo agudo y **u** y **w** son perpendiculares. Δ

VECTORES ORTOGONALES

Los vectores perpendiculares también se denominan vectores ***ortogonales***. A la luz del teorema 3.3.1*b*, dos vectores *diferentes de cero* son ortogonales si y sólo si su producto punto es cero. Si se acuerda en considerar a **u** y **v** como perpendiculares cuando alguno o los dos son cero, entonces se puede afirmar sin excepción que *dos vectores* **u** y **v** *son ortogonales (perpendiculares) si y sólo si* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Para indicar que **u** y **v** son vectores ortogonales, se escribe $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Ejemplo 5 Demostrar que en el espacio bidimensional, el vector $\mathbf{n} = (a, b)$ diferente de cero es perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.

Solución. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos diferentes que pertenecen a la recta dada, de modo que

$$\begin{aligned}ax_1 + by_1 + c &= 0\\ ax_2 + by_2 + c &= 0\end{aligned} \qquad (6)$$

Como el vector $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ está a lo largo de la recta (figura 5), basta demostrar que **n** y $\overrightarrow{P_1P_2}$ son perpendiculares. Pero al restar las ecuaciones en (6) se obtiene

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

que puede representarse en la forma

$$(a, b)\cdot(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2} = 0$$

Así, **n** y $\overrightarrow{P_1P_2}$ son perpendiculares. Δ

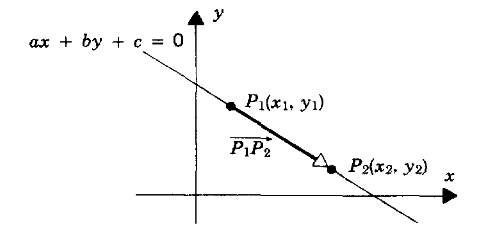


Figura 5

En el siguiente teorema se enumeran las propiedades más importantes del producto punto. Estas propiedades son de utilidad en los cálculos donde intervienen vectores.

Teorema 3.3.2. *Si u, v y w son vectores en el espacio bidimensional o en el espacio tridimensional y k es cualquier escalar, entonces:*

a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
b) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
c) $k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})$
d) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} > 0$ *si* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *y* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0$ *si* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Demostración. Se demostrará *c*) para vectores en el espacio tridimensional, y las demás demostraciones se dejan como ejercicio. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$; entonces

$$\begin{aligned} k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3 \\ &= (k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} \end{aligned}$$

De manera semejante,

$$k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v}) \quad \square$$

PROYECCIONES ORTOGONALES

En muchas aplicaciones se desea "descomponer" un vector **u** en una adición de dos sumandos, uno paralelo a un vector específico diferente de cero **a** y el otro perpendicular a **a**. Si **u** y **a** se colocan de modo que sus puntos iniciales coincidan en un punto Q, entonces es posible descomponer el vector **u** como sigue (figura 6): Trazar una perpendicular desde la punta de **u** hasta la recta que pasa por **a**, y obtener el vector $\mathbf{w}_1$ que va de Q al pie de esta perpendicular. Luego, formar la diferencia

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$

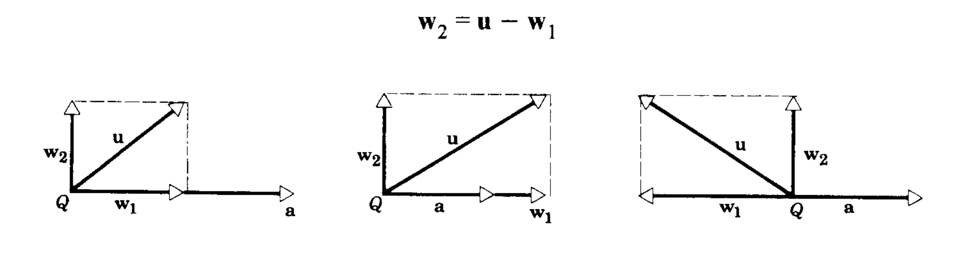


Figura 6 El vector **u** es la suma de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ es paralelo a **a** y $\mathbf{w}_2$ es perpendicular a **a**.

Como se indica en la figura 6, el vector $\mathbf{w}_1$ es paralelo a **a**, el vector $\mathbf{w}_2$ es perpendicular a **a**, y

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$$

El vector $\mathbf{w}_1$ se denomina ***proyección ortogonal de* u *sobre* a**, o algunas veces, ***componente vectorial de* u *a lo largo de* a**. Se denota por

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} \tag{7}$$

El vector $\mathbf{w}_2$ se denomina ***componente vectorial de* u *ortogonal a* a**. Como se tiene que $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$, este vector se puede escribir en notación (7) como

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$$

En el siguiente teorema se proporcionan fórmulas para calcular los vectores $\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$.

Teorema 3.3.3. Si **u** y **a** son vectores en el espacio bidimensional o en el espacio tridimensional y si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$ *(componente vectorial de* **u** *a lo largo de* **a**)

$$\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$ *(componente vectorial de* **u** *ortogonal a* **a**)

Demostración. Sean $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$. Como $\mathbf{w}_1$ es paralelo a **a**, debe ser un múltiplo escalar de **a**, de modo que se puede escribir en la forma $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{a}$. Así,

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2 \tag{8}$$

Tomando el producto punto en ambos miembros de (8) con **a** y aplicando los teoremas 3.3.1*a* y 3.3.2 se obtiene

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = (k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2)\cdot\mathbf{a} = k\|\mathbf{a}\|^2 + \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{a} \tag{9}$$

Pero $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a} = 0$, ya que $\mathbf{w}_2$ es perpendicular a **a**; de modo que (9) produce

$$k = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

Como $\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 = k\mathbf{a}$, se obtiene

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \quad \square$$

Ejemplo 6 Sean $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ y $\mathbf{v} = (4, -1, 2)$. Encontrar la componente vectorial de **u** a lo largo de **a** y la componente vectorial de **u** ortogonal a **a**.

Solución.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$
$$\|\mathbf{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

Así, la componente vectorial de **u** a lo largo de **a** es

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \tfrac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right)$$

y la componente vectorial de **u** ortogonal a **a** es

$$\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = (2, -1, 3) - \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right) = \left(-\tfrac{6}{7}, -\tfrac{2}{7}, \tfrac{11}{7}\right)$$

Como verificación, el lector puede comprobar que los vectores $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$ y **a** son perpendiculares si demuestra que su producto punto es cero. Δ

Una fórmula para calcular la longitud de la componente vectorial de **u** a lo largo de **a** se puede obtener escribiendo

$$\|\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}\| = \left\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\right\|$$

$$= \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right|\|\mathbf{a}\| \qquad \boxed{\text{Fórmula (5) de la sección 3.2}}$$

$$= \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\| \qquad \boxed{\text{Ya que } \|\mathbf{a}\|^2 > 0}$$

con lo que se obtiene

$$\boxed{\|\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|}} \tag{10}$$

Si θ es el ángulo entre **u** y **a**, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{a}\| \cos\theta$, de modo que (10) también puede escribirse como

$$\boxed{\|\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|\,|\cos\theta|} \tag{11}$$

(Comprobar.) Una interpretación geométrica de este resultado se proporciona en la figura 7.

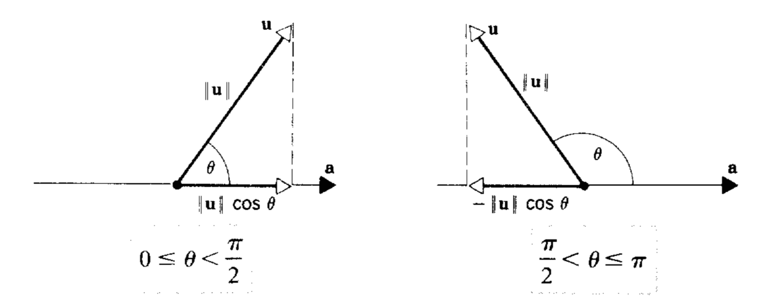


Figura 7

Como ejemplo, se usarán métodos vectoriales en la obtención de una fórmula para calcular la distancia de un punto en el plano a una recta.

Ejemplo 7 Encontrar una fórmula para calcular la distancia D entre el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y la recta $ax + by + c = 0$.

Solución. Sea $Q(x_1, y_1)$ cualquier punto en la recta, y el vector

$$\mathbf{n} = (a, b)$$

se coloca de modo que su punto inicial esté en Q.

Por el ejemplo 5, el vector **n** es perpendicular a la recta (figura 8). Como se indica en la figura, la distancia D es igual a la longitud de la proyección ortogonal de $\overrightarrow{QP}_0$ sobre **n**; así, por (10), se tiene que

$$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{QP}_0\| = \frac{|\overrightarrow{QP}_0 \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Pero

$$\overrightarrow{QP}_0 = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$$
$$\overrightarrow{QP}_0 \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)$$
$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

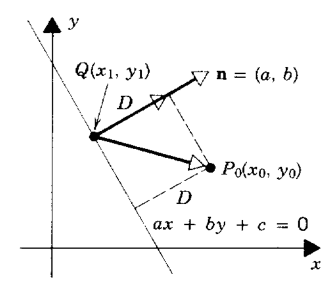


Figura 8

de modo que

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{12}$$

Dado que el punto $Q(x_1, y_1)$ está sobre la recta, sus coordenadas satisfacen la ecuación de ésta, de modo que

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

o bien,

$$c = -ax_1 - by_1$$

Al sustituir esta expresión en (12) se obtiene la fórmula

$$\boxed{D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \quad \Delta \tag{13}$$

Ejemplo 8 Por la fórmula (13) se concluye que la distancia D del punto $(1, -2)$ a la recta $3x + 4y - 6 = 0$ es

$$D = \frac{|(3)(1) + 4(-2) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5} \quad \Delta$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.3

1. Encontrar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

   a) $\mathbf{u} = (2, 3)$, $\mathbf{v} = (5, -7)$ b) $\mathbf{u} = (-6, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 0)$
   c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$ d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, -4)$

2. En cada inciso del ejercicio 1, encontrar el coseno del ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

3. Determinar si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ forman un ángulo agudo, un ángulo obtuso o son ortogonales.

   a) $\mathbf{u} = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, 0, -3)$ b) $\mathbf{u} = (0, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
   c) $\mathbf{u} = (-6, 0, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 6)$ d) $\mathbf{u} = (2, 4, -8)$, $\mathbf{v} = (5, 3, 7)$

4. Encontrar la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{a}$.
   a) $\mathbf{u} = (6, 2)$, $\mathbf{a} = (3, -9)$ b) $\mathbf{u} = (-1, -2)$, $\mathbf{a} = (-2, 3)$
   c) $\mathbf{u} = (3, 1, -7)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$ d) $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (4, 3, 8)$

5. En cada inciso del ejercicio 4, encontrar la componente vectorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{a}$.

6. En cada inciso, encontrar $\|\text{proy}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}\|$.

   a) $\mathbf{u} = (1, -2)$, $\mathbf{a} = (-4, -3)$ b) $\mathbf{u} = (5, 6)$, $\mathbf{a} = (2, -1)$
   c) $\mathbf{u} = (3, 0, 4)$, $\mathbf{a} = (2, 3, 3)$ d) $\mathbf{u} = (3, -2, 6)$, $\mathbf{a} = (1, 2, -7)$

7. Sean $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 6, 3)$ y $k = -4$. Comprobar el teorema 3.3.2 para estas cantidades.

8. a) Demostrar que $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{w} = (-b, a)$ son vectores ortogonales.
b) Usar el resultado del inciso a) para encontrar dos vectores que sean ortogonales a $\mathbf{v} = (2, -3)$.
c) Encontrar dos vectores unitarios que sean ortogonales a $(-3, 4)$.

9. Sean $\mathbf{u} = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (5, -1)$ y $\mathbf{w} = (7, 1)$. Evaluar las expresiones
a) $\mathbf{u} \cdot (7\mathbf{v} + \mathbf{w})$ b) $\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}\|$ c) $\|\mathbf{u}\|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ d) $(\|\mathbf{u}\|\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$

10. Explicar por qué cada una de las siguientes expresiones carece de sentido.
a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ c) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$ d) $k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$

11. Usar vectores para hallar los cosenos de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $(0, -1)$, $(1, -2)$ y $(4, 1)$.

12. Demostrar que $A(3, 0, 2)$, $B(4, 3, 0)$ y $C(8, 1, -1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. ¿En qué vértice está el ángulo recto?

13. Suponer que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. ¿Se concluye que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$? Explicar la respuesta.

14. Sean $\mathbf{p} = (2, k)$ y $\mathbf{q} = (3, 5)$. Encontrar k tal que
a) $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ sean paralelos.
b) $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ sean ortogonales.
c) el ángulo entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ sea $\pi/3$.
d) el ángulo entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ sea $\pi/4$.

15. Usar la fórmula (13) para calcular la distancia entre el punto y la recta.
a) $4x + 3y + 4 = 0$; $(-3, 1)$
b) $y = -4x + 2$; $(2, -5)$
c) $3x + y = 5$; $(1, 8)$

16. Establecer la identidad $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

17. Establecer la identidad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$.

18. Encontrar el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus caras.

19. Sean **i**, **j** y **k** vectores unitarios a lo largo de los ejes positivos x, y y z de un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio tridimensional. Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$ es un vector diferente de cero, entonces los ángulos α, β, y γ entre **v** y los vectores **i**, **j** y **k**, respectivamente, se denominan ***ángulos directores*** de **v** (figura 9), y los números $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se denominan ***cosenos directores*** de **v**.
a) Demostrar que $\cos\alpha = a/\|\mathbf{v}\|$.
b) Encontrar $\cos\beta$ y $\cos\gamma$.
c) Demostrar que $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
d) Demostrar que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

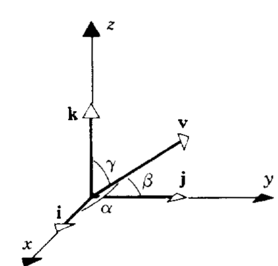


Figura 9

20. Usar el resultado del ejercicio 19 para calcular, hasta el grado más próximo, los ángulos que forma una diagonal de una caja de dimensiones 10 cm × 15 cm × 25 cm con las aristas de la caja. [*Nota.* Se requiere una calculadora o tablas trigonométricas.]

21. Con referencia al ejercicio 19, demostrar que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores perpendiculares en el espacio tridimensional si y sólo si sus cosenos directores satisfacen

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$$

22. Demostrar que si $\mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{w}_1$ como a $\mathbf{w}_2$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$ para todos los escalares k_1 y k_2.

23. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores diferentes de cero en el espacio bidimensional o en el espacio tridimensional, y sean $k = \|\mathbf{u}\|$ y $l = \|\mathbf{v}\|$. Demostrar que el vector $\mathbf{w} = l\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ biseca el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

3.4 PRODUCTO CRUZ

En muchas aplicaciones de vectores a problemas de geometría, física e ingeniería es de interés construir en el espacio tridimensional un vector que sea perpendicular a dos vectores dados. En esta sección se introducirá un tipo de multiplicación vectorial con que se obtiene ese vector.

PRODUCTO CRUZ DE VECTORES

Definición. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son vectores en el espacio tridimensional, entonces el ***producto cruz*** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es el vector definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

o, en notación de determinantes,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{1}$$

OBSERVACIÓN. En vez de memorizar (1), las componentes de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se pueden obtener como sigue:

- Se forma la matriz 2 × 3

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

cuyo primer renglón contiene las componentes de $\mathbf{u}$ y cuyo segundo renglón contiene las componentes de $\mathbf{v}$.

- Para encontrar la primera componente de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, eliminar la primera columna y evaluar el determinante; para encontrar la segunda componente, eliminar la segunda columna y evaluar el negativo del determinante; para encontrar la tercera componente, eliminar la tercera columna y evaluar el determinante.

Ejemplo 1 Encontrar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ y $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (2, -7, -6) \quad \Delta$$

Existe una diferencia importante entre el producto punto y el producto cruz de dos vectores: el producto punto es un escalar y el producto cruz es un vector. El siguiente teorema proporciona algunas relaciones importantes entre el producto punto y el producto cruz, y también muestra que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.

Teorema 3.4.1. *Si* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$ *son vectores en el espacio tridimensional, entonces*

a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *es ortogonal a* $\mathbf{u}$)
b) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *es ortogonal a* $\mathbf{v}$)
c) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (*Identidad de Lagrange*)*
d) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ (*relación entre los productos cruz y punto*)
e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ (*relación entre los productos cruz y punto*)

****Joseph Louis Lagrange*** **(1736-1813).** Matemático y astrónomo francés-italiano. Lagrange, hijo de un funcionario público, nació en Turín, Italia. (En el registro bautismal su nombre aparece como Giuseppe Lodovico Lagrangia.) Aunque su padre quería que fuese abogado, Lagrange se sintió atraído por las matemáticas y la astronomía después de leer una memoria del astrónomo Halley. A los 16 años de edad empezó a estudiar matemáticas por su cuenta y a los 19 fue contratado como profesor en la Royal Artillery School en Turín. El año siguiente resolvió algunos problemas famosos aplicando nuevos métodos que florecieron en una rama de las matemáticas denominada cálculo de variaciones. Estos métodos y las aplicaciones que Lagrange hizo de éstos a problemas de mecánica celeste eran tan monumentales que aproximadamente a los 25 años de edad Lagrange ya era considerado por muchos de sus contemporáneos como el más grande matemático existente. Uno de los trabajos más famosos de Lagrange es un documento denominado *Mécanique Analytique*, en el que reduce la teoría de la mecánica a unas cuantas fórmulas generales a partir de las cuales es posible derivar todas las demás ecuaciones necesarias.

Es históricamente interesante el hecho de que el padre de Lagrange incursionó infructuosamente en varias empresas financieras, de modo que su familia estaba obligada a vivir con bastante modestia. Lagrange mismo afirmó que si su familia tuviera dinero, su vocación no hubieran sido las matemáticas.

Napoleón era un gran admirador de Lagrange y lo cubrió de honores: lo hizo conde, senador y le otorgó la orden de la Legión de Honor. A pesar de su fama, Lagrange siempre fue un hombre tímido y modesto. A su fallecimiento, fue sepultado con honores en El Panteón parisino.

Demostración de a). Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3)\cdot(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)\\ &= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)\\ &= 0\end{aligned}$$

Demostración de b). Semejante a la demostración de *a*).

Demostración de c). Como

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \tag{2}$$

y

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \tag{3}$$

La demostración se puede completar "multiplicando" los miembros derechos de (2) y (3) y comprobando su igualdad.

Demostración de d) y e). Ver los ejercicios 26 y 27. ▯

Ejemplo 2 Considerar los vectores

$$\mathbf{u} = (1, 2, -2) \text{ y } \mathbf{v} = (3, 0, 1)$$

En el ejemplo 1 se demostró que

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

Como

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

y

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**, como garantiza el teorema 3.4.1. Δ

En el siguiente teorema se enumeran las principales propiedades aritméticas del producto cruz.

Teorema 3.4.2. *Si* **u**, **v** *y* **w** *son vectores cualesquiera en el espacio tridimensional y k es cualquier escalar, entonces*

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
d) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
e) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
f) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Las demostraciones se concluyen de inmediato a partir de la fórmula (1) y de las propiedades de los determinantes; por ejemplo, a) puede demostrarse como:

Demostración de a). Al intercambiar **u** y **v** en (1) se intercambian los renglones de los tres determinantes del miembro derecho de (1), y por tanto se cambia el signo de cada componente en el producto cruz. Así, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. □

Las demostraciones de los demás incisos se dejan como ejercicio.

Ejemplo 3 Considerar los vectores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Cada uno de estos vectores tiene longitud igual a 1 y está a lo largo de un eje de coordenadas (figura 1). Se denominan ***vectores unitarios normales*** en el espacio tridimensional. Todo vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en el espacio tridimensional puede expresarse en términos de **i**, **j**, **k**, ya que es posible escribir

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

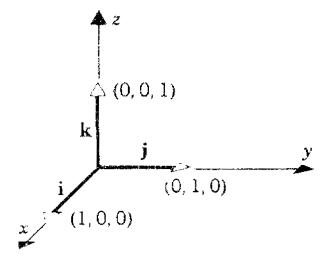


Figura 1 Vectores unitarios estándares.

Por ejemplo,

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

A partir de (1) se obtiene

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\left(\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right)=(0,0,1)=\mathbf{k}\quad\Delta$$

El lector no debe tener ningún problema para obtener los siguientes resultados:

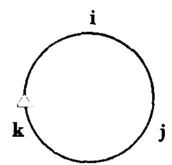


Figura 2

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\qquad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$$

La figura 2 es útil para recordar los resultados anteriores. Con referencia a esta figura, si la circunferencia se recorre en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, el producto cruz de dos vectores consecutivos es el siguiente vector que se encuentra, y si se recorre en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, el producto cruz de dos vectores consecutivos es el negativo del siguiente vector que se encuentra.

FÓRMULA DEL DETERMINANTE PARA EL PRODUCTO CRUZ

También vale la pena observar que un producto cruz se puede representar simbólicamente en forma de un determinante 3 × 3:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\mathbf{k}\qquad(4)$$

Por ejemplo, si $\mathbf{u}=(1,2,-2)$ y $\mathbf{v}=(3,0,1)$, entonces

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&-2\\3&0&1\end{vmatrix}=2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

lo que concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 1.

Advertencia. En general, no es cierto que $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$. Por ejemplo,

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

y

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$

de modo que

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})\neq(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}$$

Por el teorema 3.4.1 se sabe que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores diferentes de cero, es posible demostrar que la dirección

de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se puede determinar aplicando la siguiente "regla de la mano derecha"* (figura 3): Sea θ el ángulo entre **u** y **v**, y suponer que **u** se hace girar por el ángulo θ hasta que coincide con **v**. Si los dedos de la mano derecha se disponen de modo que apunten en la dirección de rotación, entonces el pulgar indica (aproximadamente) la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

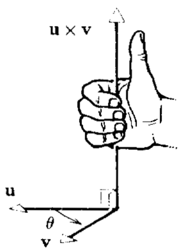


Figura 3

El lector encontrará instructivo practicar esta regla con los productos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO CRUZ

Si **u** y **v** son vectores en el espacio tridimensional, entonces la norma de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tiene una interpretación geométrica útil. La identidad de Lagrange, proporcionada en el teorema 3.4.1, establece que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \tag{5}$$

Si θ denota el ángulo entre **u** y **v**, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \cos\theta$, de modo que (5) se puede escribir de nuevo como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta} \tag{6}$$

Pero $\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$ es la altura del paralelogramo determinado por **u** y **v** (figura 4). Por tanto,

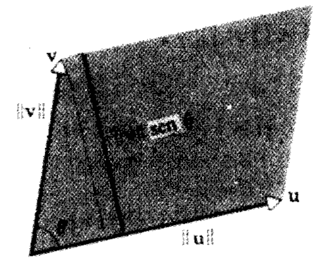


Figura 4

*Recordar que en este texto se acordó considerar sólo sistemas de coordenadas derechos. En caso de que se hubieran usado sistemas izquierdos, aquí se hubiera aplicado una "regla de la mano izquierda".

por (6), el área A de este paralelogramo está dada por

$$A = (\text{base})(\text{altura}) = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \text{ sen } \theta\, \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

Este resultado es correcto inclusive si **u** y **v** son colineales, ya que el paralelogramo determinado por **u** y **v** tiene área cero y por (6) se sabe que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ porque en este caso $\theta = 0$. Por tanto, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.4.3. *Si* **u** y **v** *son vectores en el espacio tridimensional, entonces* **u** $\times$ **v** *es igual al área del paralelogramo determinado por* **u** *y* **v**.

Ejemplo 4 Encontrar el área del triángulo determinado por los puntos $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$ y $P_3(0, 4, 3)$.

Solución. El área A del triángulo es $\frac{1}{2}$ del área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$ (figura 5). Usando el método analizado en el ejemplo 2 de la sección 3.1, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$. Se concluye que

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

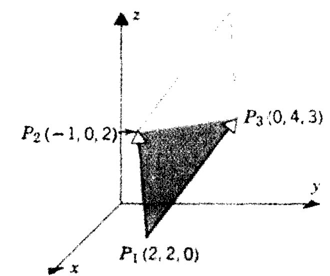


Figura 5

y en consecuencia,

$$A = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \tfrac{1}{2}(15) = \tfrac{15}{2} \quad \Delta$$

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Definición. Si **u**, **v** y **w** son vectores en el espacio tridimensional, entonces

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

se denomina ***triple producto escalar*** de **u**, **v** y **w**.

El triple producto escalar de $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_2)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_2)$ se puede calcular a partir de la fórmula

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Lo anterior se concluye por la fórmula (4), ya que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right) \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Ejemplo 5 Calcular el triple producto escalar $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ de los vectores

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \qquad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Solución. Por (7),

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 60 + 4 - 15 = 49 \quad \Delta\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. El símbolo $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ carece de sentido, ya que no es posible formar el producto cruz de un escalar y un vector. Así, no hay ambigüedad si se escribe $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ en vez de $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. Sin embargo, por claridad en general se conservará el paréntesis.

Por (7) se concluye que

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})$$

ya que los determinantes 3×3 que representan estos productos se pueden obtener uno a partir de otro mediante dos intercambios en los renglones. (Comprobar.) Es posible recordar estas relaciones moviendo los vectores **u**, **v** y **w** en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de los vértices del triángulo que se muestra en la figura 6.

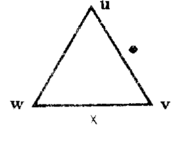


Figura 6

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS DETERMINANTES

El siguiente teorema proporciona una interpretación geométrica útil de los determinantes 2×2 y 3×3.

Teorema 3.4.4.
a) El valor absoluto del determinante

$$det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

es igual al área del paralelogramo en el espacio bidimensional determinado por los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *y* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. *(Ver la figura 7a.)*

b) El valor absoluto del determinante

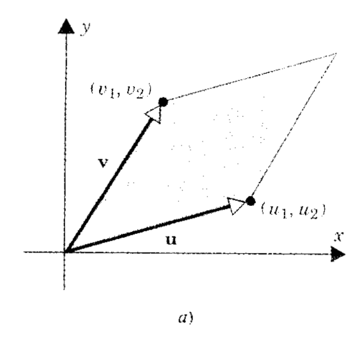
$$det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

es igual al volumen del paralelepípedo en el espacio tridimensional determinado por los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *y* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. *(Ver la figura 7b.)*

Demostración de a). La clave de la demostración es aplicar el teorema 3.4.3. Sin embargo, este teorema es válido para vectores en el espacio tridimensional, mientras que $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ son vectores en el espacio bidimensional. Para superar este "problema de dimensión", **u** y **v** se considerarán como vectores en el plano xy de un sistema de coordenadas xyz (figura 8*a*), en cuyo caso estos vectores se expresan como $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$. Así,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k}$$

Ahora, por el teorema 3.4.3 y el hecho de que $\|\mathbf{k}\| = 1$, se concluye que el área A del paralelogramo determinado por **u** y **v** es



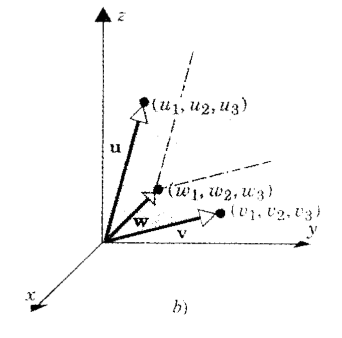


Figura 7

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k} \right\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right| \|\mathbf{k}\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

con lo que se completa la demostración.

Demostración de b). Como se observa en la figura 8*b*, se considera que la base del paralelepípedo determinado por **u**, **v** y **w** es el paralelogramo determinado por **u** y **v**. De acuerdo con el teorema 3.4.3 se concluye que el área de la base es $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ y, como se ilustra en la figura 8*b*, la altura h

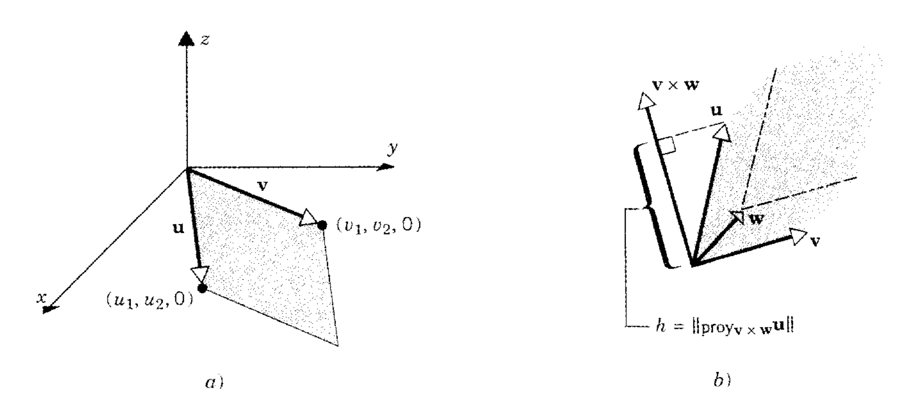


Figura 8 *a*) *b*)

del paralelepípedo es la longitud de la proyección ortogonal de **u** sobre $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. En consecuencia, por la fórmula (10) de la sección 3.3,

$$h = \|\text{proy}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\, \mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

Se concluye que el volumen V del paralelepípedo es

$$V = (\text{área de la base}) \cdot \text{altura} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

de modo que por (7),

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

con lo que se completa la demostración. □

OBSERVACIÓN. Si V denota el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores **u**, **v** y **w**, entonces por el teorema 3.4.4 y la fórmula (7) se concluye que

$$V = \begin{bmatrix} \text{volumen del paralelepípedo} \\ \text{determinado por } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{w} \end{bmatrix} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \tag{8}$$

Con base en este hecho y en el teorema 3.3.1*b* se puede deducir que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

donde el signo + o − resulta si **u** forma un ángulo agudo u obtuso con $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

La fórmula (8) conduce a una prueba útil para averiguar si tres vectores dados son coplanares. Como tres vectores no coplanares determinan un paralelepípedo de volumen positivo, por (8) se concluye que $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = 0$ si y sólo si los vectores **u**, **v** y **w** son coplanares. Así, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.4.5. *Si los vectores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *y* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *tienen el mismo punto inicial, entonces están en el mismo plano si y sólo si*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

INDEPENDENCIA DEL PRODUCTO CRUZ Y DE LAS COORDENADAS

Inicialmente, se definió a un vector como un segmento de recta dirigido o una flecha en el espacio bidimensional o en el espacio tridimensional; los sistemas de coordenadas y las componentes se introdujeron después para simplificar los cálculos con vectores. Así, un vector posee "existencia matemática" sin importar si se ha introducido en un sistema de coordenadas. Además, las componentes de un vector no están determinadas solamente por el vector; también dependen del sistema de coordenadas elegido. Por ejemplo, en la figura 9 se indican un vector fijo **v** en el plano y dos sistemas de coordenadas diferentes. En el sistema de coordenadas *xy*, las componentes de **v** son (1, 1) y en el sistema *x'y'*, son $(\sqrt{2}, 0)$.

Este hecho plantea una cuestión importante sobre la definición de producto cruz. Como el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se definió en términos de las componentes de **u** y **v** y como estas componentes dependen del sistema de coordenadas elegido, parece posible que dos vectores *fijos* **u** y **v** puedan tener productos cruz distintos en sistemas de coordenadas diferentes. Afortunadamente, no sucede así. Para ver lo anterior, simplemente basta recordar que

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular tanto a **u** como a **v**.
- La orientación de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está determinada por la regla de la mano derecha.
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$.

Estas tres propiedades determinan completamente el vector **u** × **v**; las dos primeras propiedades determinan la dirección y la tercera determina la longitud. Como estas propiedades de **u** × **v** dependen sólo de las longitudes y posiciones relativas de **u** y **v** no del sistema de coordenadas derecho particular que se esté usando, el vector **u** × **v** permanece sin cambio si se introduce un sistema de coordenadas derecho diferente. Así, se dice que la definición de **u** × **v** es ***independiente de las coordenadas***. Este resultado es importante para los físicos e ingenieros, quienes a menudo trabajan con muchos sistemas de coordenadas en el mismo problema.

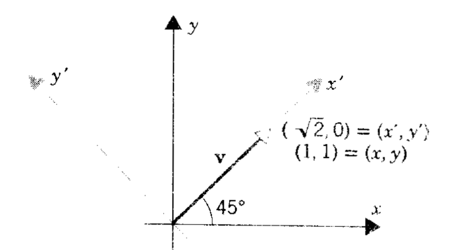


Figura 9

Ejemplo 6 Considerar dos vectores perpendiculares **u** y **v**, cada uno de longitud 1 (como se muestra en la figura 10*a*). Si se introduce un sistema de coordenadas *xyz* como se muestra en la figura 10*b*, entonces

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) = \mathbf{i} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$$

de modo que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

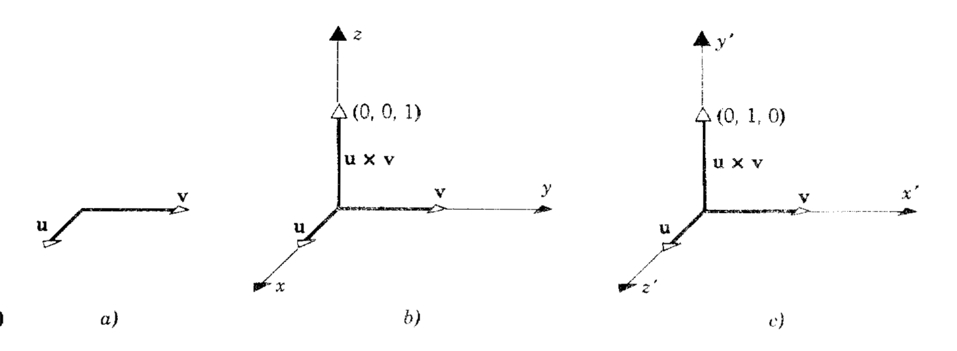


Figura 10

Sin embargo, si se introduce un sistema de coordenadas *x′y′z′* como se muestra en la figura 10*c*, entonces

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}$$

de modo que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

Pero por las figuras 10*b* y 10*c* es evidente que el vector (0, 0, 1) en el sistema *xyz* es el mismo que el vector (0, 1, 0) en el sistema *x'y'z'*. Así, se obtiene el mismo vector **u** x **v** si los cálculos se realizan con coordenadas del sistema *xyz* o con coordenadas del sistema *x'y'z'*. Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.4

1. Sean $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$ y $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$. Calcular
a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$ f) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$

2. Encontrar un vector que sea ortogonal tanto a **u** como a **v**.
a) $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$ b) $\mathbf{u} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$

3. Encontrar el área del paralelogramo determinado por **u** y **v**.
a) $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$ b) $\mathbf{u} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$
c) $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$, $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$

4. Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son *P*, *Q* y *R*.
a) $P(2, 6, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(4, 6, 2)$ b) $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, 4)$, $R(6, 1, 8)$

5. Comprobar el teorema 3.4.1 para los vectores $\mathbf{u} = (4, 2, 1)$ y $\mathbf{v} = (-3, 2, 7)$.

6. Comprobar el teorema 3.4.2 para $\mathbf{u} = (5, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (6, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$ y $k = -5$.

7. ¿Cuál es el error en la expresión $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$?

8. Encontrar el triple producto escalar $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.
a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 5)$
b) $\mathbf{u} = (3, -1, 6)$, $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$, $\mathbf{w} = (5, -1, 2)$

9. Suponer que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$. Encontrar
a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$ c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ d) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ f) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w})$

10. Encontrar el volumen del paralelepípedo cuyos lados son **u**, **v**, y **w**.
a) $\mathbf{u} = (2, -6, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$ b) $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 4)$

11. Determinar si **u**, **v**, y **w** son coplanares cuando se colocan de modo que coincidan sus puntos iniciales.
a) $\mathbf{u} = (-1, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (5, -4, 0)$
b) $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (4, -1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$
c) $\mathbf{u} = (4, -8, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$, $\mathbf{w} = (3, -4, 12)$

12. Encontrar todos los vectores unitarios paralelos al plano *xy* que son perpendiculares al vector $(3, -1, 2)$.

13. Encontrar todos los vectores unitarios en el plano determinado por $\mathbf{u} = (3, 0, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ que son perpendiculares al vector $\mathbf{w} = (1, 2, 0)$.

14. Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ y $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$. Demostrar que

$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

15. Simplificar $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

16. Usar el producto cruz para encontrar el seno del ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = (2, 3, -6)$ y $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$.

17. a) Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, 0, 1)$, $B(0, 2, 3)$ y $C(2, 1, 0)$.
b) Usar el resultado del inciso a) para encontrar la longitud de la altura del vértice C al lado AB.

18. Demostrar que si $\mathbf{u}$ es un vector que va de cualquier punto de una recta a un punto P que no pertenece a la recta y $\mathbf{v}$ es un vector paralelo a ésta, entonces la distancia entre P y la recta está definida por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| / \|\mathbf{v}\|$.

19. Usar el resultado del ejercicio 18 para encontrar la distancia entre el punto P y la recta que pasa por los puntos A y B:
a) $P(-3, 1, 2)$, $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 3, -4)$ b) $P(4, 3, 0)$, $A(2, 1, -3)$, $B(0, 2, -1)$

20. Demostrar: Si θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, entonces $\tan \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

21. Considerar el paralelepípedo con lados $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (1, 3, 3)$.
a) Encontrar el área de la cara determinada por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$.
b) Encontrar el ángulo entre $\mathbf{u}$ y el plano que contiene la cara determinada por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. [*Nota.* El ***ángulo entre un vector y un plano*** se define como el ángulo θ entre el vector y la normal al plano para la que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.]

22. Encontrar un vector $\mathbf{n}$ perpendicular al plano determinado por los puntos $A(0, -2, 1)$, $B(1, -1, -2)$ y $C(-1, 2, 0)$. [Ver la nota del ejercicio 21.]

23. Sean $\mathbf{m}$ y $\mathbf{n}$ vectores cuyas componentes en el sistema xyz de la figura 10 son $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ y $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$.
a) Encontrar las componentes de $\mathbf{m}$ y $\mathbf{n}$ en el plano $x'y'z'$ de la figura 10.
b) Calcular $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ usando las componentes del sistema xyz.
c) Calcular $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ usando las componentes del sistema $x'y'z'$.
d) Demostrar que los vectores obtenidos en b) y c) son los mismos.

24. Demostrar las siguientes identidades
a) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$

25. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores diferentes de cero en el espacio tridimensional que tienen el mismo punto inicial, pero de modo que ningún par de ellos es colineal. Demostrar que
a) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está en el plano determinado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ está en el plano determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

26. Demostrar el inciso *d*) del teorema 3.4.1. [***Sugerencia.*** Demostrar primero el resultado en el caso en que $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$, luego cuando $\mathbf{w} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y luego cuando $\mathbf{w} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Por último, hacer la demostración para un vector cualesquiera $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ escribiendo $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$.]

27. Demostrar el inciso *e*) del teorema 3.4.1. [***Sugerencia.*** Aplicar el inciso a) del teorema 3.4.2 al resultado del inciso d) del teorema 3.4.1.]

28. Sean $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (3, -1, 2)$. Calcular $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ usando el ejercicio 26; luego, comprobar el resultado efectuando el cálculo directamente.

29. Demostrar: Si **a**, **b**, **c** y **d** están el mismo plano, entonces $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$.

30. En geometría de sólidos existe un teorema que establece que el volumen de un tetraedro es 1/3(área de la base) · (altura). Usar este resultado para demostrar que el volumen del tetraedro cuyos lados son los vectores **a**, **b** y **c** es $1/6\, \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (figura 11).

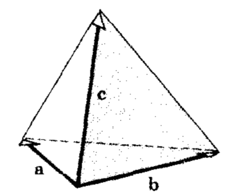


Figura 11

31. Usar el resultado del ejercicio 30 para encontrar el volumen del tetraedro con vértices P, Q, R y S.

a) $P(-1, 2, 0)$, $Q(2, 1, -3)$, $R(1, 0, 1)$, $S(3, -2, 3)$
b) $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, -1)$, $R(3, 4, 0)$, $S(-1, -3, 4)$

32. Demostrar los incisos *a*) y *b*) del teorema 3.4.2.

33. Demostrar los incisos *c*) y *d*) del teorema 3.4.2.

34. Demostrar los incisos *e*) y *f*) del teorema 3.4.2.

3.5 RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

En esta sección se usarán los vectores para obtener ecuaciones de rectas y planos en el espacio tridimensional, y estas ecuaciones se utilizarán para resolver algunos problemas de geometría básicos.

PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

En geometría analítica plana, una recta se puede especificar dando su pendiente y uno de sus puntos. De manera semejante, un plano en el espacio tridimensional se puede especificar proporcionando su inclinación y especificando uno de sus puntos. Un método conveniente para describir la inclinación es especificar un vector diferente de cero (denominado ***normal***) que es perpendicular al plano.

Suponer que se desea encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y cuya normal es el vector $\mathbf{n} = (a, b, c)$ diferente de cero. De la figura 1 resulta evidente que el plano consta precisamente de los puntos $P(x, y, z)$ para los cuales el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$; es decir,

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \tag{1}$$

Como $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, la ecuación (1) se puede escribir como

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0} \tag{2}$$

La expresión (2) se denomina forma ***punto-normal*** de la ecuación de un plano.

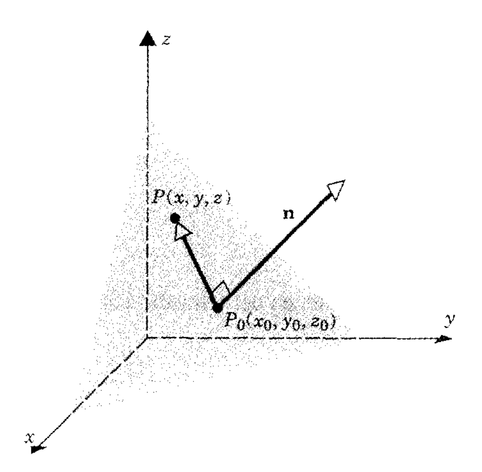


Figura 1

Ejemplo 1 Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto (3, −1, 7) y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$.

Solución. Por (2), una forma punto-normal es

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0 \quad \Delta$$

Multiplicando y agrupando términos, (2) puede volver a escribirse como

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde a, b, c y d son constantes y no todas las constantes a, b y c son iguales a cero. Así, la ecuación en el ejemplo 1 se puede escribir de nuevo como

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

Como se demuestra en el siguiente teorema, toda ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano en el espacio tridimensional.

Teorema 3.5.1. *Si a, b, c y d son constantes y no todas las constantes a, b y c son iguales a cero, entonces la gráfica de la ecuación*

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \tag{3}$$

es un plano cuya normal es el vector $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

La ecuación (3) es una ecuación lineal en x, y y z; se denomina ***forma general*** de la ecuación del plano.

Demostración. Por hipótesis, no todos los coeficientes a, b y c son iguales a cero. Suponer, por el momento, que $a \neq 0$. Entonces la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ puede escribir de nuevo en la forma $a(x + (d/a)) + by + cz = 0$. Pero esta es una forma punto-normal del plano que pasa por el punto $(-d/a, 0, 0)$ y cuya normal es $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ o $c \neq 0$. Una modificación directa del razonamiento anterior permite manejar estos otros casos. ▯

De la misma manera en que la solución de un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= k_1 \\ cx + dy &= k_2 \end{aligned}$$

lineales corresponde a los puntos de intersección de las rectas $ax + by = k_1$ y $cx + dy = k_2$ en el plano xy, así las soluciones de un sistema

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k_1 \\ dx + ey + fz &= k_2 \\ gx + hy + iz &= k_3 \end{aligned} \tag{4}$$

corresponden a los puntos de intersección de los tres planos $ax + by + cz = k_1$, $dx + ey + fz = k_2$ y $gx + hy + iz = k_3$.

En la figura 2 se ilustran algunas de las posibilidades geométricas que ocurren cuando (4) no tiene solución, tiene exactamente una solución o tiene infinidad de soluciones.

Ejemplo 2 Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ y $P_3(3, -1, 2)$.

Solución. Como los tres puntos están en el plano, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación general $ax + by + cz + d = 0$ del plano. Así,

$$\begin{aligned} a + 2b - c + d &= 0 \\ 2a + 3b + c + d &= 0 \\ 3a - b + 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$a = -\tfrac{9}{16}t, \qquad b = -\tfrac{1}{16}t, \qquad c = \tfrac{5}{16}t, \qquad d = t$$

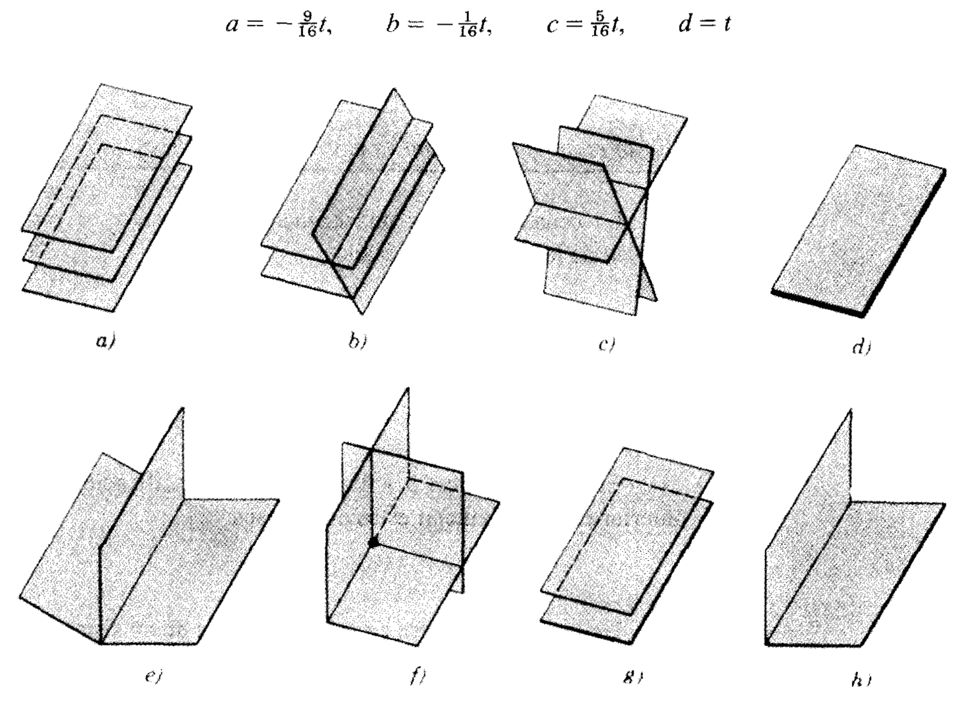


Figura 2 *a*) No existe solución (3 planos paralelos). *b*) No existe solución (2 planos paralelos). *c*) No existe solución (3 planos sin intersección común). *d*) Infinidad de soluciones (3 planos coincidentes). *e*) Infinidad de soluciones (3 planos que se intersecan en una recta). *f*) Una solución (3 planos que se cortan en un punto). *g*) No existe solución (2 planos coincidentes paralelos a un tercer plano). *h*) Infinidad de soluciones (2 planos coincidentes que se intersecan con un tercer plano).

Haciendo $t = -16$, por ejemplo, se obtiene la ecuación buscada

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

Se observa que con cualquier otra elección de t se obtiene un múltiplo de esta ecuación, de modo que con cualquier valor de $t \neq 0$ también se obtiene una ecuación válida del plano.

Otra solución. Como $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ y $P_3(3, -1, 2)$ pertenecen al plano, entonces los vectores $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, 2)$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, -3, 3)$ son paralelos al plano. Por consiguiente, $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (9, 1, -5)$ es normal al plano, ya que es perpendicular a $\overrightarrow{P_1P_2}$ y a $\overrightarrow{P_1P_3}$. Con base en este hecho y como P_1 pertenece al plano, una forma punto-normal para la ecuación del plano es

$$9(x - 1) + (y - 2) - 5(z + 1) = 0$$

o

$$9x + y - 5z - 16 = 0 \quad \Delta$$

FORMA VECTORIAL DE LA ECUACIÓN DE UN PLANO

La notación vectorial proporciona otra manera útil para escribir la forma punto-normal de la ecuación de un plano; con referencia a la figura 3, sean $\mathbf{r} = (x, y, z)$ el vector que va del origen al punto $P(x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ el vector que va del origen al punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, y $\mathbf{n} = (a, b, c)$ un vector normal al plano (figura 3).

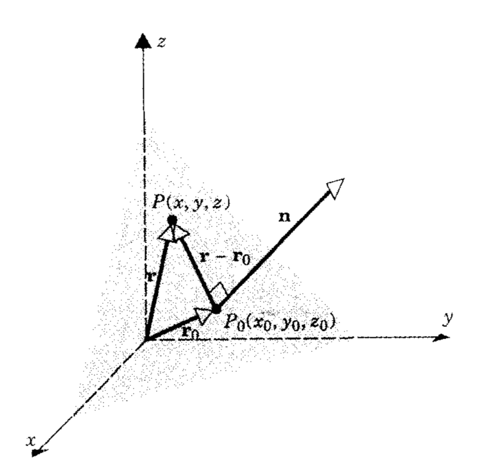


Figura 3

Entonces $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, de modo que la fórmula (1) se puede volver a escribir como

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0} \tag{5}$$

Esta expresión se denomina ***forma vectorial de la ecuación de un plano***.

Ejemplo 3 La ecuación

$$(-1, 2, 5) \cdot (x - 6, y - 3, z + 4) = 0$$

es la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto $(6, 3, -4)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = (-1, 2, 5)$. Δ

RECTAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

A continuación se mostrará cómo obtener ecuaciones de rectas en el espacio tridimensional. Suponer que l es la recta en el espacio tridimensional que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector diferente de cero $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Es evidente (figura 4) que l consta precisamente de los puntos $P(x, y, z)$ para los que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\mathbf{v}$; es decir, para los que existe un escalar t tal que

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \tag{6}$$

En términos de componentes, (6) se puede escribir como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$$

de donde se deduce que $x - x_0 = ta$, $y - y_0 = tb$ y $z - z_0 = tc$, de modo que

$$x = x_0 + ta, \qquad y = y_0 + tb, \qquad z = z_0 + tc$$

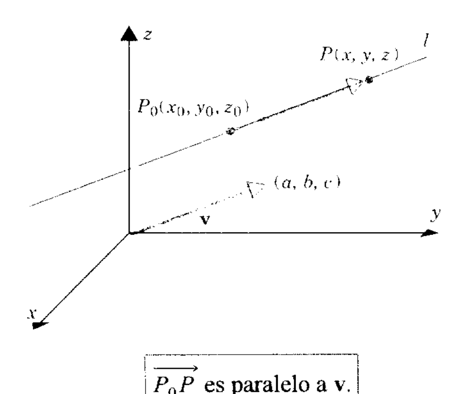


Figura 4 $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a **v**.

Cuando el parámetro t varía de $-\infty$ a $+\infty$, el punto $P(x, y, z)$ describe la recta l. Las ecuaciones

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc \qquad (-\infty < t < +\infty) \tag{7}$$

se denominan ***ecuaciones paramétricas*** de l.

Ejemplo 4 La recta que pasa por el punto $(1, 2, -3)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (4, 5, -7)$ tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = 1 + 4t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -3 - 7t \qquad (-\infty < t < +\infty) \quad \Delta$$

Ejemplo 5

a) Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta l que pasa por los puntos $P_1(2, 4, -1)$ y $P_2(5, 0, 7)$.
b) ¿Dónde corta la recta al plano xy?

Solución a). Como el vector $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -4, 8)$ es paralelo a l y $P_1(2, 4, -1)$ pertenece a l, entonces la recta l está definida por

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 - 4t, \quad z = -1 + 8t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

Solución b). La recta corta al plano xy en el punto en que $z = -1 + 8t = 0$, es decir, donde $t = 1/8$. Sustituyendo este valor de t en las ecuaciones paramétricas de l se obtiene que el punto de intersección es

$$(x, y, z) = (\tfrac{19}{8}, \tfrac{7}{2}, 0) \quad \Delta$$

Ejemplo 6 Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos

$$3x + 2y - 4z - 6 = 0 \text{ y } x - 3y - 2z - 4 = 0$$

Solución. La recta de intersección consta de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 4z &= 6 \\ x - 3y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se obtiene

$$x = \tfrac{26}{11} + \tfrac{16}{11}t, \qquad y = -\tfrac{6}{11} - \tfrac{2}{11}t, \qquad z = t$$

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de l son

$$x = \tfrac{26}{11} + \tfrac{16}{11}t, \quad y = -\tfrac{6}{11} - \tfrac{2}{11}t, \quad z = t \qquad (-\infty < t < +\infty) \quad \Delta$$

FORMA VECTORIAL DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

La notación vectorial da otra forma útil para escribir las ecuaciones paramétricas de una recta; con referencia a la figura 3, sean $\mathbf{r} = (x, y, z)$ el vector que va del origen al punto $P(x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ el vector que va del origen al punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, y $\mathbf{v} = (a, b, c)$ un vector paralelo a la recta (figura 5). Entonces $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, de modo que la fórmula (6) se puede volver a escribir como

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$$

Tomando en cuenta el intervalo de variación de los valores t, la fórmula anterior se puede escribir de nuevo como

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \qquad (-\infty < t < +\infty)} \tag{8}$$

Esta expresión se denomina ***forma vectorial de la ecuación de una recta*** en el espacio tridimensional.

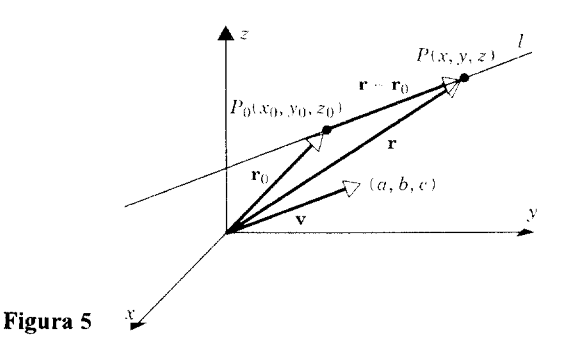


Figura 5

Ejemplo 7 La ecuación

$$(x, y, z) = (-2, 0, 3) + t(4, -7, 1) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(-2, 0, 3)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (4, -7, 1)$. Δ

ALGUNOS PROBLEMAS DONDE INTERVIENE LA DISTANCIA

Esta sección termina con el estudio de dos "problemas de distancia" básicos en el espacio tridimensional:

> ***Problemas***
> a) Encontrar la distancia entre un punto y un plano.
> b) Encontrar la distancia entre dos planos paralelos.

Ambos problemas están relacionados. Si se puede encontrar la distancia entre un punto y un plano, entonces es posible encontrar la distancia entre planos paralelos al calcular la distancia entre uno de los planos y un punto arbitrario P_0 en el otro plano (figura 6).

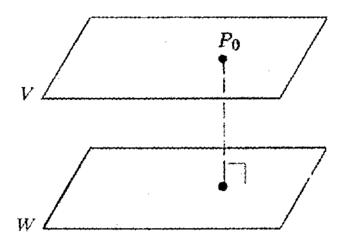


Figura 6 La distancia entre los planos paralelos V y W es igual a la distancia entre P_0 y W.

Teorema 3.5.2. *La distancia D entre un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y el plano $ax + by + cz + d = 0$ es*

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{9}$$

Demostración. Sea $Q(x_1, y_1, z_1)$ cualquier punto en el plano. El vector normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ se coloca de modo que su punto inicial esté en Q. Como se ilustra en la figura 7, la distancia D es igual a la longitud de la proyección ortogonal de $\overrightarrow{QP_0}$ sobre $\mathbf{n}$. Así, por (10) de la sección 3.3,

$$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{QP_0}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Pero

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$
$$\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$
$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

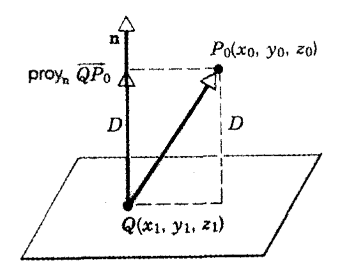


Figura 7

Así,

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{10}$$

Como el punto $Q(x_1, y_1, z_1)$ pertenece al plano, sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano; entonces

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

o

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Sustituyendo esta expresión en (10) se obtiene (9). ☐

OBSERVACIÓN. Nótese la semejanza entre (9) y la fórmula de la distancia entre un punto y una recta en el espacio bidimensional (13) de la sección 3.3.

Ejemplo 8 Encontrar la distancia D entre el punto $(1, -4, -3)$ y el plano $2x - 3y + 6z = -1$.

Solución. Para aplicar (9), primero se vuelve a escribir la ecuación del plano en la forma

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0$$

Entonces

$$D = \frac{|(2)(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7} \quad \Delta$$

Dados dos planos, si se cortan, entonces se pregunta por su recta de intersección (como en el ejemplo 6), o si son paralelos, entonces se pregunta por la distancia entre ellos. El siguiente ejemplo ilustra el segundo problema.

Ejemplo 9 Los planos

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{y} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

son paralelos, ya que sus normales $(1, 2, -2)$ y $(2, 4, -4)$ son vectores paralelos. Encontrar la distancia entre estos planos.

Solución. Para encontrar la distancia D entre los planos, se puede elegir un punto arbitrario en uno de los planos y calcular su distancia al otro plano. Haciendo $y = z = 0$ en la ecuación $x + 2y - 2z = 3$, se obtiene el punto $P_0(3, 0, 0)$ en este plano. Por (9), la distancia entre P_0 y el plano $2x + 4y - 4z = 7$ es

$$D = \frac{|(2)(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6} \quad \Delta$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.5

1. Encontrar una forma punto-normal de la ecuación del plano que pasa por P y cuya normal es $\mathbf{n}$.

a) $P(-1, 3, -2)$; $\mathbf{n} = (-2, 1, -1)$ b) $P(1, 1, 4)$; $\mathbf{n} = (1, 9, 8)$
c) $P(2, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (0, 0, 2)$ d) $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$

2. Escribir en forma general las ecuaciones de los planos del ejercicio 1.

3. Encontrar una forma punto-normal.

a) $-3x + 7y + 2z = 10$ b) $x - 4z = 0$

4. Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos dados.

a) $P(-4, -1, -1)$, $Q(-2, 0, 1)$, $R(-1, -2, -3)$ b) $P(5, 4, 3)$, $Q(4, 3, 1)$, $R(1, 5, 4)$

5. Determinar si los planos son paralelos.

a) $4x - y + 2z = 5$ y $7x - 3y + 4z = 8$
b) $x - 4y - 3z - 2 = 0$ y $3x - 12y - 9z - 7 = 0$
c) $2y = 8x - 4z + 5$ y $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$

6. Determinar si la recta y el plano son paralelos.

a) $x = -5 - 4t$, $y = 1 - t$, $z = 3 + 2t$; $x + 2y + 3z - 9 = 0$
b) $x = 3t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 - t$; $4x - y + 2z = 1$

7. Determinar si los planos son perpendiculares.

a) $3x - y + z - 4 = 0$, $x + 2z = -1$ b) $x - 2y + 3z = 4$, $-2x + 5y + 4z = -1$

8. Determinar si la recta y el plano son perpendiculares.

a) $x = -2 - 4t$, $y = 3 - 2t$, $z = 1 + 2t$; $2x + y - z = 5$
b) $x = 2 + t$, $y = 1 - t$, $z = 5 + 3t$; $6x + 6y - 7 = 0$

9. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y es paralela a $\mathbf{n}$.

a) $P(3, -1, 2)$, $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$ b) $P(-2, 3, -3)$; $\mathbf{n} = (6, -6, -2)$
c) $P(2, 2, 6)$; $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ d) $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$

10. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos dados.

a) $(5, -2, 4)$, $(7, 2, -4)$ b) $(0, 0, 0)$, $(2, -1, -3)$

11. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos dados.

a) $7x - 2y + 3z = -2$ y $-3x + y + 2z + 5 = 0$ b) $2x + 3y - 5z = 0$ y $y = 0$

12. Encontrar la forma vectorial de la ecuación del plano que pasa por P_0 y cuya normal es $\mathbf{n}$.

a) $P_0(-1, 2, 4)$; $\mathbf{n} = (-2, 4, 1)$ b) $P_0(2, 0, -5)$; $\mathbf{n} = (-1, 4, 3)$
c) $P_0(5, -2, 1)$; $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ d) $P_0(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (a, b, c)$

13. Determinar si los planos son paralelos.

a) $(-1, 2, 4)\cdot(x - 5, y + 3, z - 7) = 0$; $(2, -4, -8)\cdot(x + 3, y + 5, z - 9) = 0$
b) $(3, 0, -1)\cdot(x + 1, y - 2, z - 3) = 0$; $(-1, 0, 3)\cdot(x + 1, y - z, z - 3) = 0$

14. Determinar si los planos son perpendiculares.

a) $(-2, 1, 4)\cdot(x - 1, y, z + 3) = 0$; $(1, -2, 1)\cdot(x + 3, y - 5, z) = 0$
b) $(3, 0, -2)\cdot(x + 4, y - 7, z + 1) = 0$; $(1, 1, 1)\cdot(x, y, z) = 0$

15. Encontrar la forma vectorial de la ecuación de la recta que pasa por P_0 y es paralela a $\mathbf{v}$.

a) $P_0(-1, 2, 3)$; $\mathbf{v} = (7, -1, 5)$ b) $P_0(2, 0, -1)$; $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
c) $P_0(2, -4, 1)$; $\mathbf{v} = (0, 0, -2)$ d) $P_0(0, 0, 0)$; $\mathbf{v} = (a, b, c)$

16. Demostrar que la recta

$$x = 0, \quad y = t, \quad z = t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

a) pertenece al plano $6x + 4y - 4z = 0$.
b) es paralela al plano $5x - 3y + 3z = 1$ y está por abajo de éste.
c) es paralela al plano $6x + 2y - 2z = 1$ y está por arriba de éste.

17. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(-2, 1, 7)$ y es perpendicular a la recta $x - 4 = 2t$, $y + 2 = 3t$, $z = -5t$.

18. Encontrar la ecuación del
a) plano xy. b) plano xz. c) plano yz.

19. Encontrar la ecuación del plano que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y es paralelo al
a) plano xy. b) plano yz. c) plano xz.

20. Encontrar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano $7x + 4y - 2z + 3 = 0$.

21. Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -6, 7)$ y es paralelo al plano $5x - 2y + z - 5 = 0$.

22. Encontrar el punto de intersección de la recta

$$x - 9 = -5t, \quad y + 1 = -t, \quad z - 3 = t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

y el plano $2x - 3y + 4z + 7 = 0$.

23. Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta $x = -1 + 3t$, $y = 5 + 2t$, $z = 2 - t$ y es perpendicular al plano $2x - 4y + 2z = 9$.

24. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(2, 4, -1)$ y contiene a la recta de intersección de los planos $x - y - 4z = 2$ y $-2x + y + 2z = 3$.

25. Demostrar que los puntos $(-1, -2, -3)$, $(-2, 0, 1)$, $(-4, -1, -1)$ y $(2, 0, 1)$ pertenecen al mismo plano.

26. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-2, 5, 0)$ y es paralela a los planos $2x + y - 4z = 0$ y $-x + 2y + 3z + 1 = 0$.

27. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(-2, 1, 5)$ y es perpendicular a los planos $4x - 2y + 2z = -1$ y $3x + 3y - 6z = 5$.

28. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(2, -1, 4)$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $4x + 2y + 2z = -1$ y $3x + 6y + 3z = 7$.

29. Encontrar la ecuación del plano que es perpendicular al plano $8x - 2y + 6z = 1$ y pasa por los puntos $P_1(-1, 2, 5)$ y $P_2(2, 1, 4)$.

30. Demostrar que las rectas

$$x = 3 - 2t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

y

$$x = 5 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 7 + t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

son paralelas y encontrar la ecuación del plano que determinan.

31. Encontrar la ecuación del plano que contiene al punto $(1, -1, 2)$ y a la recta $x = t, y = t + 1, z = -3 + 2t$.

32. Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta $x = 1 + t, y = 3t, z = 2t$ y es paralelo a la recta de intersección de los planos $-x + 2y + z = 0$ y $x + z + 1 = 0$.

33. Encontrar la ecuación del plano tal que todos sus puntos equidistan de $(-1, -4, -2)$ y $(0, -2, 2)$.

34. Demostrar que la recta

$$x - 5 = -t, \quad y + 3 = 2t, \quad z + 1 = -5t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

es paralela al plano $-3x + y + z - 9 = 0$.

35. Demostrar que las rectas

$$x - 3 = 4t, \quad y - 4 = t, \quad z - 1 = 0 \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

y

$$x + 1 = 12t, \quad y - 7 = 6t, \quad z - 5 = 3t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

se cortan y encontrar el punto de intersección.

36. Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas del ejercicio 35.

37. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos
a) $-3x + 2y + z = -5$ and $7x + 3y - 2z = -2$
b) $5x - 7y + 2z = 0$ and $y = 0$

38. Demostrar que el plano cuyas coordenadas al origen son $x = a, y = b, z = c$ tiene la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

en el supuesto de que a, b y c son diferentes de cero.

39. Encontrar la distancia entre el punto y el plano.
a) $(3, 1, -2)$; $x + 2y - 2z = 4$
b) $(-1, 2, 1)$; $2x + 3y - 4z = 1$
c) $(0, 3, -2)$; $x - y - z = 3$

40. Encontrar la distancia entre los planos paralelos dados.
a) $3x - 4y + z = 1$ y $6x - 8y + 2z = 3$
b) $-4x + y - 3z = 0$ y $8x - 2y + 6z = 0$
c) $2x - y + z = 1$ y $2x - y + z = -1$

41. Demostrar que si las constantes a, b y c no son cero, entonces la recta

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

consta de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas expresiones se denominan ***ecuaciones simétricas*** de la recta.

42. Encontrar las ecuaciones simétricas de las rectas de los incisos a) y b) del ejercicio 9. [***Nota.*** Ver el ejercicio 41 respecto a la terminología.]

43. En cada inciso, encontrar las ecuaciones de los dos planos cuya intersección es la recta dada.

a) $x = 7 - 4t, \quad y = -5 - 2t, \quad z = 5 + t \qquad (-\infty < t < +\infty)$
b) $x = 4t, \quad y = 2t, \quad z = 7t \qquad (-\infty < t < +\infty)$

[***Sugerencia.*** Cada igualdad en las ecuaciones simétricas de una recta representa un plano que contiene a la recta. Ver el ejercicio 41 respecto a la terminología.]

44. Dos planos que se cortan en el espacio tridimensional determinan dos ángulos de intersección: un ángulo agudo $(0 \leq \theta \leq 90^{\circ})$ y su suplemento $180^{\circ} - \theta$ (figura 8*a*). Si $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son normales diferentes de cero a los planos, entonces el ángulo entre $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ es θ o $180^{\circ} - \theta$, dependiendo de las direcciones de las normales (figura 8*b*). En cada inciso, determinar el ángulo agudo de intersección de los planos, hasta el grado más próximo.

a) $x = 0 \quad$ y $\quad 2x - y + z - 4 = 0$
b) $x + 2y - 2z = 5 \quad$ y $\quad 6x - 3y + 2z = 8$

[***Nota.*** Se requiere calculadora.]

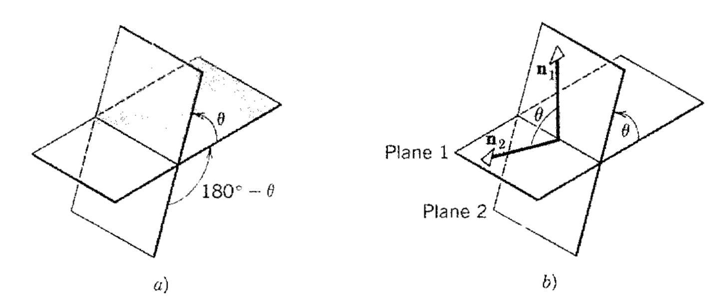
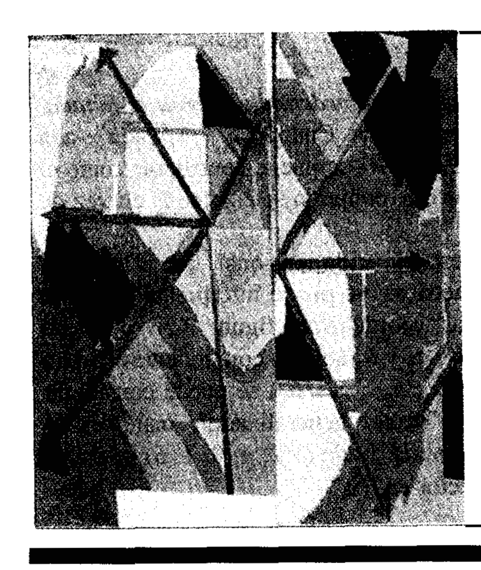


Figura 8

45. Encontrar el ángulo agudo de intersección entre el plano $x - y - 3z = 5$ y la recta $x = 2 - t, y = 2t, z = 3t - 1$ hasta el grado más próximo. [***Sugerencia.*** Ver el ejercicio 44.]



CAPÍTULO 4

ESPACIOS VECTORIALES EUCLIDIANOS

4.1 ESPACIO EUCLIDIANO n DIMENSIONAL

La idea de usar parejas de números para localizar puntos en el plano y ternas de números para localizar puntos en el espacio tridimensional fue explicada con claridad por vez primera a mediados del siglo XVII. *Al final del siglo* XIX *los matemáticos y los físicos comenzaron a darse cuenta de que no era necesario detenerse en las ternas. Se reconoció que las cuádruplas de números* (a_1, a_2, a_3, a_4) *podían considerarse como puntos en el espacio de "tetradimensional", las quíntuplas* $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$ *como puntos en el espacio de "pentadimensional", y así sucesivamente. A pesar de que nuestra representación geométrica se limita al espacio tridimensional, muchos conceptos conocidos se pueden extender más allá del espacio tridimensional trabajando con las propiedades analíticas o numéricas de puntos y vectores en vez de hacerlo con las propiedades geométricas. En esta sección se precisarán con más detalle esas ideas.*

VECTORES EN EL ESPACIO *n* DIMENSIONAL

Definición. Si n es un entero positivo, entonces una ***n-ada ordenada*** es una sucesión de n números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. El conjunto de todas las n-adas ordenadas se denomina espacio ***n dimensional*** y se denota por R^n.

Cuando $n = 2$ o 3, se suelen usar los términos ***pareja ordenada*** o ***terna ordenada***, respectivamente, en vez de 2-ada o 3-ada ordenadas. Cuando $n = 1$, cada n-ada ordenada consta de un número real, de modo que R^1 se puede considerar como el conjunto de los números reales. Para denotar este conjunto se escribe R en vez de R^1.

Quizá el lector observó al estudiar el espacio tridimensional, que el símbolo (a_1, a_2, a_3) tiene dos interpretaciones geométricas: se puede interpretar como un punto, en cuyo caso a_1, a_2 y a_3 son las coordenadas figura 1a), o puede interpretarse como un vector, en cuyo caso a_1, a_2 y a_3 son las componentes (figura 1b). Se deduce así que una n-ada ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se puede considerar como un "punto generalizado" o como un "vector generalizado": matemáticamente, la diferencia carece de importancia. Así, la 5-ada $(-2, 4, 0, 1, 6)$ se puede describir como un punto en R^5 o como un vector en R^5.

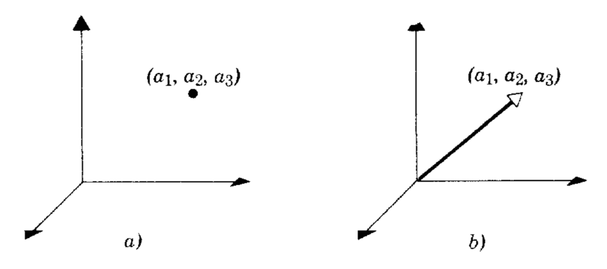


Figura 1 La terna ordenada (a_1, a_2, a_3) se puede interpretar geométricamente como un punto o un vector.

Definición. Dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ en R^n se denominan ***iguales*** si

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$$

La ***suma*** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se define por

$$\boxed{\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)}$$

y si k es cualquier escalar, entonces el ***múltiplo escalar*** $k\mathbf{u}$ se define por

$$\boxed{k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)}$$

Las operaciones de adición y multiplicación escalar en esta definición se denominan ***operaciones normales*** sobre R^n.

El ***vector cero*** en R^n se denota por $\mathbf{0}$ y se define como el vector

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ es cualquier vector en R^n, entonces el ***negativo*** o (***inverso aditivo***) de $\mathbf{u}$ se denota por $-\mathbf{u}$ y se define por

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$$

La ***diferencia*** de vectores en R^n se define por

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$$

o, en términos de las componentes,

$$\boxed{\mathbf{v} - \mathbf{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \ldots, v_n - u_n)}$$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES VECTORIALES EN EL ESPACIO *n* DIMENSIONAL

En el siguiente teorema se enumeran las propiedades aritméticas más importantes de la adición y la multiplicación escalar de vectores en R^n. Todas las demostraciones son fáciles, por lo que se dejan como ejercicios.

Teorema 4.1.1. *Si* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ *y* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots w_n)$ *son vectores en* R^n *y k y l son escalares, entonces*:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$; *es decir,* $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$
e) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
f) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
g) $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Este teorema permite operar vectores R^n sin necesidad de expresarlos en términos de las componentes. Por ejemplo, para despejar $\mathbf{x}$ en la ecuación vectorial $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$, se puede sumar $-\mathbf{u}$ a ambos miembros y proceder como sigue:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) &= \mathbf{v} + (-\mathbf{u})\\ \mathbf{x} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}) &= \mathbf{v} - \mathbf{u}\\ \mathbf{x} + \mathbf{0} &= \mathbf{v} - \mathbf{u}\\ \mathbf{x} &= \mathbf{v} - \mathbf{u}\end{aligned}$$

Es instructivo que el lector mencione los incisos del teorema 4.1.1 que justifican los tres últimos pasos de este cálculo.

ESPACIO EUCLIDIANO *n* DIMENSIONAL

Para extender los conceptos de distancia, norma y ángulo a R^n, se empieza con la siguiente generalización del producto punto sobre R^2 y R^3. [Fórmula (3) de la sección 3.3].

Definición. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ son vectores cualesquiera en R^n, entonces el ***producto interior euclidiano*** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se define por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Observar que cuando $n = 2$ o $n = 3$, el producto interior euclidiano es el producto punto ordinario.

Ejemplo 1 El producto interior euclidiano de los vectores

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (5, -4, 7, 0)$$

en R^4 es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = 18 \quad \Delta$$

Como muchos de los conceptos conocidos de los espacios bidimensional y tridimensional existen en el espacio *n* dimensional, es común referirse a R^n, con las operaciones de adición, multiplicación escalar y producto interior euclidiano que se han definido aquí, como ***espacio euclidiano n dimensional***.

En el siguiente teorema se enumeran las cuatro propiedades aritméticas más importantes del producto interior euclidiano.

Teorema 4.1.2. *Si* **u**, **v** y **w** *son vectores en* R^n *y* k *es cualquier escalar, entonces*:

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
c) $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$. *Además*, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Se demostrarán los incisos *b*) y *d*), y las demás demostraciones se dejan como ejercicios.

Demostración de b)

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots w_n)$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)\cdot(w_1, w_2, \ldots, w_n)\\
&= (u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + \cdots + (u_n+v_n)w_n\\
&= (u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n)\\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}
\end{aligned}
$$

Demostración de d). Se tiene $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2$ 0. Además, la igualdad se cumple si y sólo si $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0$, es decir, si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. ☐

Ejemplo 2 EL teorema 4.1.2 permite realizar cálculos con productos interiores euclidianos de manera bastante semejante a como se efectúan con productos aritméticos ordinarios. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
(3\mathbf{u}+2\mathbf{v})\cdot(4\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= (3\mathbf{u})\cdot(4\mathbf{u}+\mathbf{v}) + (2\mathbf{v})\cdot(4\mathbf{u}+\mathbf{v})\\
&= (3\mathbf{u})\cdot(4\mathbf{u}) + (3\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} + (2\mathbf{v})\cdot(4\mathbf{u}) + (2\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\
&= 12(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 3(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + 8(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) + 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\\
&= 12(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 11(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

El lector debe determinar qué incisos del teorema 4.1.2 se aplicaron en cada paso. Δ

NORMA Y DISTANCIA EN EL ESPACIO EUCLIDIANO *n* DIMENSIONAL

Por analogía con las conocidas fórmulas en R^2 y R^3, la ***norma euclidiana*** (o ***longitud euclidiana***) de un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en R^n se define por

$$\boxed{\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}} \tag{1}$$

[Comparar esta fórmula con las fórmulas (1) y (2) de la sección 3.2.]

De manera semejante, la ***distancia euclidiana*** entre los puntos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ en R^n se define por

$$\boxed{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \cdots + (u_n-v_n)^2}} \tag{2}$$

Ver las fórmulas (3) y (4) de la sección 3.2.

Ejemplo 3 Si $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$ y $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$, entonces en el espacio euclidiano R^n se tiene que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

y

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58} \quad \Delta$$

El siguiente teorema proporciona una de las desigualdades más importantes del álgebra lineal, la ***desigualdad de Cauchy-Schwarz****

Teorema 4.1.3. (***Desigualdad de Cauchy-Schwarz en*** R^n). *Si*

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2 \ldots, u_n) \qquad y \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

son vectores en R^n, *entonces*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \tag{3}$$

o, expresada en términos de las componentes,

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2} \tag{4}$$

**Augustin Louis Barón de) Cauchy* (1789-1857). Matemático francés. Cauchy recibió su primera educación de su padre, abogado y que también era maestro de los clásicos. Cauchy ingresó a la Ecole Polytechnique en 1805 para estudiar ingeniería, pero debido a su quebrantada salud, le recomendaron concentrarse en las matemáticas. Su trabajo matemático especializado empezó en 1811 con una serie de brillantes soluciones de algunos problemas sobresalientes difíciles.

Las contribuciones matemáticas de Cauchy durante los 35 años siguientes fueron brillantes y asombrosas en cantidad, ya que produjo más de 700 artículos que abarcan 26 volúmenes modernos. El trabajo de Cauchy inició la era del análisis moderno; aportó a las matemáticas normas de precisión y rigor jamás soñados por matemáticos anteriores a él.

La vida de Cauchy estuvo ligada de manera inextricable a los acontecimientos políticos de la época. Fuerte partidario de los Borbones, abandonó a su mujer e hijo en 1830 para seguir al exilio al rey borbón Carlos X. Debido a su lealtad, el ex-rey lo nombró barón. Cauchy volvió finalmente a Francia pero rehusó aceptar un puesto universitario, hasta que el gobierno cedió al requisito de que prestara juramento.

Es difícil tener una imagen clara de la personalidad de Cauchy. Devoto católico, patrocinó obras de caridad para madres solteras y criminales, así como de ayuda a Irlanda. Sin embargo, otros aspectos de su vida lo presentan de manera desfavorable. El matemático noruego Abel lo describe como "loco, infinitamente católico y fanático". Algunos escritores pregonan sus enseñanzas, pero otros afirman que divagaba incoherencias y, según un informe de la época, una ocasión dedicó toda una clase a extraer la raíz cuadrada de 17 a 10 cifras decimales aplicando un método bien conocido por sus estudiantes. En todo caso, Cauchy es indiscutiblemente una de las grandes luminarias en la historia de la ciencia.

***Herman Amandus Schwarz* 1843-1921).** Matemático alemán. Schwarz fue el matemático más importante en Berlín durante la primera parte del siglo XX. Debido a la devoción que guardaba respecto a sus deberes académicos en la Universidad de Berlín y a una propensión a tratar con la misma dedicación hechos importantes y hechos triviales, no publicó en gran volumen. Tendía a centrarse en estrechos problemas concretos, pero sus técnicas eran a menudo extremadamente brillantes e influenciaban el trabajo de otros matemáticos. Una versión de la desigualdad que lleva su nombre apareció en un artículo sobre superficies de área mínima publicado en 1885.

Por el momento se omite la demostración, ya que después en el texto se demostrará una versión más general de este teorema. Sin embargo, para vectores en R^2 y R^3, este resultado es una simple consecuencia de la fórmula (1) de la sección 3.3: Si **u** y **v** son vectores diferentes de cero en R^2 o R^3, entonces

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,|\cos\theta| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \tag{5}$$

y si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces ambos miembros de (3) son cero, de modo que también en este caso se cumple la desigualdad.

En los dos teoremas siguientes se enumeran las propiedades básicas de la longitud y la distancia en el espacio euclidiano n dimensional.

Teorema 4.1.4. *Si* **u** y **v** *son vectores en* R^n *y* k *es cualquier escalar, entonces*:

(a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
(b) $\|\mathbf{u}\| = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
(c) $\|k\mathbf{u}\| = |k|\,\|\mathbf{u}\|$
(d) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (*Desigualdad del triángulo*)

Se demostrarán los incisos c) y d), y las demostraciones de a) y b) se dejan como ejercicios.

Demostración de c). Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, entonces $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$, de modo que

$$\begin{aligned}\|k\mathbf{u}\| &= \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2 + \cdots + (ku_n)^2}\\ &= |k|\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}\\ &= |k|\,\|\mathbf{u}\|\end{aligned}$$

Demostración de d).

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2\\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 && \boxed{\text{Propiedad del valor absoluto}}\\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 && \boxed{\text{Desigualdad de Cauchy-Schwarz}}\\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

El resultado se deduce ahora extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros. ▯

El inciso c) de este teorema establece que al multiplicar un vector por un escalar k, la longitud del vector se multiplica por un factor k (figura $2a$). El inciso d) de este teorema se conoce como ***desigualdad del triángulo***, ya que generaliza el conocido resultado de la geometría euclidiana el cual establece que la suma de las

longitudes de dos lados de un triángulo es mayor o igual que la longitud del tercer lado (figura 2*b*).

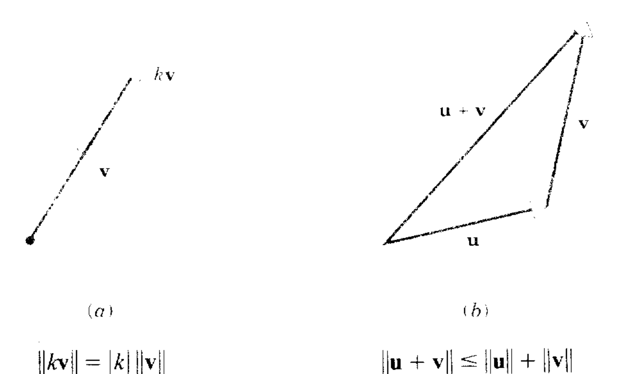


Figura 2 $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$ $\qquad$ $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Teorema 4.1.5. *Si* **u**, **v** *y* **w** *son vectores en* R^n *y k es cualquier escalar, entonces*

a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ge 0$
b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \le d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (*Desigualdad del triángulo*)

Los resultados de este teorema son consecuencias inmediatas del teorema 4.1.4. Se demostrará el inciso *d*) y las demostraciones de los demás incisos se dejan como ejercicios.

Demostración de d). Por (2) y el inciso *d*) del teorema 4.1.4, se tiene

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + (\mathbf{w} - \mathbf{v})\| \\ &\le \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \square \end{aligned}$$

El inciso *d*) de este teorema, que también se denomina *desigualdad del triángulo*, generaliza el conocido resultado de geometría euclidiana que establece que la distancia más corta entre dos puntos es una recta (figura 3).

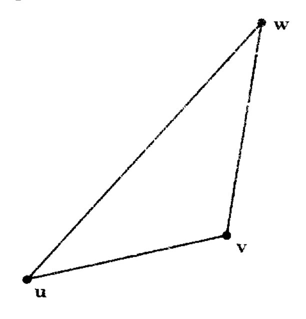


Figura 3 $d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \le d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

La fórmula (1) expresa la norma de un vector en términos de un producto punto. El siguiente teorema útil expresa el producto punto en términos de normas.

Teorema 4.1.6. *Si* **u** *y* **v** *son vectores en* R^n *con producto interior euclidiano, entonces*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \qquad (6)$$

Demostración.

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$

a partir de lo cual (6) se concluye por álgebra simple. □

En los ejercicios se proporcionan algunos problemas numéricos en los que se aplica este teorema.

ORTOGONALIDAD

Recordar que en los espacios euclidianos R^2 y R^3 dos vectores **u** y **v** se definen como *ortogonales* perpendiculares) si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ (sección 3.3). Con esta motivación se presenta la siguiente definición.

Definición. Dos vectores **u** y **v** en R^n se denominan *ortogonales* si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Ejemplo 4 En el espacio euclidiano R^4, los vectores

$$\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4) \text{ y } \mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$$

son ortogonales, ya que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0 \quad \Delta$$

Después, en el texto, se analizarán con más detalle las propiedades de los vectores ortogonales, aunque en este momento se observa que muchas de las propiedades conocidas de los vectores ortogonales en los espacios euclidianos R^2 y R^3 son verdaderas en el espacio euclidiano R^n. Por ejemplo, si **u** y **v** son vectores ortogonales en R^2 o en R^3, entonces **u**, **v** y **u** + **v** forman los lados de un triángulo rectángulo (figura 4); así, por el teorema de Pitágoras,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

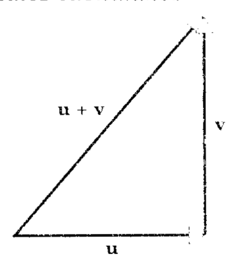


Figura 4

El siguiente teorema muestra que este resultado se extiende a R^n.

> **Teorema 4.1.7. (*Teorema de Pitágoras para R^n*).** *Si* **u** *y* **v** *son vectores ortogonales en R^n con el producto interior euclidiano, entonces*
>
> $$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Demostración.

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad \square$$

OTROS TIPOS DE NOTACIÓN PARA VECTORES EN R^n

Un vector $\mathbf{u} = u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en R^n también se puede escribir en notación matricial como matriz renglón o matriz columna:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{u} = [\, u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n \,]$$

Lo anterior se justifica porque con las operaciones matriciales

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \qquad k\mathbf{u} = k\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n] + [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \\ &= [u_1 + v_1 \quad u_2 + v_2 \quad \cdots \quad u_n + v_n] \\ k\mathbf{u} &= k[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n] = [ku_1 \quad ku_2 \quad \cdots \quad ku_n] \end{aligned}$$

se obtienen los mismos resultados que con las operaciones vectoriales

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \\ k\mathbf{u} &= k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n) \end{aligned}$$

La única diferencia es la forma en que se escriben los vectores.

UNA FÓRMULA MATRICIAL PARA EL PRODUCTO PUNTO

Si los vectores se escriben como matrices columna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

y en las matrices 1×1 se omiten los corchetes, entonces se deduce que

$$\mathbf{v}^T\mathbf{u} = [\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \,] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = [\, u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \,] = [\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \,] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Así, para vectores expresados como matrices columna se tiene la siguiente fórmula para el producto interior euclidiano:

$$\boxed{\mathbf{v}^T\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \tag{7}$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u} = [\, 5 \quad -4 \quad 7 \quad 0 \,] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = [\, 18 \,] = 18$$

Si A es una matriz $n \times n$, entonces por la fórmula (7) y las propiedades de la transpuesta se concluye que

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T(A\mathbf{u}) = (\mathbf{v}^TA)\mathbf{u} = (A^T\mathbf{v})^T\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v}$$
$$\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{u} = (\mathbf{v}^TA^T)\mathbf{u} = \mathbf{v}^T(A^T\mathbf{u}) = A^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Las fórmulas resultantes

$$\boxed{A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v}} \tag{8}$$

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \tag{9}$$

constituyen un vínculo importante entre la multiplicación por una matriz A $n \times n$ y la multiplicación por A^T.

Ejemplo 5 Suponer que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a partir de lo cual se obtiene

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7(-2) + 10(0) + 5(5) = 11$$
$$\mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v} = (-1)(-7) + 2(4) + 4(-1) = 11$$

Así, $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v}$, como garantiza la fórmula (8). Se deja para el lector la comprobación de que (9) también se cumple. Δ

UN PRODUCTO PUNTO CONSIDERADO COMO MULTIPLICACIÓN MATRICIAL

Los productos punto proporcionan otra forma de entender la multiplicación de matrices. Recordar que si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times r$ y $B = [b_{ij}]$ es una matriz $r \times n$, entonces el ij-ésimo elemento de AB es

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

que es el producto punto del i-ésimo vector renglón de A

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ir}]$$

y el j-ésimo vector columna de B

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$$

Por tanto, si los vectores renglón de A son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ y los vectores columna de B son $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$, entonces el producto matricial AB se puede expresar como

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_n \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

En particular, un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede expresar en forma de producto punto como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{11}$$

donde $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ son los vectores renglón de A y $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son los elementos de $\mathbf{b}$.

Ejemplo 6 A continuación se presenta un ejemplo de un sistema lineal expresado en la forma de producto punto (11).

Sistema	**Forma de producto punto**
$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} (3, -4, 1)\cdot(x_1, x_2, x_3) \\ (2, -7, -4)\cdot(x_1, x_2, x_3) \\ (1, 5, -8)\cdot(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.1

1. Sean $\mathbf{u} = (-3, 2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (4, 7, -3, 2)$ y $\mathbf{w} = (5, -2, 8, 1)$. Encontrar

a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ b) $2\mathbf{u} + 7\mathbf{v}$ c) $-\mathbf{u} + (\mathbf{v} - 4\mathbf{w})$
d) $6(\mathbf{u} - 3\mathbf{v})$ e) $-\mathbf{v} - \mathbf{w}$ f) $(6\mathbf{v} - \mathbf{w}) - (4\mathbf{u} + \mathbf{v})$

2. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ los vectores del ejercicio 1. Hallar el vector $\mathbf{x}$ que satisface $5\mathbf{x} - 2\mathbf{v} = (2\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$.

3. Sean $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 4, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (7, 1, 1, 4)$ y $\mathbf{u}_4 = (6, 3, 1, 2)$. Encontrar escalares c_1, c_2, c_3 y c_4 tales que $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = 0, 5, 6, -3)$.

4. Demostrar que no existen escalares c_1, c_2, c_3 y c_4 tales que

$$c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(1, 0, -2, 1) + c_3(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$$

5. En cada inciso, calcular la norma euclidiana del vector.

a) $(-2, 5)$ b) $(1, 2, -2)$ c) $(3, 4, 0, -12)$ d) $(-2, 1, 1, -3, 4)$

a) ¿Cómo definiría el lector la medida euclidiana de la "caja" en R^n determinada por los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (a_1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{v}_2 = (0, a_2, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{v}_n = (0, 0, 0, \ldots, a_n)?$$

b) ¿Cómo definiría el lector la longitud euclidiana de la "diagonal" de la caja en el inciso a)?

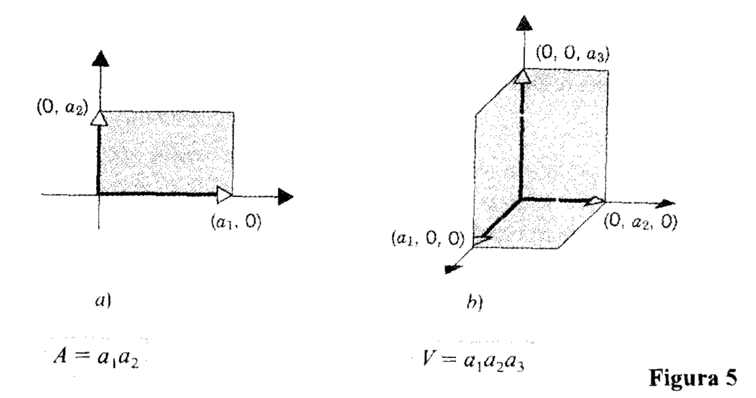


Figura 5

4.2 TRANSFORMACIONES LINEALES DE R^n A R^m

En esta sección se iniciará el estudio de funciones de la forma $\mathbf{w} = F(\mathbf{x})$, *donde la variable independiente* $\mathbf{x}$ *es un vector en* R^n *y la variable dependiente* $\mathbf{w}$ *es un vector en* R^m. *La atención se centrará en una clase especial de tales funciones denominadas "transformaciones lineales". Las transformaciones lineales son fundamentales en el estudio del álgebra lineal y tienen muchas aplicaciones importantes en física, ingeniería, ciencias sociales y diversas ramas de la matemática.*

FUNCIONES DE R^n A R

Recordar que una ***función*** es una regla f que asocia a cada elemento de un conjunto A uno y sólo un elemento de un conjunto B. Si f asocia el elemento b con el elemento a, entonces se escribe $b = f(a)$ y se dice que b es la ***imagen*** de a bajo f, o que $f(a)$ es el ***valor*** de f en a. El conjunto A se denomina ***dominio*** de f y el conjunto B se denomina ***codominio*** de f. El subconjunto de B que consta de todos los valores posibles de f cuando a varía sobre A se denomina ***recorrido*** de f. Para las funciones más comunes, A y B son conjuntos de números reales, en cuyo caso f se denomina ***función con valores reales de una variable real***. Otras funciones comunes ocurren cuando B es un conjunto de números reales y A es un conjunto de vectores en R^2, R^3 o, más generalmente, en R^n. En la tabla 1 se muestran algunos ejemplos.

TABLA 1

Fórmula	Ejemplo	Clasificación	Descripción
$f(x)$	$f(x) = x^2$	Función de valores reales de una variable real	Función de R a R
$f(x, y)$	$f(x, y) = x^2 + y^2$	Función de valores reales de dos variables reales	Función de R^2 a R
$f(x, y, z)$	$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$	Función de valores reales de tres variables reales	Función de R^3 a R
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$	Función de valores reales de n variables reales	Función de R^n a R

Dos funciones f_1 y f_2 se consideran ***iguales***, escrito como $f_1 = f_2$, si tienen el mismo dominio y $f_1(a) = f_2(a)$ para toda a en el dominio.

FUNCIONES DE R^n A R^m

Si el dominio de una función f es R^n y el codominio es R^m (m y n quizá iguales), entonces f se denomina ***transformación*** de R^n a R^m, y se dice que f ***mapea*** (aplica o transforma) R^n en R^m. Este hecho se denota escribiendo $f: R^n \to R^m$. Las funciones que se presentan en la tabla 1 son transformaciones para las que $m = 1$. Para el caso especial en que $m = n$, la transformación $f: R^n \to R^n$ se denomina ***operador*** sobre R^n. El primer elemento en la columna 2 de la tabla 1 es un operador sobre R.

Para ilustrar una forma importante en que pueden surgir las transformaciones, suponer que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son funciones con valores reales de n variables reales, por ejemplo

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ \vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Estas m ecuaciones asignan un punto único $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ en R^m a cada punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en R^n y, por tanto, definen una transformación de R^n a R^m. Si esta transformación se denota por T, entonces $T: R^n \to R^m$ y

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

Ejemplo 1 Las ecuaciones

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1x_2 \\ w_3 &= x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

definen una transformación $T{:}R^2 \rightarrow R^3$. Con esta transformación, la imagen del punto (x_1, x_2) es

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ 3x_1x_2,\ x_1^2 - x_2^2)$$

Así, por ejemplo,

$$T(1, -2) = (-1, -6, -3) \quad \Delta$$

TRANSFORMACIONES LINEALES DE R^n a R^m

En el caso especial en que las ecuaciones de (1) son lineales, la trasformación $T{:}R^n \rightarrow R^m$ definida por esas ecuaciones se denomina ***transformación lineal*** (u ***operador lineal*** si $m = n$). Así, una transformación lineal $T{:}R^n \rightarrow R^m$ está definida por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{2}$$

o bien, en notación matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

o, más brevemente,

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x} \tag{4}$$

La matriz $A = [a_{ij}]$ se denomina ***matriz estándar*** de la transformación lineal T y T se denomina ***multiplicación por*** A.

Ejemplo 2 La transformación lineal $T{:}R^4 \rightarrow R^3$ definida por las ecuaciones

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + \ \ x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - \ \ x_2 + 4x_3 \end{aligned} \tag{5}$$

se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

de modo que la matriz estándar para T es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

La imagen de un punto (x_1, x_2, x_3, x_4) se puede calcular directamente a partir de las ecuaciones de definición (5) o a partir de (6) por multiplicación de matrices. Por ejemplo, si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$, entonces al sustituir en (5) se obtiene

$$w_1 = 1, \qquad w_2 = 3, \qquad w_3 = 8$$

(comprobar) o, alternativamente, a partir de (6)

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LA NOTACIÓN

Si $T:R^n \to R^m$ es una multiplicación por A, y si es importante recalcar que A es la matriz estándar para T, entonces la transformación lineal $T:R^n \to R^m$ se denota por $T_A:R^n \to R^m$. Así,

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \tag{7}$$

En esta ecuación se sobrentiende que el vector $\mathbf{x}$ en R^n se expresa como una matriz columna.

Algunas veces es tedioso introducir una nueva literal para denotar la matriz estándar de una transformación lineal $T:R^n \to R^m$. En esos casos, la matriz estándar para T se denota por el símbolo $[T]$. Con esta notación, la ecuación (7) asume la forma

$$T(\mathbf{x}) = [\,T\,]\mathbf{x} \tag{8}$$

Algunas veces se mezclan las dos notaciones para la matriz estándar, en cuyo caso se tiene la relación

$$[\,T_A\,] = A \tag{9}$$

OBSERVACIÓN. Entre toda esta notación es importante tener en mente que se ha establecido una correspondencia entre las matrices $m \times n$ y las transformaciones lineales de R^n a R^m: a cada matriz A le corresponde una transformación lineal T_A (multiplicación por A), y a cada transformación lineal $T:R^n \to R^m$ le corresponde una matriz $[T]$ $m \times n$ (la matriz estándar para T).

GEOMETRÍA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Dependiendo de si las n-adas se consideran como puntos o como vectores, el efecto geométrico de un operador $T:R^n \to R^n$ es transformar cada punto (o vector) en R^n en algún nuevo punto (o vector) (figura 1).

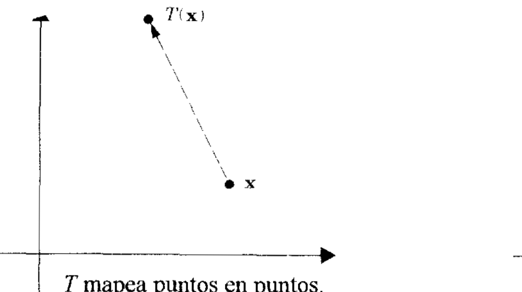


Figura 1 T mapea puntos en puntos. T mapea vectores en vectores.

Ejemplo 3 Si 0 es la matriz cero $m \times n$ y $\mathbf{0}$ es el vector cero en R^n, entonces para todo vector $\mathbf{x}$ en R^n

$$T_0(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

de modo que la multiplicación por cero mapea cada vector de R^n en el vector cero en R^m. T_0 se denomina ***transformación cero*** de R^n a R^m. Algunas veces la transformación cero se denota por 0. Aunque esta es la misma notación que se usa para indicar la matriz cero, la interpretación apropiada es evidente a partir del contexto. Δ

Ejemplo 4 Si I es la matriz identidad $n \times n$, entonces para todo vector $\mathbf{x}$ en R^n

$$T_I(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

de modo que la multiplicación por I mapea cada vector de R^n en sí mismo. T_I se denomina ***operador identidad*** sobre R^n. Algunas veces el operador identidad se denota por I. Aunque esta es la misma notación que se usa para indicar la matriz identidad, la interpretación apropiada es evidente a partir del contexto. Δ

Entre los operadores lineales más importantes sobre R^2 y R^3 están los que producen reflexiones, proyecciones y rotaciones. A continuación se analizarán esos operadores.

OPERADORES REFLEXIÓN

Considerar el operador $T:R^2 \to R^2$ que transforma cada vector en su imagen simétrica con respecto al eje y (figura 2).

Si se hace $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$, entonces las ecuaciones que relacionan las componentes de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{w}$ son

$$\begin{aligned} w_1 &= -x = -x + 0y \\ w_2 &= y = 0x + y \end{aligned} \qquad (10)$$

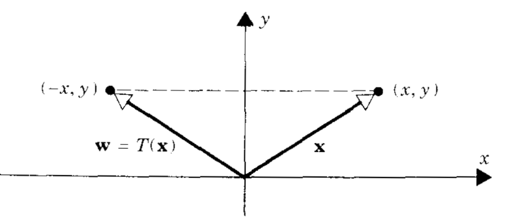


Figura 2

o bien, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Como las ecuaciones en (10) son lineales, T es un operador lineal y por (11) se tiene que la matriz estándar para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En general, los operadores sobre R^2 y R^3 que transforman cada vector en su imagen simétrica con respecto a alguna recta o algún plano se denominan ***operadores reflexión***. Estos operadores son lineales. En las tablas 2 y 3 se enumeran algunos de los operadores reflexión comunes.

TABLA 2

Operador	**Ilustración**	**Ecuaciones**	**Matriz estándar**
Reflexión respecto al eje y		$w_1 = -x$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexión respecto al eje x		$w_1 = x$ $w_2 = -y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexión respecto a la recta $y = x$		$w_1 = y$ $w_2 = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

TABLA 3

Operador	Ilustración	Ecuaciones	Matriz estándar
Reflexión respecto al plano xy		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = -z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexión respecto al plano xz		$w_1 = x$ $w_2 = -y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexión respecto al plano yz		$w_1 = -x$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

OPERADORES PROYECCIÓN

Considerar el operador $T: R^2 \to R^2$ que transforma cada vector en su proyección ortogonal sobre el eje x (figura 3).

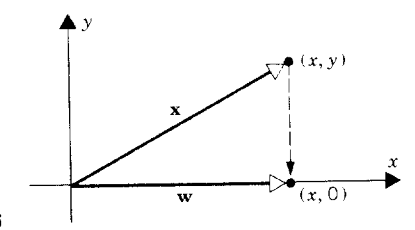


Figura 3

Las ecuaciones que relacionan las componentes de **x** y **w** = T(**x**) son

$$\begin{aligned} w_1 &= x = x + 0y \\ w_2 &= 0 = 0x + 0y \end{aligned} \tag{12}$$

o bien, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{13}$$

Las ecuaciones en (12) son lineales, de modo que T es un operador lineal y por (13) se tiene que la matriz estándar para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En general, un ***operador proyección*** (o más precisamente, un ***operador proyección ortogonal***) sobre R^2 o R^3 es cualquier operador que transforma cada vector en su proyección ortogonal sobre una recta o un plano que pasan por el origen. Es posible demostrar que estos operadores son lineales. En las tablas 4 y 5 se enumeran algunos de los operadores proyección básicos sobre R^2 y R^3.

TABLA 4

Operador	**Ilustración**	**Ecuaciones**	**Matriz estándar**
Proyección ortogonal sobre el eje x		$w_1 = x$ $w_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Proyección ortogonal sobre el eje y		$w_1 = 0$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

TABLA 5

Operador	Ilustración	Ecuaciones	Matriz estándar
Proyección ortogonal sobre el plano xy	z, (x, y, z), **x**, y, x, **w**, $(x, y, -z)$	$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Proyección ortogonal sobre el plano xz	$(x, 0, z)$, z, (x, y, z), **w**, **x**, y, x	$w_1 = x$ $w_2 = 0$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Proyección ortogonal sobre el plano yz	z, $(0, y, z)$, **w**, (x, y, z), **x**, y, x	$w_1 = 0$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

OPERADORES ROTACIÓN

Un operador que hace girar todo vector en R^2 hasta describir un ángulo fijo se denomina ***operador rotación*** sobre R^2. En la tabla 6 se enumeran los dos operadores rotación básicos sobre R^2. Para mostrar cómo se obtuvieron los resultados, considerar el operador rotación que hace girar en sentido contrario a las manecillas del reloj cada vector por un ángulo positivo fijo θ. Para encontrar ecuaciones que relacionen **x** y **w** = T(**x**), sea el ángulo del eje x positivo a **x**, y sea r la longitud común de **x** y **w** (figura 4).

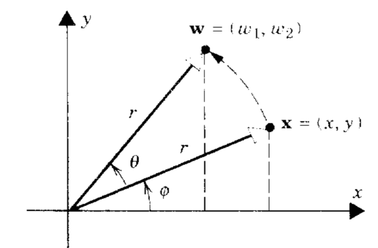


Figura 4

Entonces, por trigonometría básica,

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{14}$$

y

$$w_1 = r\cos(\theta + \phi), \qquad w_2 = r\,\text{sen}(\theta + \phi) \tag{15}$$

Por medio de las identidades trigonométricas en (15) se llega a

$$\begin{aligned} w_1 &= r\cos\theta\cos\phi - r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \\ w_2 &= r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi + r\cos\theta\,\text{sen}\,\phi \end{aligned}$$

y sustituyendo en (14) se obtiene

$$\begin{aligned} w_1 &= x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ w_2 &= x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{16}$$

Las ecuaciones en (16) son lineales, por lo que T es un operador lineal; además, con base en estas ecuaciones se concluye que la matriz estándar para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

TABLA 6

Operador	**Ilustración**	**Ecuaciones**	**Matriz estándar**
Rotación a través de un ángulo θ	y, (w_1, w_2), $\mathbf{w}$, (x, y), θ, $\mathbf{x}$, x	$w_1 = x\cos\theta - y \quad \theta$ $w_2 = x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Ejemplo 5 Si cada vector en R^2 se hace girar un ángulo $\pi/6 = (30^0)$, entonces la imagen $\mathbf{w}$ de un vector es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

es

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\text{sen}\,\pi/6 \\ \text{sen}\,\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la imagen del vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Una rotación de vectores en R^3 se describe, por lo general, en relación a un rayo que parte del origen, denominado ***eje de rotación***. A medida que un vector se desplaza alrededor del eje de rotación, describe una porción de un cono figura 5*a*). El ***ángulo de rotación***, que se mide en la base del cono, se describe como "en sentido del movimiento de las manecillas del reloj" o "en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj" en relación a un punto de vista situado a lo largo del eje de rotación *viendo hacia el origen*. Por ejemplo, en la figura 5*a*, el vector **w** resulta al hacer girar en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor del eje l el vector **x** hasta describir un ángulo θ. Así como en R^2, los ángulos son *positivos* si son generados por rotaciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y *negativos* si son generados por rotaciones en sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

La forma más común de describir un eje de rotación general es especificando un vector **u** diferente de cero situado a lo largo del eje de rotación y cuyo punto inicial está en el origen. La dirección en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj para una rotación alrededor del eje se puede determinar entonces mediante una "regla de la mano derecha" (figura 5*b*); si el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de **u**, entonces los demás dedos apuntan en la dirección opuesta al movimiento de las manecillas del reloj.

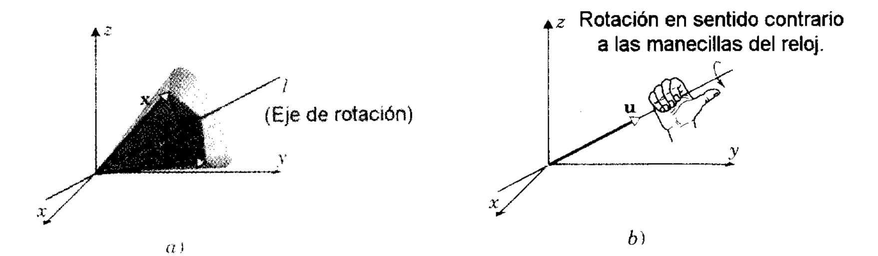


Figura 5

Un ***operador rotación*** sobre R^3 es un operador lineal que hace girar cada vector en R^3 alrededor de algún eje de rotación hasta describir un ángulo fijo θ. En la tabla 7 se describen los operadores rotación sobre R^3 cuyos ejes de rotación son los ejes de coordenadas positivos. Para cada una de estas rotaciones, la rotación deja sin cambio una de las componentes, y las relaciones entre las otras componentes se pueden obtener con el mismo procedimiento usado para obtener (16). Por ejemplo, en la rotación alrededor del eje z, las componentes z de **x** y $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$ son las mismas, y las componentes x y y están relacionadas como en (16). Esto conduce a las ecuaciones de rotación que se muestran en el último renglón de la tabla 7.

TABLA 7

Operador	**Ilustración**	**Ecuaciones**	**Matriz estándar**
Rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj a través de un ángulo respecto al eje x positivo.		$w_1 = x$ $w_2 = y\cos\theta - z\,\mathrm{sen}\,\theta$ $w_3 = y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj por un ángulo respecto al eje y positivo.		$w_1 = x\cos\theta + z\,\mathrm{sen}\,\theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj a través de un ángulo respecto al eje z positivo.		$w_1 = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$ $w_2 = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por completitud, se observa que la matriz estándar para una rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de un eje en R^3 (determinado por un *vector unitario* arbitrario $\mathbf{u} = (a, b, c)$ cuyo punto inicial está en el origen) por un ángulo θ, es

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\,\mathrm{sen}\,\theta & ac(1-\cos\theta)+b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\,\mathrm{sen}\,\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\,\mathrm{sen}\,\theta & bc(1-\cos\theta)+a\,\mathrm{sen}\,\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix} \tag{17}$$

La obtención de este hecho puede consultarse en el libro *Principles of Interactive Computer Graphics*, de W. M. Newman y R. F. Sproull, Nueva York, McGraw-

Hill, 1979. Es instructivo que el lector deduzca los resultados de la tabla 7 como casos especiales de este resultado más general.

OPERADORES DILATACION Y CONTRACCIÓN

Si k es un escalar no negativo, entonces el operador $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ sobre R^2 o R^3 se denomina ***contracción con factor k*** si $0 \leq k \leq 1$ y ***dilatación con factor k*** si $k \geq 1$. El efecto geométrico de una contracción es comprimir cada vector por un factor k (figura 6*a*), y el efecto de una dilatación es estirar cada vector por un factor k (figura 6*b*). Una contracción comprime R^2 o R^3 uniformemente hacia el origen desde todas las direcciones, y una dilatación estira R^2 o R^3 uniformemente lejos del origen en todas las direcciones.

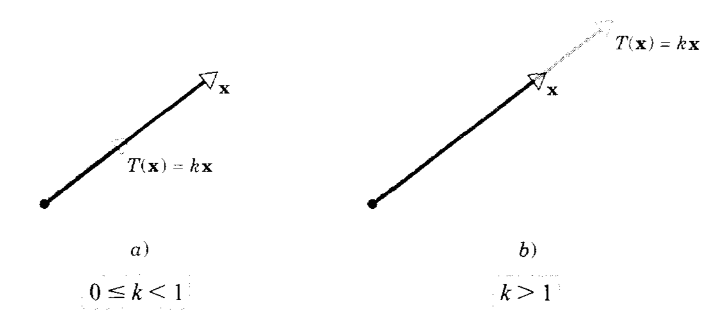


Figura 6

La contracción más extrema ocurre cuando $k = 0$, en cuyo caso $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ se reduce al operador cero $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, que comprime cada vector a un simple punto el origen). Si $k = 1$, entonces $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ se reduce al operador identidad $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, que deja sin cambio cada vector; esto se puede considerar como una contracción o como una dilatación. En las tablas 8 y 9 se enumeran los operadores contracción y dilatación sobre R^2 y R^3.

TABLA 8

Operador	Ilustración	Ecuaciones	Matriz estándar
Contracción con factor k sobre R^2.	y; **x** (x, y); **w** (kx, ky); x	$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatación con factor k sobre R^2.	y; **w** (kx, ky); **x** (x, y); x	$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	

TABLA 9

Operador	Ilustración	Ecuaciones	Matriz estándar
Contracción con factor k sobre R^3.	z, y, x; $\mathbf{x}$ (x, y, z); $\mathbf{w}$ (kx, ky, kz)	$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatación con factor k sobre R^3.	z, y, x; $\mathbf{w}$ (kx, ky, kz); $\mathbf{x}$ (x, y, z)	$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	

COMPOSICIONES DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Si $T_A:R^n \to R^k$ y $T_B:R^k$ R^m son transformaciones lineales, entonces para todo $\mathbf{x}$ en R^n primero se puede calcular $T_A(\mathbf{x})$, que es un vector en R^k, y luego calcular $T_B(T_A(\mathbf{x}))$, que es un vector en R^m. Así, la aplicación de T_A seguida de T_B produce una transformación de R^n a R^m. Esta transformación se denomina ***composición de T_B con T_A*** y se denota por $T_B \circ T_A$ (y se lee como "T_A seguida de T_B"). Así,

$$\boxed{(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x}))} \tag{18}$$

La composición de $T_B \circ T_A$ es lineal, ya que

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} \tag{19}$$

De modo que $T_B \circ T_A$ es la multiplicación por BA, que es una transformación lineal. La fórmula 19) también establece que la matriz estándar para $T_B \circ T_A$ es BA. Este hecho se expresa con la fórmula

$$\boxed{T_B \circ T_A = T_{BA}} \tag{20}$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (20) encierra una idea importante: *La multiplicación de matrices es equivalente a componer las transformaciones lineales correspondientes en orden de derecha a izquierda de los factores.*

La fórmula (20) se puede escribir de otra manera: Si $T_1:R^n \to R^k$ y $T_2:R^k$ R^m son transformaciones lineales, entonces debido a que la matriz estándar para la composición $T_2 \circ T_1$ es el producto de las matrices estándares para T_2 y T_1, se tiene

$$\boxed{[\,T_2 \circ T_1\,] = [\,T_2\,][\,T_1\,]} \tag{21}$$

Ejemplo 6 Sean $T_1:R^2 \to R^2$ y $T_2:R^2 \to R^2$ los operadores lineales que hacen girar a los vectores por los ángulos θ_1 y θ_2, respectivamente. Así, la operación

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

primero hace girar a **x** por un ángulo θ_1, luego hace girar a $T_1\mathbf{x})$ un ángulo θ_2. Se concluye que el efecto neto de T_2 o T_1 es hacer girar cada vector en R^2 por el ángulo $\theta_1 + \theta_2$ (figura 7).

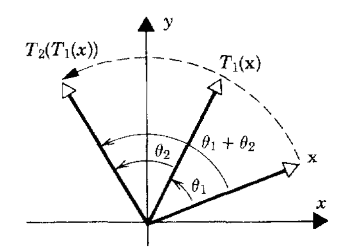


Figura 7

Así, las matrices estándar para estos operadores lineales son

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \qquad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix},$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Estas matrices deben satisfacer (21). Con auxilio de algunas identidades trigonométricas básicas se puede demostrar que lo anterior es como sigue:

$$\begin{aligned}
[T_2][T_1] &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -(\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1) \\ \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= [T_2 \circ T_1] \quad \Delta
\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. En general, es importante el orden en que se componen las transformaciones lineales. Esto era de esperarse, ya que la composición de dos transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de sus matrices estándar, y se sabe que según el orden en que se multipliquen las matrices se obtienen resultados diferentes.

Ejemplo 7 Sea $T_1:R^2 \to R^2$ el operador reflexión respecto a la recta $y = x$, y sea $T_2:R^2 \to R^2$ la proyección ortogonal sobre el eje y. En la figura 8 se ilustra gráficamente que $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$ tienen efectos distintos sobre un vector $\mathbf{x}$. Esta misma conclusión se puede obtener mostrando que las matrices estándar para T_1 y T_2 no conmutan:

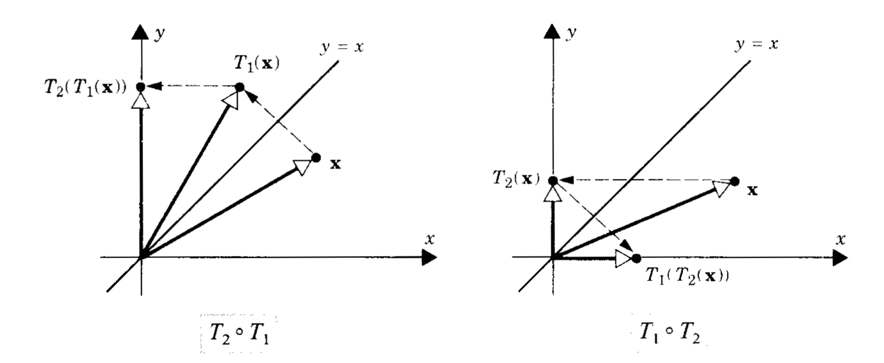


Figura 8 $T_2 \circ T_1$ $T_1 \circ T_2$

$$[\,T_1 \circ T_2\,] = [\,T_1\,][\,T_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\,T_2 \circ T_1\,] = [\,T_2\,][\,T_1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que $[\,T_2 \circ T_1\,] \neq [\,T_1 \circ T_2\,]$. Δ

Ejemplo 8 Sea $T_1:R^2 \to R^2$ la reflexión respecto al eje y, y sea $T_2:R^2 \to R^2$ la reflexión respecto al eje x. En este caso, $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$ son iguales; ambas transforman cada vector $\mathbf{x} = (x, y)$ en su negativo $-\mathbf{x} = (-x, -y)$ (figura 9):

$$(T_1 \circ T_2)(x, y) = T_1(x, -y) = (-x, -y)$$
$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(-x, y) = (-x, -y)$$

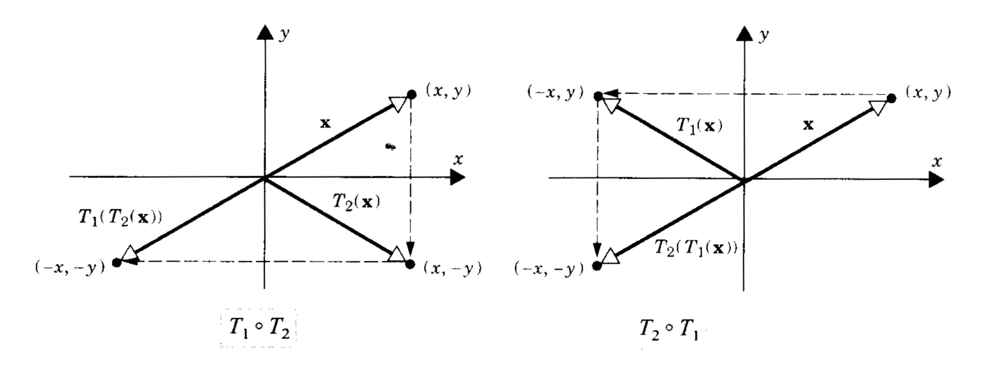


Figura 9 $T_1 \circ T_2$ $T_2 \circ T_1$

La igualdad de $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$ también se puede deducir mostrando que las matrices estándar para T_1 y T_2 conmutan:

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El operador $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ sobre R^2 o R^3 se denomina ***reflexión respecto al origen***. Como se muestra con los cálculos anteriores, la matriz estándar para este operador sobre R^2 es

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

COMPOSICIONES DE TRES O MÁS TRANSFORMACIONES LINEALES

Las composiciones se pueden definir para tres o más transformaciones lineales. Por ejemplo, considerar las transformaciones lineales

$$T_1 : R^n \to R^k, \qquad T_2 : R^k \to R^l, \qquad T_3 : R^l \to R^m$$

La composición $(T_3 \circ T_2 \circ T_1): R^n \to R^m$ se define por

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_3(T_2(T_1(\mathbf{x})))$$

Es posible demostrar que esta composición es una transformación lineal, y que la matriz estándar para $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ está relacionada con las matrices estándar para T_1, T_2 y T_3 por

$$\boxed{[T_3 \circ T_2 \circ T_1] = [T_3][T_2][T_1]} \tag{22}$$

que es una generalización de (21). Si las matrices estándar para T_1, T_2 y T_3 se denotan por A, B y C, respectivamente, entonces también se tiene la siguiente generalización de (20):

$$\boxed{T_C \circ T_B \circ T_A = T_{CBA}} \tag{23}$$

Ejemplo 9 Encontrar la matriz estándar del operador lineal $T: R^3 \to R^3$ que primero hace girar un vector en sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del eje z hasta describir un ángulo θ, luego refleja el vector resultante con respecto al plano yz y finalmente proyecta ortogonalmente este vector sobre el plano xy.

Solución. La transformación lineal T se puede expresar como la composición

$$T = T_C \circ T_B \circ T_A = T_{CBA}$$

donde T_A es la rotación respecto al eje z, T_B es la reflexión con respecto al plano yz y T_C es la proyección ortogonal sobre el plano xy. De acuerdo con las tablas 3, 5 y 7, las matrices estándar para estas transformaciones lineales son

$$[T_A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, por (22) la matriz estándar para T es

$$CBA = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.2

1. Encontrar el dominio y el codominio de la trasformación definida por las ecuaciones, y determinar si la trasformación es lineal.

a) $w_1 = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$
$w_2 = 5x_1 - 8x_2 + x_3$

b) $w_1 = 2x_1x_2 - x_2$
$w_2 = x_1 + 3x_1x_2$
$w_3 = x_1 + x_2$

c) $w_1 = 5x_1 - x_2 + x_3$
$w_2 = -x_1 + x_2 + 7x_3$
$w_3 = 2x_1 - 4x_2 - x_3$

d) $w_1 = x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4$
$w_2 = 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4$

2. Hallar la matriz estándar para la transformación lineal definida por las ecuaciones.

a) $w_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_4$
$w_2 = 3x_1 + 5x_2 - x_4$

b) $w_1 = 7x_1 + 2x_2 - 8x_3$
$w_2 = \quad - x_2 + 5x_3$
$w_3 = 4x_1 + 7x_2 - x_3$

c) $w_1 = -x_1 + x_2$
$w_2 = 3x_1 - 2x_2$
$w_3 = 5x_1 - 7x_2$

d) $w_1 = x_1$
$w_2 = x_1 + x_2$
$w_3 = x_1 + x_2 + x_3$
$w_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

3. Determinar la matriz estándar para la transformación lineal $T{:}R^3 \to R^3$ definida por

$$w_1 = 3x_1 + 5x_2 - x_3$$
$$w_2 = 4x_1 - x_2 + x_3$$
$$w_3 = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

y calcular $T(-1, 2, 4)$ sustituyendo directamente en las ecuaciones y por multiplicación matricial.

4. Encontrar la matriz estándar para el operador lineal T definido por la fórmula

a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$

d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

5. Encontrar la matriz estándar para la transformación lineal T definida por la fórmula
   a) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$
   b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$
   c) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$
   d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

6. En cada inciso se proporciona la matriz estándar $[T]$ de una transformación lineal T. Usar la matriz para encontrar $T(x)$. [Expresar la respuesta en forma matricial.]

   a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ b) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

   c) $[T] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ d) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

7. En cada inciso, encontrar $T(\mathbf{x})$ usando la matriz para T; luego, comprobar el resultado calculando directamente $T(\mathbf{x})$.
   a) $T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$; $\mathbf{x} = (-1, 4)$
   b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0)$; $\mathbf{x} = (2, 1, -3)$

8. Por medio de la multiplicación matricial hallar la reflexión de $(-1, 2)$ respecto a
   a) el eje x.   b) el eje y.   c) la recta $y = x$.

9. Usar la multiplicación matricial para encontrar la reflexión de $(2, -5, 3)$ respecto al
   a) plano xy.   b) plano xz.   c) plano yz.

10. Mediante multiplicación matricial obtener la proyección ortogonal de $(2, -5)$ sobre
    a) el eje x.   b) el eje y.

11. Utilizar la multiplicación matricial para encontrar la proyección ortogonal de $(-2, 1, 3)$ sobre el
    a) plano xy.   b) plano xz.   c) plano yz.

12. Usar la multiplicación matricial para encontrar la imagen del vector $(3, -4)$ cuando se hace girar un ángulo de
    a) $\theta = 30^{\circ}$ b) $\theta = -60^{\circ}$ c) $\theta = 45^{\circ}$ d) $\theta = 90^{\circ}$

13. Por medio de la multiplicación matricial hallar la imagen del vector $(-2, 1, 2)$ si éste se hace girar
    a) 30° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj con respecto al eje x.
    b) 45° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj con respecto al eje y.
    c) 90° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj con respecto al eje z.

14. Encontrar la matriz estándar para el operador lineal que hace girar un vector en R^3 en sentido del movimiento de las manecillas del reloj hasta describir un ángulo de -60° con respecto al
    a) eje x.   b) eje y.   c) eje z.

15. Usar multiplicación matricial para encontrar la imagen del vector $(-2, 1, 2)$ si éste se hace girar
   a) -30^0 en sentido del movimiento de las manecillas del reloj con respecto al eje x.
   b) -45^0 en sentido del movimiento de las manecillas del reloj con respecto al eje y.
   c) -90^0 en sentido del movimiento de las manecillas del reloj con respecto al eje z.

16. Encontrar la matriz estándar para la composición de operadores lineales sobre R^2 que se indica.
   a) Una rotación de 90^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, seguida de una reflexión con respecto a la recta $y = x$.
   b) Una proyección ortogonal sobre el eje y, seguida de una contracción con factor $k = \frac{1}{2}$.
   c) Una reflexión con respecto al eje x, seguida de una dilatación con factor $k = 3$.

17. Encontrar la matriz estándar para la composición de operadores lineales sobre R^2 que se indica.
   a) Una rotación de 60^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, seguida de una proyección ortogonal sobre el eje x, seguida de una reflexión con respecto a la recta $y = x$.
   b) Una dilatación con factor $k = 2$, seguida de una rotación de 45^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, seguida de una reflexión con respecto al eje y.
   c) Una rotación de 15^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, seguida de una rotación de 105^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, seguida de una rotación de 60^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

18. Encontrar la matriz estándar para la composición de operadores lineales sobre R^3 que se indica.
   a) Una reflexión respecto al plano yz, seguida de una proyección ortogonal sobre el plano xz.
   b) Una rotación de 45^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj respecto al eje y, seguida de una dilatación con factor $k = \sqrt{2}$.
   c) Una proyección ortogonal sobre el plano xy, seguida de una reflexión con respecto al plano yz.

19. Encontrar la matriz estándar para la composición de operadores lineales sobre R^3 que se indica.
   a) Una rotación de 30^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj respecto al eje x, seguida de una rotación de 30^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj respecto al eje z, seguida por una contracción con factor $k = \frac{1}{4}$.
   b) Una reflexión respecto al plano xy, seguida de una reflexión respecto al plano xz, seguida de una proyección ortogonal sobre el plano yz.
   c) Una rotación de 270^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj respecto al eje x, seguida de una rotación de 90^0 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj respecto al eje y, seguida de una rotación de 180^0 respecto al eje z.

20. Determinar si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.
a) $T_1 : R^2 \to R^2$ es la proyección ortogonal sobre el eje x y $T_2 : R^2 \to R^2$ es la proyección ortogonal sobre el eje y.
b) $T_1 : R^2 \to R^2$ es la rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta describir un ángulo θ_1 y $T_2 : R^2 \to R^2$ es la rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta describir un ángulo $_2$.
c) $T_1 : R^2 \to R^2$ es la reflexión respecto al eje x y $T_2 : R^2 \to R^2$ es la reflexión respecto al eje y.
d) $T_1 : R^2 \to R^2$ es la proyección ortogonal sobre el eje x y $T_2 : R^2 \to R^2$ es la rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta describir un ángulo θ.

21. Determinar si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.
a) $T_1 : R^3 \to R^3$ es una dilatación con factor k y $T_2 : R^3 \to R^3$ es la rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj con respecto al eje z hasta describir un ángulo .
b) $T_1 : R^3 \to R^3$ es la rotación con respecto al eje x hasta describir un ángulo θ_1 y $T_2 : R^3 \to R^3$ es la rotación con respecto al eje z hasta describir un ángulo θ_2.

22. En R^3, las ***proyecciones ortogonales*** sobre el eje x, el eje y y el eje z se definen como

$$T_1(x,y,z) = (x,0,0), \qquad T_2(x,y,z) = (0,y,0), \qquad T_3(x,y,z) = (0,0,z)$$

respectivamente.
a) Demostrar que las proyecciones ortogonales sobre los ejes de coordenadas son operadores lineales y encontrar sus matrices estándar.
b) Demostrar que si $T: R^3 \to R^3$ es una proyección ortogonal sobre uno de los ejes de coordenadas, entonces para todo vector $\mathbf{x}$ en R^3 los vectores $T(\mathbf{x})$ y $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ son ortogonales.
c) Hacer una figura mostrando $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ en el caso en que T es la proyección ortogonal sobre el eje x.

23. A partir de la fórmula (17), obtener las matrices estándar para las rotaciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj respecto al eje x, al eje y y al eje z en R^3.

24. Usar la fórmula (17) para encontrar la matriz estándar de una rotación de 90° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj respecto al eje determinado por el vector $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. [***Nota***. La fórmula (17) requiere que la longitud del vector que define el eje de rotación sea 1.]

25. Comprobar la fórmula (21) para las transformaciones lineales dadas.

a) $T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ y $T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$
b) $T_1(x_1, x_2) = (4x_1, -2x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2)$ y $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 4x_1 - x_3)$
c) $T_1(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2, -x_2 + x_3, -x_3 + x_1)$ y $T_2(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1, 3x_3, -4x_2)$

26. Se puede demostrar que si A es una matriz 2×2 con $\det(A) = 1$ y tal que los vectores columna de A son ortogonales y tienen longitud 1, entonces la multiplicación por A es una rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta describir algún ángulo θ. Comprobar que

$$A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

satisface las condiciones planteadas y encontrar el ángulo de rotación.

27. El resultado del ejercicio 26 también es verdadero en R^3: se puede demostrar que si A es una matriz 3×3 con $\det(A) = 1$ y tal que los vectores columna de A son ortogonales por parejas y tienen longitud 1, entonces la multiplicación por A es una rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj con respecto a algún eje de rotación hasta describir algún ángulo θ. Usar la fórmula (17) para demostrar que si A satisface las condiciones establecidas, entonces el ángulo de rotación satisface la ecuación

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr}(A) - 1}{2}$$

28. Sea A una matriz 3×3 que satisface las condiciones planteadas en el ejercicio 27. Se puede demostrar que si $\mathbf{x}$ es *cualquier* vector en R^3, entonces el vector

$$\mathbf{u} = A\mathbf{x} + A^T\mathbf{x} + [1 - \operatorname{tr}(A)]\mathbf{x}$$

determina un eje de rotación cuando $\mathbf{u}$ se coloca con su punto inicial en el origen. [Ver *The Axis of Rotation*: *Analysis*, *Algebra*, *Geometry*, de Dan Kalman, *Mathematics Magazine*, Vol. 62, No. 4, Oct. 1989].

a) Demostrar que la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

es una rotación.

b) Encontrar un vector de longitud 1 que defina un eje de rotación.

c) Usar el resultado del ejercicio 27 para encontrar el ángulo de rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor del eje obtenido en el inciso b).

4.3 PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES DE R^n A R^m

En esta sección se estudiará la relación entre la invertibilidad de una matriz y las propiedades de la transformación matricial correspondiente. También se obtendrá una representación de las transformaciones lineales de R^n a R^m que constituyen la base para transformaciones lineales más generales que se analizarán en secciones ulteriores, y se estudiarán algunas propiedades geométricas de los eigenvectores.

TRANSFORMACIONES LINEALES UNO A UNO

Las transformaciones lineales que mapean vectores (o puntos) distintos en vectores (o puntos) distintos revisten especial importancia. Un ejemplo es el operador lineal $T:R^2 \to R^2$ que hace girar cada vector hasta describir un ángulo θ. Geométricamente resulta evidente que si **u** y **v** son vectores distintos en R^2, entonces también los vectores girados $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ son distintos (figura 1).

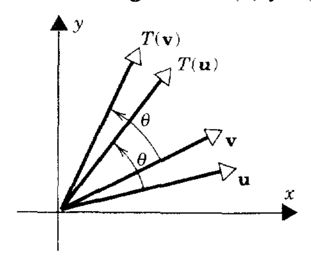


Figura 1 Vectores distintos **u** y **v** se mueven hacia vectores distintos $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$.

En contraste, si $T:R^3 \to R^3$ es la proyección ortogonal de R^3 sobre el plano xy, entonces puntos distintos sobre la misma recta vertical son mapeados en el mismo punto del plano xy (figura 2).

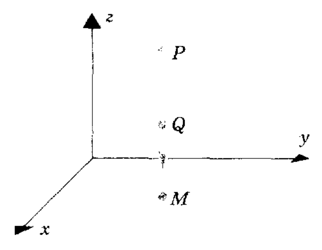


Figura 2 Los puntos distintos P y Q son mapeados en el mismo punto M.

Definición. Se dice que una transformación lineal $T:R^n \to R^m$ es ***uno a uno*** si T mapea vectores (puntos) distintos de R^n en vectores (puntos) distintos de R^m.

OBSERVACIÓN. A partir de esta definición se concluye que para todo vector **w** en el recorrido de una transformación lineal T uno a uno, existe exactamente un vector **x** tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$.

Ejemplo 1 En términos de la definición anterior, el operador rotación de la figura 1 es uno a uno, pero el operador proyección ortogonal de la figura 2 no lo es.

Sea A una matriz $n \times n$, y sea $T_A:R^n \to R^m$ la multiplicación por A. A continuación se analizarán las relaciones entre la invertibilidad de A y las propiedades de T_A.

Recordar del teorema 2.3.6 (con **w** en lugar de **b**) que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- A es invertible
- $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{w}$ $n \times 1$.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tiene exactamente una solución para toda matriz w $n \times 1$.

Sin embargo, la última de las proposiciones anteriores es realmente más definitiva que lo necesario. Se puede demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes (ejercicio 24):

- A es invertible.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{w}$ $n \times 1$.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tiene exactamente una solución cuando el sistema es consistente.

Al traducir lo anterior en proposiciones correspondientes respecto al operador lineal T_A, se deduce que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- A es invertible.
- Para todo vector $\mathbf{w}$ en R^n, existe algún vector $\mathbf{x}$ en R^n tal que $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$. Expresado de otra forma, el recorrido de T_A es todo R^n.
- Para todo vector $\mathbf{w}$ en el recorrido de T_A, existe exactamente un vector $\mathbf{x}$ en R^n tal que $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$. Planteado de otra forma, T_A es uno a uno.

En resumen, se ha establecido el siguiente teorema acerca de los operadores lineales sobre R^n.

Teorema 4.3.1. *Si A es una matriz $n \times n$ y $T_A:R^n \to R^n$ es la multiplicación por A, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) A es invertible.
b) El recorrido de T_A es R^n.
c) T_A es uno a uno.

Ejemplo 2 En el ejemplo 1 se observó que el operador rotación $T:R^2 \to R^2$ ilustrado en la figura 1 es uno a uno. Por el teorema 4.3.1 se concluye que el recorrido de T debe ser todo R^2, y que la matriz estándar para T debe ser invertible. Para probar que el recorrido de T es todo R^2 es necesario demostrar que todo vector en R^2 es la imagen de algún vector $\mathbf{x}$ bajo T. Pero claramente este hecho es así, ya que el vector $\mathbf{x}$ que se obtiene al hacer girar $\mathbf{w}$ hasta describir el ángulo $-\theta$ lo transforma en $\mathbf{w}$ cuando se hace girar el ángulo θ. Además, por la tabla 6 de la sección 4.2, la matriz estándar para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

que es invertible, ya que

$$\det[T] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \neq 0 \quad \Delta$$

Ejemplo 3 En el ejemplo 1 se observó que el operador proyección $T:R^3 \rightarrow R^3$ ilustrado en la figura 2 no es uno a uno. Del teorema 4.3.1 se deduce que el recorrido de T *no* es todo R^3 y que la matriz estándar para T no es invertible. Para mostrar que el recorrido de T no es todo R^3, es necesario encontrar un vector **w** en R^3 que no sea la imagen de ningún vector **x** bajo T. Pero cualquier vector **w** fuera del plano xy posee esta propiedad, ya que todas las imágenes bajo T están en el plano xy. Además, por la tabla 5 de la sección 4.2, la matriz estándar para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que no es invertible, ya que det $[T] = 0$. Δ

INVERSA DE UN OPERADOR LINEAL UNO A UNO

Si $T_A:R^n \rightarrow R^n$ es un operador lineal uno a uno, entonces por el teorema 4.3.1 la matriz A es invertible. Así, $T_{A^{-1}}:R^n \rightarrow R^n$ por sí mismo es un operador lineal; se denomina ***inverso de T_A***. Los operadores lineales T_A y $T_{A^{-1}}$ se cancelan entre sí en el sentido de que para todo **x** en R^n

$$T_A(T_{A^{-1}}(\mathbf{x})) = AA^{-1}\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$
$$T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

o, equivalentemente,

$$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I$$
$$T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_I$$

Desde un punto de vista más geométrico, si **w** es la imagen de **x** bajo T_A, entonces $T_{A^{-1}}$ transforma de vuelta **w** en **x**, ya que

$$T_{A^{-1}}(\mathbf{w}) = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

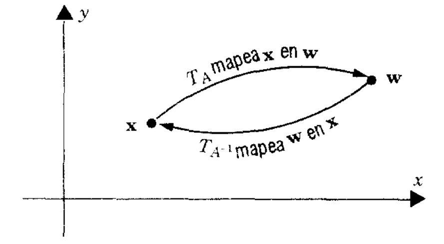


Figura 3

Antes de presentar un ejemplo, será de utilidad mencionar algo sobre la notación. Cuando un operador lineal uno a uno sobre R^n se escribe como $T:R^n \to R^n$ (en vez de $T_A:R^n \to R^n$), entonces el inverso del operador T se denota por T^{-1} (en vez de $T_{A^{-1}}$). Como la matriz estándar de T^{-1} es la inversa de la matriz estándar para T, se tiene

$$\boxed{[T^{-1}] = [T]^{-1}} \tag{1}$$

Ejemplo 4 Sea $T:R^2 \to R^2$ el operador que hace girar cada vector de R^2 hasta describir el ángulo θ; de modo que por la tabla 6 de la sección 4.2

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

Geométricamente es evidente que para deshacer el efecto de T es necesario hacer girar cada vector de R^2 por un ángulo $-\theta$. Pero esto es exactamente lo que hace el operador T^{-1}, ya que la matriz estándar para T^{-1} es

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

(comprobar), que es idéntica a (2), excepto que se sustituye por $-\theta$. Δ

Ejemplo 5 Demostrar que el operador lineal $T:R^2 \to R^2$ definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

es uno a uno, y encontrar $T^{-1}(w_1, w_2)$.

Solución. La forma matricial de estas ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

de modo que la matriz estándar para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es invertible (de modo que T es uno a uno), y la matriz estándar para T^{-1} es

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Así,

$$[T^{-1}]\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_2 \\ -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2 \end{bmatrix}$$

a partir de lo cual se puede deducir que

$$T^{-1}(w_1, w_2) = (\tfrac{4}{5}w_1 - \tfrac{1}{5}w_2,\ -\tfrac{3}{5}w_1 + \tfrac{2}{5}w_2) \quad \Delta$$

PROPIEDADES DE LA LINEALIDAD

En la sección precedente, una trasformación $T{:}R^n \to R^m$ se definió como lineal si las ecuaciones que relacionan a $\mathbf{x}$ y a $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$ son lineales. El siguiente teorema proporciona otra representación de la linealidad. Este teorema es fundamental y constituye la base para extender el concepto de transformación lineal a casos más generales que se presentarán después en el texto.

Teorema 4.3.2. *Una trasformación $T{:}R^n \to R^m$ es lineal si y sólo si las siguientes relaciones se cumplen para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^n y cualquier escalar c.*

a) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
b) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

Demostración. Primero se supone que T es una transformación lineal, y se hace que A sea la matriz estándar para T. Por las propiedades aritméticas básicas de las matrices se concluye que

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

y

$$T(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$$

Recíprocamente, se supone que la trasformación T satisface las propiedades *a)* y *b)*. Se puede demostrar que T es lineal si se encuentra una matriz A con la propiedad

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \tag{3}$$

para todos los vectores $\mathbf{x}$ en R^n. Con lo anterior se demuestra que T es la multiplicación por A y, en consecuencia, que es lineal. Pero antes de poder obtener esta matriz es necesario observar que la propiedad *a)* se puede extender a tres o

más términos; por ejemplo, si **u**, **v** y **w** son vectores cualesquiera en R^n, entonces agrupando primero **v** y **w** y aplicando la propiedad *a*) se obtiene

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$$

Más generalmente, para vectores cualesquiera $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en R^n, se tiene

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) + \cdots + T(\mathbf{v}_k)$$

Luego, para encontrar la matriz A, sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ los vectores

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

y sea A la matriz cuyos vectores columna consecutivos son $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2), \ldots,$ $T(\mathbf{e}_n)$; es decir,

$$A = [\,T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)\,] \tag{5}$$

Si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es cualquier vector en R^n, entonces como se analizó en la sección 1.3, el producto $A\mathbf{x}$ es una combinación lineal de los vectores columna de A con coeficientes de **x**, de modo que

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n T(\mathbf{e}_n) \\ &= T(x_1\mathbf{e}_1) + T(x_2\mathbf{e}_2) + \cdots + T(x_n\mathbf{e}_n) \qquad \boxed{\text{Propiedad } b)} \\ &= T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \qquad \boxed{\text{Propiedad } a) \text{ para } n \text{ términos}} \\ &= T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

con lo que se completa la demostración. □

La Expresión (5) es importante por derecho propio, ya que constituye una fórmula explícita con la cual la matriz estándar para un operador lineal $T:R^n \to R^m$ se puede expresar en términos de las imágenes de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ bajo T. Por razones que serán analizadas después, los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ en (4) se

denominan vectores ***estándar básicos*** para R^n. En R^2 y R^3 se trata de los vectores de longitud 1 situados a lo largo de los ejes de coordenadas (figura 4).

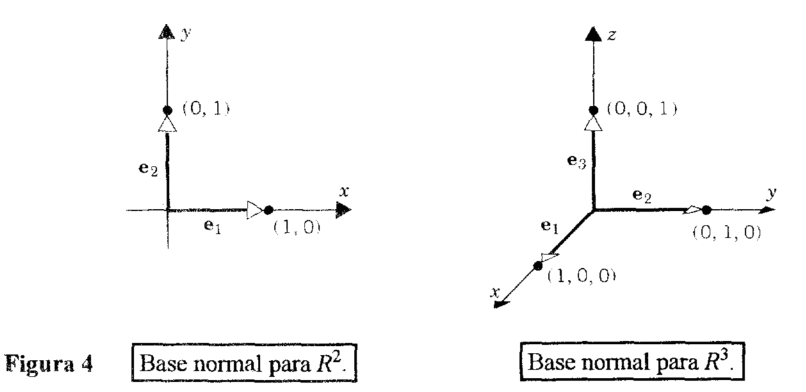


Figura 4 Base normal para R^2. Base normal para R^3.

Debido a su importancia, la expresión (5) se planteará como teorema para fines de referencias futuras.

Teorema 4.3.3. *Si* $T{:}R^n \to R^m$ *es una transformación lineal y* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *son los vectores estándar básicos para* R^n, *entonces la matriz estándar para* T *es*

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)] \tag{6}$$

La fórmula (6) es un medio eficaz para encontrar matrices estándar y analizar el efecto geométrico de una transformación lineal. Por ejemplo, suponer que $T{:}R^3 \to R^3$ es la proyección ortogonal sobre el plano xy. Con referencia a la figura 4, geométricamente es evidente que

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que por (6)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lo que concuerda con el resultado de la tabla 5.

Usando (6) de otra forma, suponer que $T_A{:}R^3 \to R^2$ es la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Las imágenes de los vectores estándar básicos se pueden leer directamente de las columnas de la matriz A:

$$T_A\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix},\quad T_A\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\quad T_A\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$$

Ejemplo 6 Sea l la recta en el plano xy que pasa por el origen y forma un ángulo con el eje x positivo, donde $0 \leq \theta < \pi$. Como se ilustra en la figura 5*a*, sea $T{:}R^2 \to R^2$ el operador lineal que transforma cada vector en su proyección ortogonal sobre l.

a) Encontrar la matriz estándar para T.
b) Encontrar la proyección ortogonal del vector $x = (1, 5)$ sobre la recta que pasa por el origen y forma un ángulo $\theta = \pi/6$ con el eje x positivo.

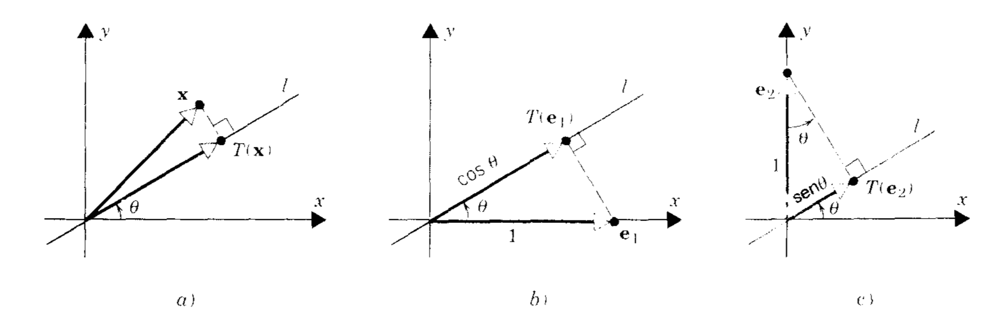


Figura 5 *a*) *b*) *c*)

Solución de a). De (6),

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)]$$

donde $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son los vectores estándar básicos para R^2. Se considerará el caso en que $0 \leq \theta \leq \pi/2$; el caso en que $\pi/2 < \theta < \pi$ es semejante. Con referencia a la figura 5*b*, se tiene $\|T(\mathbf{e}_1)\| = \cos\theta$, de modo que

$$T(\mathbf{e}_1)=\begin{bmatrix}\|T(\mathbf{e}_1)\|\cos\theta\\ \|T(\mathbf{e}_1)\|\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta\\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta\end{bmatrix}$$

y con referencia a la figura 5*c*, se tiene $\|T(\mathbf{e}_2)\| = \operatorname{sen}\theta$, de modo que

$$T(\mathbf{e}_2)=\begin{bmatrix}\|T(\mathbf{e}_2)\|\cos\theta\\ \|T(\mathbf{e}_2)\|\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\ \operatorname{sen}^2\theta\end{bmatrix}$$

Así, la matriz estándar para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Solución de b). Como sen $\pi/6 = 1/2$ y cos $\pi/6 = \sqrt{3}/2$, por el inciso a) se concluye que la matriz estándar para este operador proyección es

$$[T] = \begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Así,

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3+5\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}+5}{4} \end{bmatrix}$$

o bien, en notación horizontal,

$$T(1,5) = \left(\frac{3+5\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}+5}{4}\right) \quad \Delta$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS EIGENVECTORES

Recuérdese de la sección 2.3 que si A es una matriz $n \times n$, entonces se denomina *eigenvalor* de A si existe un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{o equivalentemente} \quad (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Los vectores $\mathbf{x}$ diferentes de cero que satisfacen esta ecuación se denominan *eigenvectores* de A correspondientes a λ.

Los eigenvalores y eigenvectores también se pueden definir para operadores lineales sobre R^n; estas definiciones son paralelas a las definiciones correspondientes para matrices.

Definición. Si $T{:}R^n \to R^n$ es un operador lineal, entonces el escalar se denomina ***eigenvalor de T*** si en R^n existe un $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que

$$T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \tag{7}$$

Los vectores $\mathbf{x}$ diferentes de cero que satisfacen esta ecuación se denominan ***eigenvectores de T correspondientes a*** λ.

Observar que si A es la matriz estándar para T, entonces (7) se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

de donde se deduce que

- Los eigenvalores de T son precisamente los eigenvalores de su matriz estándar A.
- $\mathbf{x}$ es un eigenvector de T correspondiente a λ si y sólo si $\mathbf{x}$ es un eigenvector de A correspondiente a λ.

Si λ es un eigenvalor de A y $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente, entonces $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, de modo que la multiplicación por A transforma $\mathbf{x}$ en un múltiplo escalar de sí mismo. En R^2 y R^3, esto significa que *la multiplicación por A transforma cada eigenvector* $\mathbf{x}$ *en un vector que está sobre la misma recta que* $\mathbf{x}$ (figura 6).

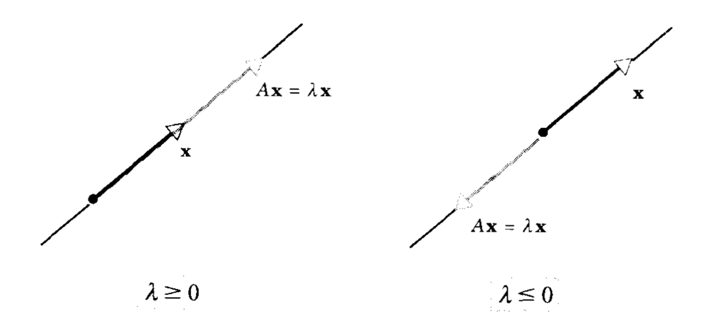


Figura 6

Recuérdese de la sección 4.2 que si $\lambda \geq 0$, entonces el operador lineal $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ comprime a $\mathbf{x}$ por un factor λ si $0 \leq \lambda \leq 1$ o estira a $\mathbf{x}$ por un factor λ si $\lambda \geq 1$. Si $\lambda < 0$, entonces $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ invierte la dirección de $\mathbf{x}$, y comprime el vector invertido por un factor $|\lambda|$ si $0 \leq |\lambda| \leq 1$ o estira el vector invertido por un factor si 1 (figura 7).

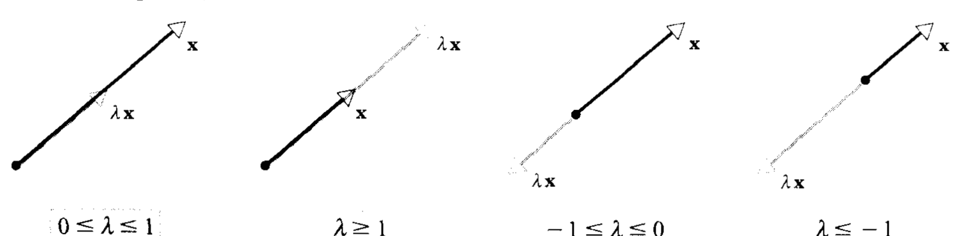


Figura 7

Ejemplo 7 Sea $T: R^2 \to R^2$ el operador lineal que hace girar cada vector un ángulo θ. Geométricamente es evidente que a menos de que θ sea un múltiplo de π, entonces T no transforma ningún vector $\mathbf{x}$ diferente de cero sobre la misma recta que $\mathbf{x}$; en consecuencia, T no tiene eigenvalores reales. Pero si θ es un múltiplo de π, entonces todo vector $\mathbf{x}$ diferente de cero es transformado sobre la misma recta que $\mathbf{x}$, de modo que *todo* vector diferente de cero es un eigenvector de T. A continuación se comprobarán algebraicamente estas observaciones geométricas. La matriz estándar para T es

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Como se analizó en la sección 2.3, los eigenvalores de esta matriz son las soluciones de la ecuación característica

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix} = 0$$

es decir,

$$(\lambda - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 0 \tag{8}$$

Pero si θ no es un múltiplo de π, entonces $\operatorname{sen}^2\theta > 0$, de modo que esta ecuación no tiene solución real para y, en consecuencia, A no tiene eigenvectores reales.* Si θ es un múltiplo de π, entonces $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$ o $\cos\theta = -1$, dependiendo del múltiplo particular de π. En el caso en que $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$, la ecuación característica (8) se vuelve $(\lambda - 1)^2 = 0$, de modo que $\lambda = 1$ es el único eigenvalor de A. En este caso, la matriz A es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Así, para todo $\mathbf{x}$ en R^2,

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

de modo que T transforma todo vector en sí mismo y, por tanto, en la misma recta. En el caso en que $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = -1$, la ecuación característica (8) se vuelve $(\lambda + 1)^2 = 0$, de modo que $\lambda = -1$ es el único eigenvalor de A. En este caso, la matriz de A es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Así, para todo $\mathbf{x}$ en R^2,

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = -I\mathbf{x} = -\mathbf{x}$$

de modo que T transforma todo vector en su negativo y, por tanto, en la misma recta que x. Δ

---

*Existen aplicaciones que requieren escalares complejos y vectores con componentes complejas. En tales casos son permisibles los eigenvalores complejos y los eigenvectores con componentes complejas. Sin embargo, este hecho carece de importancia geométrica directa aquí. En capítulos ulteriores se analizarán tales eigenvalores y eigenvectores, pero hasta que explícitamente se establezca lo contrario, se supondrá que se considerarán sólo eigenvalores reales y eigenvectores con componentes reales.

Ejemplo 8 Sea $T:R^3 \to R^3$ la proyección ortogonal sobre el plano xy. Los vectores en el plano xy son transformados en sí mismos bajo T, de modo que todo vector diferente de cero en el plano xy es un eigenvector correspondiente al eigenvalor $\lambda = 1$. Todo vector $\mathbf{x}$ a lo largo del eje z es transformado en $\mathbf{0}$ bajo T, que está en la misma recta que $\mathbf{x}$, de modo que todo vector diferente de cero sobre el eje z es un eigenvector correspondiente al eigenvalor $\lambda = 0$. Los vectores que no están en el plano xy o a lo largo del eje z no son transformados en múltiplos escalares de ellos mismos, de modo que no existen otros eigenvectores o eigenvalores.

Para comprobar algebraicamente estas observaciones geométricas, recordar de la tabla 5 de la sección 4.2 que la matriz estándar para T es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de A es

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

o

$$(\lambda - 1)^2 \lambda = 0$$

cuyas soluciones $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ ya se anticiparon.

Como se analizó en la sección 2.3, los eigenvectores de la matriz A correspondientes a un eigenvalor λ son las soluciones diferentes de cero de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Si $\lambda = 0$, este sistema es

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuyas soluciones son $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$ (comprobar), o bien, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Como ya se había anticipado, estos son los vectores a lo largo del eje z. Si $\lambda = 1$, entonces el sistema (9) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuyas soluciones son $x_1 = s$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$ (comprobar), o bien, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como ya se había anticipado, estos son los vectores en el plano xy. Δ

RESUMEN

En el teorema 2.3.6 se presentó una lista con seis resultados que son equivalentes a la invertibilidad de una matriz A. Esta sección concluye agregando el teorema 4.3.1 a esa lista, para obtener el siguiente teorema que relaciona todos los temas principales estudiados hasta el momento.

Teorema 4.3.4. *Si A es una matriz $n \times n$, y si $T_A: R^n \to R^n$ es la multiplicación por A, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *A es invertible.*
b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.*
c) *La forma escalonada reducida de A es I_n.*
d) *A se puede expresar como un producto de matrices elementales.*
e) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.*
f) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.*
g) *$\det A) \neq 0$.*
h) *El recorrido de T_A es R^n.*
i) *T_A es uno a uno.*

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.3

1. Por inspección, determinar si el operador lineal es uno a uno.
a) La proyección ortogonal sobre el eje x en R^2.
b) La reflexión respecto al eje y en R^2.
c) La reflexión respecto a la recta $y = x$ en R^2.
d) Una contracción con factor $k > 0$ en R^2.
e) Una rotación alrededor del eje z en R^3.
f) Una reflexión respecto al plano xy en R^3.
g) Una dilatación con factor $k > 0$ en R^3.

2. Encontrar la matriz estándar del operador lineal definido por las ecuaciones y usar el teorema 4.3.1 para determinar si el operador es uno a uno.

a) $\begin{aligned} w_1 &= 8x_1 + 4x_2 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\ w_2 &= 5x_1 + x_2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 4x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 + 6x_3 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ w_3 &= x_1 + 8x_3 \end{aligned}$

3. Demostrar que el recorrido del operador lineal definido por las ecuaciones

$$w_1 = 4x_1 - 2x_2$$
$$w_2 = 2x_1 - x_2$$

no es todo de R^2, y encontrar un vector que no esté en el recorrido.

4. Demostrar que el recorrido del operador lineal definido por las ecuaciones

$$w_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$w_2 = 5x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$w_3 = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$

no es todo de R^3, y encontrar un vector que no esté en el recorrido.

5. Determinar si el operador lineal $T : R^2 \to R^2$ definido por las ecuaciones es uno a uno; en caso afirmativo, encontrar la matriz estándar para el operador inverso, y encontrar $T^{-1}(w_1, w_2)$.

a) $w_1 = x_1 + 2x_2$, $w_2 = -x_1 + x_2$ b) $w_1 = 4x_1 - 6x_2$, $w_2 = -2x_1 + 3x_2$ c) $w_1 = -x_2$, $w_2 = -x_1$ d) $w_1 = 3x_1$, $w_2 = -5x_1$

6. Determinar si el operador lineal $T : R^3 \to R^3$ definido por las ecuaciones es uno a uno; en caso afirmativo, encontrar la matriz estándar para el operador inverso, y encontrar $T^{-1}(w_1, w_2, w_3)$.

a) $w_1 = x_1 - 2x_2 + 2x_3$, $w_2 = 2x_1 + x_2 + x_3$, $w_3 = x_1 + x_2$

b) $w_1 = x_1 - 3x_2 + 4x_3$, $w_2 = -x_1 + x_2 + x_3$, $w_3 = -2x_2 + 5x_3$

c) $w_1 = x_1 + 4x_2 - x_3$, $w_2 = 2x_1 + 7x_2 + x_3$, $w_3 = x_1 + 3x_2$

d) $w_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $w_2 = -2x_1 + x_2 + 4x_3$, $w_3 = 7x_1 + 4x_2 - 5x_3$

7. Por inspección, determinar el inverso del operador lineal uno a uno dado.
a) La reflexión respecto al eje x en R^2.
b) La rotación por un ángulo de $\pi/4$ en R^2.
c) La dilatación por un factor de 3 en R^2.
d) La reflexión respecto al plano yz en R^3.
e) La contracción por un factor de $\frac{1}{5}$ en R^3.

En los ejercicios 8 y 9, aplicar el teorema 4.3.2 para determinar si $T : R^2 \to R^2$ es un operador lineal.

8. a) $T(x, y) = (2x, y)$ b) $T(x, y) = (x^2, y)$ c) $T(x, y) = (-y, x)$ d) $T(x, y) = (x, 0)$

9. a) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$ b) $T(x, y) = (x + 1, y)$
c) $T(x, y) = (y, y)$ d) $T(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

En los ejercicios 10 y 11, aplicar el teorema 4.3.2 para determinar si $T : R^3 \to R^2$ es una transformación lineal.

10. a) $T(x, y, z) = (x, x + y + z)$ b) $T(x, y, z) = (1, 1)$

11. a) $T(x, y, z) = (0, 0)$ b) $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$

12. En cada inciso, usar el teorema 4.3.3 para encontrar la matriz estándar del operador lineal a partir de las imágenes de los vectores estándar básicos.
a) Los operadores reflexión sobre R^2 en la tabla 2 de la sección 4.2.
b) Los operadores reflexión sobre R^3 en la tabla 3 de la sección 4.2.
c) Los operadores proyección sobre R^2 en la tabla 4 de la sección 4.2.
d) Los operadores proyección sobre R^3 en la tabla 5 de la sección 4.2.
e) Los operadores rotación sobre R^2 en la tabla 6 de la sección 4.2.
f) Los operadores dilatación y contracción sobre R^3 en la tabla 9 de la sección 4.2.

13. Aplicar el teorema 4.3.3, para encontrar la matriz estándar de $T: R^2 \to R^2$ a partir de las imágenes de los vectores estándar básicos.
a) $T: R^2 \to R^2$ proyecta un vector ortogonalmente sobre el eje x y luego refleja ese vector respecto al eje y.
b) $T: R^2 \to R^2$ refleja un vector respecto a la recta $y = x$ y luego refleja ese vector respecto al eje x.
c) $T: R^2 \to R^2$ dilata un vector por un factor de 3, luego refleja ese vector respecto a la recta $y = x$, y luego proyecta ese vector ortogonalmente sobre el eje y.

14. Aplicar el teorema 4.3.3 para hallar la matriz estándar de $T: R^3 \to R^3$ a partir de las imágenes de los vectores estándar básicos.
a) $T: R^3 \to R^3$ refleja un vector respecto al plano xz y luego contrae ese vector por un factor de 1/5.
b) $T: R^3 \to R^3$ proyecta un vector ortogonalmente sobre el plano xz, y luego proyecta ese vector ortogonalmente sobre el plano xy.
c) $T: R^3 \to R^3$ refleja un vector respecto al plano xy, luego refleja ese vector respecto al plano xz, y luego refleja ese vector respecto al plano yz.

15. Sea $T_A: R^3 \to R^3$ la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

y sean $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ los vectores estándar básicos para R^3. Encontrar por inspección los siguientes vectores.
a) $T_A(\mathbf{e}_1)$, $T_A(\mathbf{e}_2)$, y $T_A(\mathbf{e}_3)$ b) $T_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ c) $T_A(7\mathbf{e}_3)$

16. Determinar si la multiplicación por A es una transformación lineal uno a uno.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

17. Usar el resultado del ejemplo 6 para encontrar la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre la recta que pasa por el origen y forma un ángulo θ con el eje x positivo.
a) $\mathbf{x} = (-1, 2)$; $\theta = 45°$ b) $\mathbf{x} = (1, 0)$; $\theta = 30°$ c) $\mathbf{x} = (1, 5)$; $\theta = 120°$

18. Aplicar el tipo de razonamiento proporcionado en el ejemplo 8 para encontrar los eigenvalores y los eigenvectores correspondientes de T. Verificar las conclusiones calculando los eigenvalores y los eigenvectores correspondientes a partir de la matriz estándar para T.
a) $T: R^2 \to R^2$ es la reflexión respecto al eje x.
b) $T: R^2 \to R^2$ es la reflexión respecto a la recta $y = x$.

c) $T:R^2 \to R^2$ es la proyección ortogonal sobre el eje x.
d) $T:R^2 \to R^2$ es la contracción por un factor de $\frac{1}{2}$.

19. Seguir las indicaciones del ejercicio 18.
a) $T:R^3 \to R^3$ es la reflexión respecto al plano yz.
b) $T:R^3 \to R^3$ es la proyección ortogonal sobre el plano xz.
c) $T:R^3 \to R^3$ es la dilatación por un factor de 2.
d) $T:R^3 \to R^3$ es una rotación de 45° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor del eje z.

20. a) ¿Es uno a uno la composición de transformaciones lineales uno a uno? Justificar la conclusión.
b) ¿Es posible que la composición de una transformación lineal uno a uno y una transformación lineal no uno a uno sea uno a uno? Justificar la conclusión.

21. Demostrar que $T(x, y) = (0, 0)$ define un operador lineal sobre R^2 pero $T(x, y) = (1, 1)$ no lo hace.

22. Demostrar que si $T:R^n \to R^m$ es una transformación lineal, entonces $T\mathbf{0}) = \mathbf{0}$; es decir, T transforma el vector cero de R^n en el vector cero de R^m.

23. Sea l la recta en el plano xy que pasa por el origen y forma un ángulo con el eje x positivo, donde $0 \leq \theta < \pi$. Sea $T:R^2 \to R^2$ el operador lineal que refleja cada vector respecto l (figura 8).

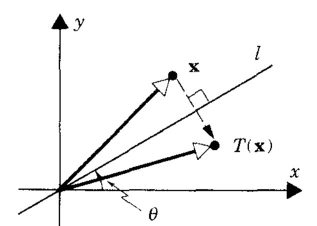
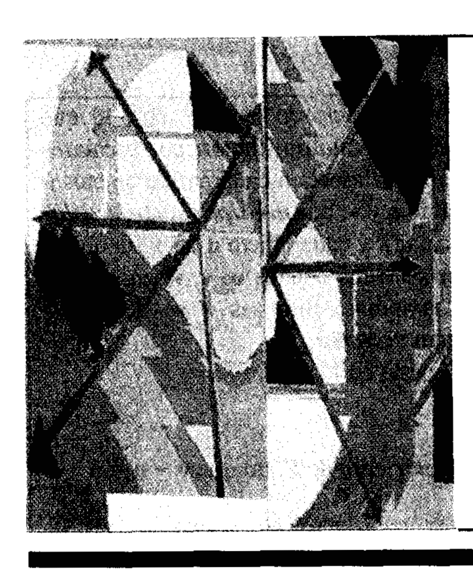


Figura 8

a) Usar el método del ejemplo 6 para encontrar la matriz estándar para T.
b) Encontrar la reflexión del vector $\mathbf{x} = (1, 5)$ respecto a la recta l que pasa por el origen y forma un ángulo $\theta = 30^{\circ}$ con el eje x positivo.

24. Demostrar: Un matriz A $n \times n$ es invertible si y sólo si el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tiene exactamente una solución para todo vector $\mathbf{w}$ en R^n para el que el sistema es consistente.





CAPÍTULO 5

ESPACIOS VECTORIALES GENERALES

5.1 ESPACIOS VECTORIALES REALES

En esta sección se generalizará aún más el concepto de vector. Se enunciará un conjunto de axiomas que, si una clase de objetos hace que se cumplan, permitirá denominar "vectores" a esos objetos. Los axiomas se elegirán abstrayendo las propiedades más importantes de los vectores en R^n; como consecuencia, los vectores en R^n harán que se cumplan de manera automática estos axiomas. Así, el nuevo concepto de vector abarcará a los vectores anteriores y también a muchos vectores nuevos. Estos vectores nuevos incluirán, entre otras cosas, varias clases de matrices y funciones. El trabajo desarrollado en esta sección no es un ejercicio inútil de matemáticas teóricas, ya que proporciona una herramienta poderosa para extender la representación geométrica a una amplia variedad de problemas matemáticos importantes en los que de otra forma no se contaría con la intuición geométrica. Planteada en términos breves, la idea es ésta: Los vectores en R^2 y R^3 se pueden representar geométricamente como flechas, lo cual permite que la representación física o mental ayude a resolver problemas. Como los axiomas que se usarán para crear los nuevos tipos de vectores se basarán en propiedades de los vectores en R^2 y R^3, estos nuevos vectores poseerán muchas de las propiedades conocidas de los vectores en R^2 y R^3. Por consiguiente, cuando se quiera resolver un problema en que aparezcan los nuevos tipos de vectores, por ejemplo matrices o funciones, se podrá obtener una base para el problema mediante una geométrica cómo sería el problema crrespondiente en R^2 y R^3.

AXIOMAS DE ESPACIOS VECTORIALES

Definición. Sea V un conjunto cualesquiera no vacío de objetos sobre el que están definidas dos operaciones: la adición y la multiplicación por escalares (números). Por ***adición*** se entiende una regla que asocia a cada par de objetos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V un objeto $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ denominado ***suma*** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$; por ***multiplicación escalar*** se entiende una regla que asocia a cada escalar k y cada objeto $\mathbf{u}$ en V un objeto $k\mathbf{u}$, denominado ***múltiplo escalar*** de $\mathbf{u}$ por k. Si los objetos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ en V y los escalares k y l satisfacen los siguientes axiomas, entonces V se denomina ***espacio vectorial***, y sus objetos se denominan ***vectores***.

1) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son objetos en V, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está en V.
2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
3) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
4) Existe un objeto $\mathbf{0}$ en V, denominado ***vector cero*** de V, tal que $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}$ en V.
5) Para todo $\mathbf{u}$ en V existe un objeto $-\mathbf{u}$ en V, denominado ***negativo*** de $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.
6) Si k es cualquier escalar y $\mathbf{u}$ es cualquier objeto en V, entonces $k\mathbf{u}$ está en V.
7) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
8) $(k+l)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$
9) $k(l\mathbf{u})=(kl)(\mathbf{u})$
10) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

OBSERVACIÓN. Dependiendo de la aplicación, los escalares pueden ser números reales o complejos. Los espacios vectoriales en que los escalares son números complejos se denominan ***espacios vectoriales complejos***, y aquéllos donde los escalares deben ser reales se denominan ***espacios vectoriales reales***. En el capítulo 10 se estudiarán los espacios vectoriales complejos; hasta entonces, *todos los escalares considerados serán números reales.*

El lector debe tener en mente que la definición de espacio vectorial no especifica la naturaleza de los vectores ni las operaciones. Cualquier tipo de objeto puede ser un vector, y es posible que las operaciones de adición y multiplicación escalar no guarden ninguna relación o semejanza con las operaciones vectoriales estándar sobre R^n. El único requisito es que se cumplan los 10 axiomas en la definición de espacio vectorial. Algunos autores usan las notaciones $\oplus$ y $\odot$ en la adición vectorial y la multiplicación escalar para distinguir estas operaciones de la adición y la multiplicación de números reales; a pesar de ello, aquí no se usará esta notación.

EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES

Los siguientes ejemplos ilustran la variedad de espacios vectoriales posibles. En cada ejemplo se especifica un conjunto no vacío V y dos operaciones: la adición y la multiplicación escalar; luego se comprobará que se cumplen los 10 axiomas de espacio vectorial, con lo cual V se puede denominar, con las operaciones especificadas, espacio vectorial.

Ejemplo 1 El conjunto $V=R^n$ con las operaciones estándar de adición y multiplicación escalar, definido en la sección 4.1 es un espacio vectorial. Los axiomas 1 y

6 se deducen de las definiciones de las operaciones estándar sobre R^n; los demás axiomas se deducen del teorema 4.1.1. Δ

Los tres casos especiales más importantes de R^n son R (los números reales), R^2 (los vectores en el plano) y R^3 (los vectores en el espacio tridimensional).

Ejemplo 2 Demostrar que el conjunto V de todas las matrices 2×2 con elementos reales es un espacio vectorial si la adición vectorial se define como la suma de matrices y la multiplicación escalar vectorial se define como la multiplicación escalar matricial.

Solución. En este ejemplo resulta conveniente verificar los axiomas en el siguiente orden: 1, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 5 y 10. Sea

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

Para probar el axioma 1, es necesario demostrar que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es un objeto en V; es decir, debe demostrarse que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es una matriz 2×2. Pero este hecho se deduce por la definición de adición de matrices, ya que

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

De manera semejante, el axioma 6 se cumple porque para cualquier número real k se tiene

$$k\mathbf{u} = k\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

de modo que $k\mathbf{u}$ es una matriz 2×2 y en, consecuencia, es un objeto en V.

El axioma 2 se deduce del teorema 1.4.1*a*, ya que

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

De manera semejante, el axioma 3 se deduce del inciso *b*) de ese teorema; y los axiomas 7, 8 y 9 se deducen de los incisos *h*), *j*) y *l*), respectivamente, de ese teorema.

Para probar el axioma 4 es necesario encontrar un objeto $\mathbf{0}$ en V tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}$ en V. Esto puede lograrse al definir a $\mathbf{0}$ como

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esta definición,

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

y de manera semejante $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. Para probar el axioma 5 se debe demostrar que cada objeto $\mathbf{u}$ en V tiene un negativo $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ y $(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Esto se puede hacer definiendo el negativo de $\mathbf{u}$ como

$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

Con esta definición

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

y de manera semejante $(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Por último, el axioma 10 es un simple cálculo:

$$1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u} \quad \Delta$$

Ejemplo 3 El ejemplo 2 es un caso especial de una clase más general de espacios vectoriales. Los razonamientos de ese ejemplo se pueden adaptar para demostrar que el conjunto V de todas las matrices $m \times n$ con elementos reales, junto con las operaciones de adición de matrices y multiplicación escalar, es un espacio vectorial. La matriz cero $m \times n$ es el vector cero $\mathbf{0}$, y si $\mathbf{u}$ es la matriz U $m \times n$, entonces la matriz $-U$ es el negativo $-\mathbf{u}$ del vector $\mathbf{u}$. Este espacio vectorial se denotará por el símbolo M_{mn}. Δ

Ejemplo 4 Sea V el conjunto de las funciones con valores reales definidas sobre toda la recta real $(-\infty, \infty)$. Si $\mathbf{f} = f(x)$ y $\mathbf{g} = g(x)$ son dos de estas funciones y k es cualquier número real, entonces la función suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y el múltiplo escalar $k\mathbf{f}$ se definen por

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = f(x) + g(x)$$
$$(k\mathbf{f})(x) = kf(x)$$

En otras palabras, el valor de la función $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ en x se obtiene al sumar entre sí los valores de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ en x (figura 1*a*). De manera semejante, el valor de $k\mathbf{f}$ en x es k veces el valor de $\mathbf{f}$ en x (figura 1*b*). En los ejercicios se pide al lector demostrar que V es un espacio vectorial con respecto a estas operaciones. Este espacio vectorial se denota por $F(-\infty, \infty)$. Si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son vectores en este espacio, entonces afirmar que $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ equivale a decir que $f(x) = g(x)$ para toda x en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

El vector $\mathbf{0}$ en $F(-\infty, \infty)$ es la función constante que es idénticamente cero para todos los valores de x. La gráfica de esta función es la recta que coincide con el eje x. El negativo de un vector $\mathbf{f}$ es la función $-\mathbf{f} = -f(x)$. Geométricamente, la gráfica de $-\mathbf{f}$ es la reflexión de la gráfica de $\mathbf{f}$ con respecto al eje x (figura 1*c*). Δ

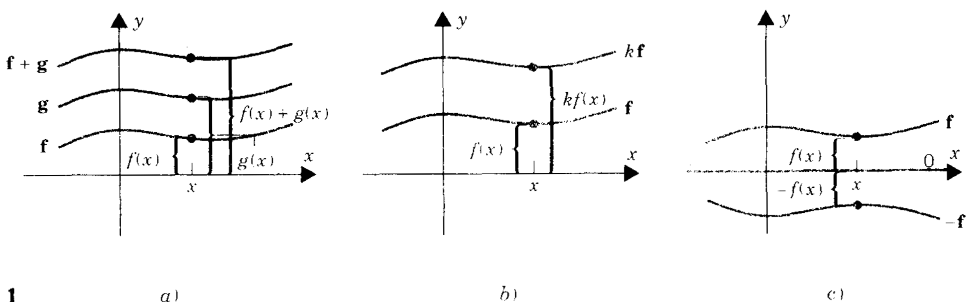


Figura 1 *a)* *b)* *c)*

OBSERVACIÓN. En el ejemplo precedente, la atención se centró en el intervalo $(-\infty, \infty)$. En caso de que la atención se hubiera restringido a algún intervalo cerrado $[a, b]$ o en algún intervalo abierto (a, b), las funciones definidas en estos intervalos con las operaciones establecidas en el ejemplo también hubieran producido espacios vectoriales. Estos espacios vectoriales se denotan por $F\,[a, b]$ y $F(a, b)$, respectivamente.

Ejemplo 5 Sea $V = R^2$, con las operaciones de adición y multiplicación escalar definidas como sigue: Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, entonces se define

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

y si k es cualquier número real, entonces se define

$$k\mathbf{u} = (ku_1, 0)$$

Por ejemplo, si $\mathbf{u} = (2, 4)$ y $\mathbf{v} = (-3, 5)$, y $k = 7$, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + (-3), 4 + 5) = (-1, 9)$$
$$k\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = (7 \cdot 2, 0) = (14, 0)$$

La operación de adición es la operación de adición estándar sobre R^2, pero la multiplicación escalar no es la multiplicación escalar estándar. En los ejercicios se pide al lector demostrar que se cumplen los nueve primeros axiomas de espacio vectorial; sin embargo, existen valores de $\mathbf{u}$ para los cuales no se cumple el axioma 10. Por ejemplo, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es tal que $u_2 \neq 0$, entonces

$$1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 0) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$$

Por tanto, V no es un espacio vectorial con las operaciones establecidas. Δ

Ejemplo 6 Sea V cualquier plano que pasa por el origen en R^3. Se demostrará que los puntos en V constituyen un espacio vectorial bajo las operaciones estándar de adición y multiplicación escalar para vectores en R^3. Por el ejemplo 1, se sabe que

R^3 mismo es un espacio vectorial bajo estas operaciones. Así, los axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10 se cumplen para todos los puntos en R^3 y en consecuencia, para todos los puntos en el plano V. Por consiguiente, basta demostrar que se cumplen los axiomas 1, 4, 5 y 6.

Como el plano V pasa por el origen, tiene una ecuación de la forma

$$ax + by + cz = 0 \tag{1}$$

(Teorema 3.5.1). Por tanto, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son puntos en V, entonces $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ y $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. Sumando estas ecuaciones se obtiene

$$a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

Esta igualdad establece que las coordenadas del punto

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

satisfacen (1); así, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en el plano V. Esto demuestra que se cumple el axioma 1. Las verificaciones de los axiomas 4 y 6 se dejan como ejercicios; sin embargo, se demostrará el axioma 5. Al multiplicar $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ por -1 se obtiene

$$a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0$$

Así, $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$ está en V. Esto establece el axioma 5. Δ

Ejemplo 7 Sea V que consta de un solo objeto, el cual se denota por $\mathbf{0}$, y se define

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

para todos los escalares k. Es fácil comprobar que se cumplen todos los axiomas de espacio vectorial. Este espacio se denomina ***espacio vectorial cero***. Δ

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS VECTORES

A medida que se avance, se agregarán más ejemplos de espacios vectoriales a la lista. Esta sección concluye con un teorema que da una lista útil de propiedades vectoriales.

> **Teorema 5.1.1.** *Sean V un espacio vectorial, $\mathbf{u}$ un vector en V y k un escalar; entonces:*
> *a)* $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
> *b)* $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
> *c)* $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
> *d) If* $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *entonces* $k = 0$ *o* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Se demostrarán los incisos *a*) y *c*), y las demostraciones de los demás incisos se dejan como ejercicios.

Demostración de a). Se puede escribir

$$
\begin{aligned}
0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} &= (0 + 0)\mathbf{u} && \text{[Axioma 8]} \\
&= 0\mathbf{u} && \text{[Propiedad del número 0]}
\end{aligned}
$$

Por el axioma 5, el vector $0\mathbf{u}$ tiene un negativo: $-0\mathbf{u}$. Al sumar este negativo a ambos miembros de la última expresión se obtiene

$$[0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}] + (-0\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$$

o

$$
\begin{aligned}
0\mathbf{u} + [0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})] &= 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) && \text{[Axioma 3]} \\
0\mathbf{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} && \text{[Axioma 5]} \\
0\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{[Axioma 4]}
\end{aligned}
$$

Demostración de c). Para probar $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, es necesario demostrar que $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Para ver esto, obsérvese que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} &= 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} && \text{[Axioma 10]} \\
&= (1 + (-1))\mathbf{u} && \text{[Axioma 8]} \\
&= 0\mathbf{u} && \text{[Propiedad de los números]} \\
&= \mathbf{0} \quad \square && \text{[Inciso } a)]
\end{aligned}
$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.1

En los ejercicios del 1 al 13 se da un conjunto de objetos, junto con operaciones de adición y multiplicación escalar. Determinar cuáles conjuntos son espacios vectoriales bajo las operaciones dadas. Para aquellos que no sean espacios vectoriales, enumerar los axiomas que no se cumplen.

1. El conjunto de todas las ternas de números reales (x, y, z) con las operaciones

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \quad \text{y} \quad k(x, y, z) = (kx, y, z)$$

2. El conjunto de todas las ternas de números reales (x, y, z) con las operaciones

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \quad \text{y} \quad k(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

3. El conjunto de todas las parejas de números reales (x, y) con las operaciones

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{y} \quad k(x, y) = (2kx, 2ky)$$

4. El conjunto de todos los números reales x con las operaciones estándar de adición y multiplicación.

5. El conjunto de todas las parejas de números reales de la forma $(x, 0)$ con las operaciones estándar sobre R^2.

6. El conjunto de todas las parejas de números reales de la forma (x, y), donde $x \geq 0$, con las operaciones estándar sobre R^2.

7. El conjunto de todas las n-adas de números reales de la forma $(x, x, \ldots, x)$ con las operaciones estándar sobre R^n.

8. El conjunto de todas las parejas de números reales (x, y) con las operaciones

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1) \quad \text{y} \quad k(x, y) = (kx, ky)$$

9. El conjunto de todas las matrices 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

con la adición y la multiplicación escalar de matrices.

10. El conjunto de todas las matrices 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

con la adición de matrices y la multiplicación escalar.

11. El conjunto de todas las funciones f con valores reales definidas en cualquier punto de la recta real y tales que $f(1) = 0$, con las operaciones definidas en el ejemplo 4.

12. El conjunto de todas las matrices 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$$

con la adición y la multiplicación escalar de matrices.

13. El conjunto cuyo único elemento es la Luna. Las operaciones son Luna + Luna = Luna y k(Luna) = Luna, donde k es un número real.

14. Demostrar que una recta que pasa por el origen en R^3 es un espacio vectorial bajo las operaciones estándar sobre R^n.

15. Demostrar que el conjunto de todos los números reales positivos con las operaciones

$$x + y = xy \quad \text{y} \quad kx = x^k$$

es un espacio vectorial.

16. Escribir los detalles que faltan en el ejemplo 4.

17. Escribir los detalles que faltan en el ejemplo 6.

18. Demostrar el inciso b) del teorema 5.1.1.

19. Demostrar el inciso d) del teorema 5.1.1.

20. Demostrar que un espacio vectorial no puede tener más de un vector cero.

21. Demostrar que un vector tiene exactamente un negativo.

22. Demostrar que los nueve primeros axiomas de espacio vectorial se cumplen si $V = R^2$ tiene la adición y la multiplicación escalar definidas en el ejemplo 5.

5.2 SUBESPACIOS

Es posible que un espacio vectorial esté contenido en un espacio vectorial más grande. Por ejemplo, en la sección precedente se demostró que los planos que pasan por el origen son espacios vectoriales contenidos en el espacio vectorial más grande R^3. En esta sección se estudiará con más detalle esta importante idea.

DEFINICIÓN DE SUBESPACIO

Definición. Un subconjunto W de un espacio vectorial V se denomina ***subespacio*** de V si W es un espacio vectorial bajo la adición y la multiplicación escalar definidas sobre V.

En términos generales, para demostrar que un conjunto W con la adición y la multiplicación escalar forma un espacio vectorial es necesario verificar los 10 axiomas de espacio vectorial. Sin embargo, si W es parte de un conjunto más grande V del que se sabe es un espacio vectorial, entonces no es necesario verificar ciertos axiomas para W porque son "heredados" de V. Por ejemplo, no es necesario comprobar que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (axioma 2) para W, porque esta relación se cumple para todos los vectores en V y, en consecuencia, para todos los vectores en W. Otros axiomas heredados por W de V son los axiomas 3, 7, 8, 9 y 10. Así, para demostrar que un conjunto W es un subespacio de un espacio vectorial V, basta comprobar los axiomas 1, 4, 5 y 6. El siguiente teorema muestra que inclusive se puede prescindir de los axiomas 4 y 5.

Teorema 5.2.1. *Si W es un conjunto formado por uno o más vectores de un espacio vectorial V, entonces W es un subespacio de V si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones.*

a) *Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en W, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en W.*
b) *Si k es cualquier escalar y $\mathbf{u}$ es cualquier vector en W, entonces $k\mathbf{u}$ está en W.*

Demostración. Si W es un subespacio de V, entonces se cumplen todos los axiomas de espacio vectorial; en particular, se cumplen los axiomas 1 y 6. Pero éstas son precisamente las condiciones *a*) y *b*).

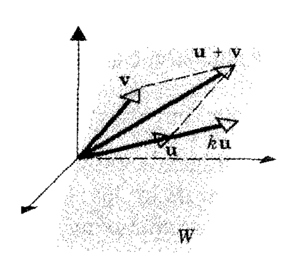
Recíprocamente, supóngase que se cumplen las condiciones *a*) y *b*). Como estas condiciones son los axiomas 1 y 6 de espacio vectorial, basta demostrar que W satisface los ocho axiomas restantes. Los vectores de W cumplen automáticamente los axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10, ya que estos axiomas se cumplen para todos los vectores en V. En consecuencia, para completar la demostración, basta verificar que los axiomas 4 y 5 se cumplen para vectores en W.

Sea $\mathbf{u}$ cualquier vector en W. Por la condición *b*), $k\mathbf{u}$ está en W para cualquier escalar k. Haciendo $k = 0$, por el teorema 5.1.1 se concluye que $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ está en W, y haciendo $k = -1$ se concluye que $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ está en W. □

OBSERVACIÓN. Se dice que un conjunto W formado por uno o más vectores de un espacio vectorial V es ***cerrado bajo la adición*** si se cumple la condición *a*) del teorema 5.2.1, y ***cerrado bajo la multiplicación escalar*** si se cumple la condición *b*). Así, el teorema 5.1.1 establece que *W es un subespacio de V si y sólo si W es cerrado bajo la adición y cerrado bajo la multiplicación escalar.*

EJEMPLOS DE SUBESPACIOS

Ejemplo 1 En el ejemplo 6 de la sección 5.1 se comprobaron los 10 axiomas de espacio vectorial para demostrar que los puntos en un plano que pasa por el origen de R^3 forman un subespacio de R^3. En vista del teorema 5.2.1 se puede ver que mucho del trabajo efectuado fue innecesario; hubiera bastado verificar que el plano es cerrado bajo la adición y bajo la multiplicación escalar (axiomas 1 y 6). En la sección 5.1 se comprobaron algebraicamente estos dos axiomas; sin embargo, también se pueden demostrar geométricamente como sigue: Sea W cualquier plano que pasa por el origen, y sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores cualesquiera en W. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ debe estar en W porque es la diagonal del paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (figura 1), y $k\mathbf{u}$ debe estar en W para cualquier escalar k porque $k\mathbf{u}$ está sobre una recta que pasa por $\mathbf{u}$. Así, W es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar, de modo que es un subespacio de R^3. Δ



Los vectores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $k\mathbf{u}$ están en el mismo plano que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Figura 1

Ejemplo 2 Demostrar que una recta que pasa por el origen de R^3 es un subespacio de R^3.

Solución. Sea W una recta que pasa por el origen de R^3. Geométricamente es evidente que la suma de dos vectores sobre esta recta también está sobre la recta, y que un múltiplo escalar de un vector sobre la recta también está sobre la recta (figura 2). Así, W es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar, de modo que es un subespacio de R^3. En los ejercicios se pide al lector demostrar algebraicamente este resultado usando las ecuaciones paramétricas de la recta.

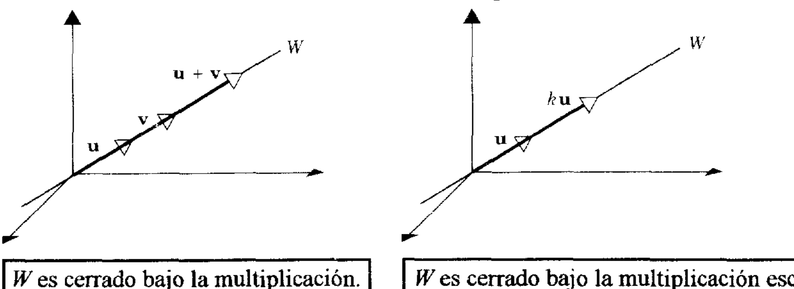
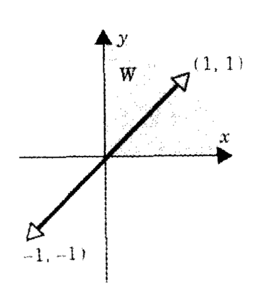


Figura 2 W es cerrado bajo la multiplicación. | W es cerrado bajo la multiplicación escalar.



W es cerrado bajo la multiplicación escalar.

Figura 3

Ejemplo 3 Sea W el conjunto de los puntos (x, y) en R^2 tales que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Estos son los puntos del primer cuadrante. El conjunto W *no* es un subespacio de R^2, ya que no es cerrado bajo la multiplicación escalar. Por ejemplo, $\mathbf{v} = (1, 1)$ está en W, pero su negativo $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} = (-1, -1)$ no está en W (figura 3). Δ

Todo espacio vectorial V diferente de cero tiene por lo menos dos subespacios: V es un subespacio, y el conjunto $\{\mathbf{0}\}$ que consta sólo del vector cero en V es un subespacio denominado ***subespacio cero***. Combinando esto con los ejemplos 1 y 2 se obtiene la siguiente lista de subespacios de R^2 y R^3.

Subespacios de R^2	**Subespacios de R^3**
• $\{\mathbf{0}\}$	• $\{\mathbf{0}\}$
• Rectas que pasan por el origen	• Rectas que pasan por el origen
• R^2	• Planos que pasan por el origen
	• R^3

Después se demostrará que estos son los únicos subespacios de R^2 y R^3.

Ejemplo 4 Por el teorema 1.7.2, la suma de dos matrices simétricas es una matriz simétrica, y un múltiplo escalar de una matriz simétrica es simétrico. Así, el conjunto de matrices simétricas $n \times n$ es un subespacio del espacio vectorial M_{nn} de las matrices $n \times n$. De manera semejante, el conjunto de las matrices triangulares superiores $n \times n$, el conjunto de las matrices triangulares inferiores $n \times n$ y el conjunto de las matrices diagonales $n \times n$ son subespacios de M_{nn}, ya que cada uno de estos conjuntos es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. Δ

Ejemplo 5 Sea n un entero positivo y sea W que consta de todas las funciones que pueden expresarse en la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{1}$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son números reales. Así, W consta de la función cero junto con todos los polinomios reales de grado menor o igual que n. El conjunto W es un subespacio del espacio vectorial de todas las funciones con valores reales que se analizó en el ejemplo 4 de la sección precedente. Para ver esto, sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ los polinomios

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

y

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

Entonces

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

y

$$(k\mathbf{p})(x) = kp(x) = (ka_0) + (ka_1)x + \cdots + (ka_n)x^n$$

Estas funciones son de la forma indicada en (1), de modo que $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ y $k\mathbf{p}$ están en W. El espacio vectorial W de este ejemplo se denotará por el símbolo P_n. Δ

Ejemplo 6 (*Para quienes ya estudiaron Cálculo*). Recuérdese que si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones continuas en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y k es una constante, entonces $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y $k\mathbf{f}$ también son continuas. Así, las funciones continuas sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ forman un subespacio de $F(-\infty, \infty)$, ya que son cerradas bajo la adición y la multiplicación escalar. Este subespacio se denota por $C(-\infty, \infty)$. De manera semejante, si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones derivables, entonces también $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y $k\mathbf{f}$ son derivables. Así, las funciones con primeras derivadas continuas sobre $(-\infty, \infty)$ forman un subespacio de $F(-\infty, \infty)$. Este subespacio se denota por $C^1(-\infty, \infty)$, donde el supraíndice 1 se usa para recalcar la *primera* derivada. Sin embargo, un teorema del Cálculo es que toda función derivable es continua, de modo que $C^1(-\infty, \infty)$ es en realidad un subespacio de $C(-\infty, \infty)$.

Continuando con lo anterior, para todo entero positivo m las funciones con m-ésimas derivadas continuas sobre $(-\infty, \infty)$ forman un subespacio de $C^1(-\infty, \infty)$, así como también las funciones que tienen derivadas continuas de todos los órdenes. El subespacio de las funciones con m-ésimas derivadas continuas sobre $(-\infty, \infty)$ se denota por $C^m(-\infty, \infty)$, y el subespacio de las funciones que tienen derivadas continuas de todos los órdenes se denota por $C^\infty(-\infty, \infty)$. Finalmente, un teorema del Cálculo es que los polinomios tienen derivadas continuas de todos los órdenes, de modo que P_n es un subespacio de $C^\infty(-\infty, \infty)$. La jerarquía de los subespacios analizados en este ejemplo se representa en la figura 4. Δ

OBSERVACIÓN. En el ejemplo precedente, se atendió al intervalo $(-\infty, \infty)$. En caso de haber atendido al intervalo cerrado $[a, b]$, entonces los subespacios correspondientes a los espacios vectoriales definidos en el ejemplo se hubieran denotado por $C[a, b]$, $C^m [a, b]$ y $C[a, b]$. De manera semejante, sobre un intervalo abierto (a, b), esos subespacios se hubieran denotado por $C(a, b)$, $C^m(a, b)$ y $C^\infty (a, b)$.

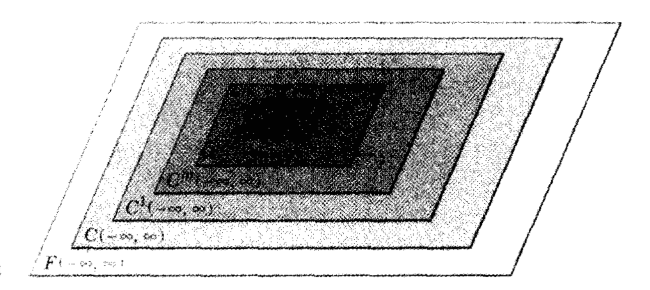


Figura 4

ESPACIOS SOLUCIÓN DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales, entonces todo vector $\mathbf{x}$ que satisface esta ecuación se denomina ***vector solución*** del sistema. El siguiente teorema muestra que los vectores solución de un sistema lineal *homogéneo* forman un espacio vectorial, que se denomina ***espacio solución*** del sistema.

Teorema 5.2.2. *Si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas, entonces el conjunto de vectores solución es un subespacio de R^n.*

Demostración. Sea W el conjunto de vectores solución. En W existe por lo menos un vector, a saber, $\mathbf{0}$. Para probar que W es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar, es necesario demostrar que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ son vectores solución cualesquiera y k es cualquier escalar, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ y $k\mathbf{x}$ también son vectores solución. Pero si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ son vectores solución, entonces

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad A\mathbf{x}' = \mathbf{0}$$

a partir de lo cual se deduce que

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

y

$$A(k\mathbf{x}) = kA\mathbf{x} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

lo que demuestra que $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ y $k\mathbf{x}$ son vectores solución. □

Ejemplo 7 Considerar los sistemas lineales

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cada uno de estos sistemas contiene tres incógnitas, de modo que las soluciones son subespacios de R^3. Geométricamente, esto significa que cada espacio solución debe ser una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, sólo el origen o todo R^3. A continuación se comprobará que así es (se deja para el lector la resolución de los sistemas).

Solución.

a) Las soluciones son

$$x = 2s - 3t, \quad y = s, \quad z = t$$

a partir de lo cual se concluye que

$$x = 2y - 3z \quad \text{o} \quad x - 2y + 3z = 0$$

Esta es la ecuación del plano que pasa por el origen con $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ como vector normal.

b) Las soluciones son

$$x = -5t, \quad y = -t, \quad z = t$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen y es paralela al vector $\mathbf{v} = (-5, -1, 1)$.

c) La solución es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, de modo que el espacio solución es sólo el origen, es decir, $\{\mathbf{0}\}$.

d) Las soluciones son

$$x = r, \quad y = s, \quad z = t$$

donde r, s y t tienen valores cualesquiera, de modo que el espacio solución es todo R^3. Δ

COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES

En la sección 1.3 se introdujo el concepto de combinación lineal de vectores columna. La siguiente definición amplía este concepto a vectores más generales.

> **Definición.** Un vector $\mathbf{w}$ se denomina ***combinación lineal*** de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ si se puede expresar en la forma
>
> $$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$
>
> donde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son escalares.

OBSERVACIÓN. Si $r = 1$, entonces la ecuación de la definición precedente se reduce a $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1$; es decir, $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de un solo vector $\mathbf{v}_1$ si es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}_1$.

Ejemplo 8 Todo vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en R^3 se puede expresar como una combinación lineal de los vectores estándar básicos

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

ya que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \quad \Delta$$

Ejemplo 9 Considerar los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ y $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$ en R^3. Demostrar que $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y que $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ *no* es una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Solución. Para que $\mathbf{w}$ sea una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, deben existir escalares k_1 y k_2 tales que $\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$; es decir,

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

o bien,

$$(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Igualando las componentes correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 9 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 2 \\ -k_1 + 2k_2 &= 7 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, de modo que

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

De manera semejante, para que $\mathbf{w}'$ sea una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, deben existir escalares k_1 y k_2 tales que $\mathbf{w}' = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$; es decir,

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

o

$$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Igualando las componentes correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 4 \\ 2k_1 + 4k_2 &= -1 \\ -k_1 + 2k_2 &= 8 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones es inconsistente (comprobar), de modo que no existen los escalares k_1 y k_2. En consecuencia, $\mathbf{w}'$ no es una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Δ

ESPACIO GENERADO (LIN)

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces en general algunos vectores en V pueden ser combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ y otros no. El siguiente teorema muestra que si se construye un conjunto W que consta de todos los vectores que es posible expresar como combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, entonces W forma un subespacio de V.

Teorema 5.2.3. *Si* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ *son vectores en un espacio vectorial* V, *entonces*:

a) *El conjunto* W *de todas las combinaciones lineales de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ *es un subespacio de* V.

b) W *es el menor subespacio de* V *que contiene a* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, *en el sentido de que cualquier otro subespacio de* V *que contenga a* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ *debe contener a* W.

Demostración de a). Para demostrar que W es un subespacio de V, es necesario probar que es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. En W existe por

lo menos un vector, a saber, $\mathbf{0}$, ya que $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \ldots, + 0\mathbf{v}_r$. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en W, entonces

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r$$

y

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_r, k_1, k_2, \ldots, k_r$ son escalares. Por consiguiente,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_r + k_r)\mathbf{v}_r$$

y, para cualquier escalar k,

$$k\mathbf{u} = (kc_1)\mathbf{v}_1 + (kc_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (kc_r)\mathbf{v}_r$$

Así, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $k\mathbf{u}$ son combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, y, en consecuencia, están en W. Por tanto, W es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar.

Demostración de b). Cada vector $\mathbf{v}_i$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, ya que es posible escribir

$$\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 1\mathbf{v}_i + \cdots + 0\mathbf{v}_r$$

Por consiguiente, en el subespacio W están todos y cada uno de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$. Sea W' cualquier otro subespacio que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$. Como W' *es* cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar, debe contener todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$. Así, W' contiene a cada vector de W. ☐

Se hace la siguiente definición.

Definición. Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces el subespacio W de V que consta de todas las combinaciones lineales de los vectores en S se denomina ***espacio generado*** por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, y se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ ***generan*** a W. Para indicar que W es el espacio generado por los vectores del conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ se escribe

$$W = \text{lin}\,(S) \text{ o bien, } W = \text{lin}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$$

Ejemplo 10 Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores no colineales en R^3 con puntos iniciales en el origen, entonces lin $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, que consta de las combinaciones lineales $k\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2$, es el plano determinado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (figura 5*a*). De manera semejante, si $\mathbf{v}$ es un vector diferente de cero en R^2 o R^3, entonces lin $\{\mathbf{v}\}$, que es el conjunto de todos los múltiplos escalares $k\mathbf{v}$, es la recta determinada por $\mathbf{v}$ (figura 5*b*). Δ

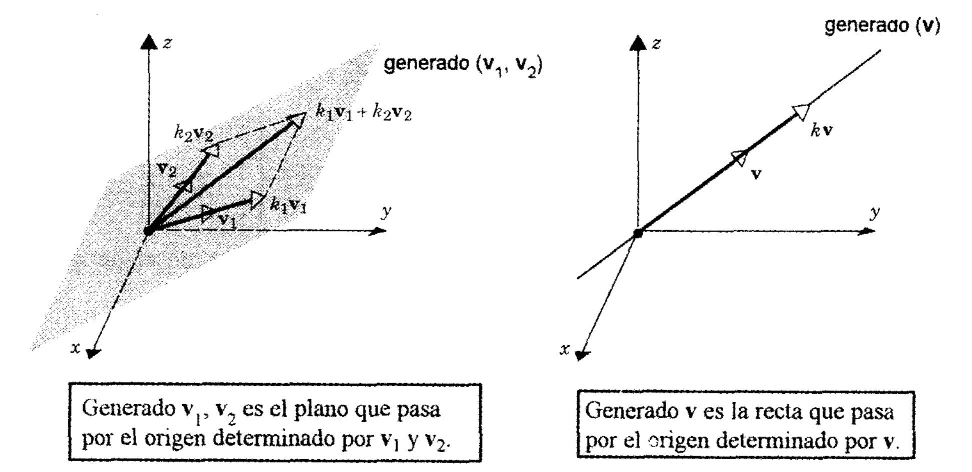


Figura 5 Generado $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ es el plano que pasa por el origen determinado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Generado $\mathbf{v}$ es la recta que pasa por el origen determinado por $\mathbf{v}$.

Ejemplo 11 Los polinomios 1, x, x^2, . . . , x^n generan el espacio P_n definido en el ejemplo 5, ya que todo polinomio $\mathbf{p}$ en P_n se puede escribir como

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

que es una combinación lineal de 1, x, x^2, . . . , x^n. Lo anterior se puede denotar por

$$P_n = \text{Generado } \{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \quad \Delta$$

Ejemplo 12 Determinar si $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ y $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$ generan el espacio vectorial R^3.

Solución. Es necesario determinar si un vector arbitrario $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en R^3 se puede expresar como una combinación lineal

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Expresando esta ecuación en términos de las componentes se obtiene

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

o

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3,\ k_1 + k_3,\ 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

o

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2k_3 &= b_1 \\ k_1 \qquad + \ k_3 &= b_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

El problema se reduce entonces a determinar si este sistema es consistente para todos los valores de b_1, b_2 y b_3. Por los incisos *a*) y *e*) del teorema 4.3.4, este sistema es consistente para todo b_1, b_2 y b_3 si y sólo si la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

es invertible. Pero $\det(A) = 0$ (comprobar), de modo que A no es invertible; en consecuencia, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ no generan R^3. Δ

Los conjuntos generadores no son únicos. Por ejemplo, dos vectores colineales cualesquiera que estén en el plano que se muestra en la figura 5 generan el mismo plano, y cualquier vector diferente de cero que esté sobre la recta de esa figura genera la misma recta. La demostración del siguiente teorema útil se deja como ejercicio.

Teorema 5.2.4. *Si* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *y* $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ *son dos conjuntos de vectores en un espacio vectorial V, entonces*

$$\textit{Generado}\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\} = \textit{Generado}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$$

si y sólo si todo vector en S es una combinación lineal de los vectores en S' y, recíprocamente, todo vector en S' es una combinación lineal de los vectores en S.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.2

1. Usar el teorema 5.2.1 para determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de R^3.

a) Todos los vectores de la forma $(a, 0, 0)$.
b) Todos los vectores de la forma $(a, 1, 1)$.
c) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $b = a + c$.
d) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $b = a + c + 1$.

2. Usar el teorema 5.2.1 para determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de M_{22}.

a) Todas las matrices 2×2 con elementos enteros.
b) Todas las matrices

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde $a + b + c + d = 0$.

c) Todas las matrices A 2×2 tales que $\det(A) = 0$.

3. Usar el teorema 5.2.1 para determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de P_3.

a) Todos los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que $a_0 = 0$.
b) Los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.
c) Los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que a_0, a_1, a_2 y a_3 son enteros.
d) Los polinomios de la forma $a_0 + a_1x$, donde a_0 y a_1 son números reales.

4. Usar el teorema 5.2.1 para determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio $F(-\infty, \infty)$.
a) Todas las f tales que $f(x)$ 0 para toda x.
b) Todas las f tales que $f(0) = 0$.
c) Todas las f tales que $f(0) = 2$.
d) Todas las funciones constantes.
e) Todas las f de la forma $k_1 + k_2$ sen x, donde k_1 y k_2 son números reales.

5. Usar el teorema 5.2.1 para determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de M_{nn}.
a) Las matrices A $n \times n$ tales que $\mathrm{tr}(A) = 0$.
b) Las matrices A $n \times n$ tales que $A^T = -A$.
c) Las matrices A $n \times n$ tales que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.

6. Determinar si el espacio solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen o sólo es el origen. Si es un plano, encontrar su ecuación; si es una recta, encontrar sus ecuaciones paramétricas.

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

7. ¿Cuáles de los siguientes vectores son combinaciones lineales de $\mathbf{u} = (0, -2, 2)$ y $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$?
a) $(2, 2, 2)$. b) $(3, 1, 5)$. c) $(0, 4, 5)$. d) $(0, 0, 0)$.

8. Expresar cada uno de los siguientes vectores como combinaciones lineales de $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ y $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.
a) $(-9, -7, -15)$. b) $(6, 11, 6)$. c) $(0, 0, 0)$. d) $(7, 8, 9)$.

9. Expresar cada uno de los siguientes polinomios como una combinación lineal de $\mathbf{p}_1 = 2 + x + 4x^2$, $\mathbf{p}_2 = 1 - x + 3x^2$ y $\mathbf{p}_3 = 3 + 2x + 5x^2$.
a) $-9 - 7x - 15x^2$. b) $6 + 11x + 6x^2$. c) 0. d) $7 + 8x + 9x^2$.

10. ¿Cuáles de las siguientes matrices son combinaciones lineales de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

a) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

11. En cada inciso, determinar si los vectores dados generan R^3.

a) $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$

b) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$
c) $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 5)$, $\mathbf{v}_3 = (5, -2, 9)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 4, -1)$
d) $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 6)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 4, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 3, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (3, 3, 1)$

12. Sean $\mathbf{f} = \cos^2 x$ y $\mathbf{g} = \operatorname{sen}^2 x$. ¿Cuáles de las siguientes funciones están en el espacio generado por **f** y **g**?
a) $\cos 2x$. b) $3 + x^2$. c) 1. d) $\operatorname{sen} x$. e) 0.

13. Determinar si los siguientes polinomios generan P_2.

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x + 2x^2, \qquad \mathbf{p}_2 = 3 + x,$$
$$\mathbf{p}_3 = 5 - x + 4x^2, \qquad \mathbf{p}_4 = -2 - 2x + 2x^2$$

14. Sean $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$ y $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$. ¿Cuáles de los siguientes vectores están en lin $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$?
a) $(2, 3, -7, 3)$. b) $(0, 0, 0, 0)$. c) $(1, 1, 1, 1)$. d) $-4, 6, -13, 4)$.

15. Encontrar la ecuación del plano generado por los vectores $\mathbf{u} = (-1, 1, 1)$ y $\mathbf{v} = (3, 4, 4)$.

16. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta generada por el vector $\mathbf{u} = (3, -2, 5)$.

17. Demostrar que los vectores solución de un sistema no homogéneo consistente de m ecuaciones lineales con n incógnitas no forma un subespacio de R^n.

18. Demostrar el teorema 5.2.4.

19. Aplicar el teorema 5.2.4 para demostrar que

$$\mathbf{v}_1 = (1, 6, 4), \qquad \mathbf{v}_2 = (2, 4, -1), \qquad \mathbf{v}_3 = (-1, 2, 5)$$

y

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, -5), \qquad \mathbf{w}_2 = (0, 8, 9)$$

generan el mismo subespacio de R^3.

20. Una recta L que pasa por el origen en R^3 se puede representar por ecuaciones paramétricas de la forma $x = at$, $y = bt$ y $z = ct$. Usar estas ecuaciones para demostrar que L es un subespacio de R^3; es decir, si $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son puntos en L y k es cualquier número real, entonces $k\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ también son puntos en L.

21. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Demostrar que los siguientes conjuntos de funciones son subespacios de $F(-\infty, \infty)$.
a) Las funciones que son continuas en todas partes.
b) Las funciones que son derivables en todas partes.
c) Las funciones que son derivables en todas partes y que satisfacen $\mathbf{f}' + 2\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

22. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Demostrar que el conjunto de funciones continuas $\mathrm{f} = f(x)$ sobre $[a, b]$ tales que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

es un subespacio de $C\,[a, b]$.

5.3 INDEPENDENCIA LINEAL

En la sección precedente se aprendió que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ genera un espacio vectorial V dado si todo vector en V se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S. En general, puede haber más de una forma de expresar un vector en V como una combinación lineal de vectores en un conjunto generador. En esta sección se estudiarán condiciones en las que cada vector en V se puede expresar de manera única como una combinación lineal de los vectores generadores. Los conjuntos generadores con esta propiedad son fundamentales en el estudio de los espacios vectoriales.

DEFINICIÓN DE INDEPENDENCIA LINEAL

Definición. Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto no vacío de vectores, entonces la ecuación vectorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tiene por lo menos una solución, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad \ldots, \quad k_r = 0$$

Si esta es la única solución, entonces S se denomina conjunto ***linealmente independiente***. Si existen otras soluciones, entonces S se denomina conjunto ***linealmente dependiente***.

Ejemplo 1 Si $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1)$ y $\mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$, entonces el conjunto de vectores $S = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ es linealmente dependiente, ya que $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Δ

Ejemplo 2 Los polinomios

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

forman un conjunto linealmente dependiente en P_2, ya que $3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$. Δ

Ejemplo 3 Considerar los vectores $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ en R^3. En términos de las componentes, la ecuación vectorial

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

se convierte en

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

o equivalentemente,

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Lo anterior indica que $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 0$, de modo que el conjunto $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es linealmente independiente. Se puede usar un razonamiento semejante para demostrar que los vectores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

forman un conjunto linealmente independiente en R^n. Δ

Ejemplo 4 Determinar si los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \qquad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \qquad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

forman un conjunto linealmente dependiente o un conjunto linealmente independiente.

Solución. En términos de las componentes, la ecuación vectorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

se convierte en

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

o equivalentemente,

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Igualando las componentes correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Así, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ forman un conjunto linealmente dependiente si este sistema tiene una solución no trivial, o forman un conjunto linealmente independiente sólo si el sistema tiene la solución trivial. Resolviendo el sistema se obtiene

$$k_1 = -\tfrac{1}{2}t, \qquad k_2 = -\tfrac{1}{2}t, \qquad k_3 = t$$

Por tanto, el sistema tiene soluciones no triviales y $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ forman un conjunto linealmente dependiente. De otra manera, la existencia de soluciones no triviales se podría demostrar sin necesidad de resolver el sistema probando que la matriz de coeficientes tiene un determinante igual a cero y, en consecuencia, que no es invertible (comprobar). Δ

Ejemplo 5 Demostrar que los polinomios

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

forman un conjunto linealmente independiente de vectores en P_n.

Solución. Sean

$$\mathbf{p}_0 = 1, \quad \mathbf{p}_1 = x, \quad \mathbf{p}_2 = x^2, \quad \ldots, \quad \mathbf{p}_n = x^n$$

y supóngase que alguna combinación lineal de estos polinomios es igual a cero, por ejemplo

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0}$$

o equivalentemente,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \qquad \text{para toda } x \text{ en} \quad (-\infty, \infty) \quad (1)$$

Es necesario demostrar que

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Para ver que así es, recordar que en álgebra un polinomio *diferente de cero* de grado n tiene cuando mucho n raíces distintas. Pero esto significa que $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$; en caso contrario, por (1) se concluiría que $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ es un polinomio diferente de cero con una infinidad de raíces. Δ

La expresión "linealmente dependiente" sugiere que los vectores "dependen" entre sí de alguna manera. El siguiente teorema muestra que, de hecho, así es.

Teorema 5.3.1. *Un conjunto S con dos o más vectores es:*
a) *Linealmente dependiente si y sólo si por lo menos uno de los vectores en S puede expresarse como una combinación lineal de los demás vectores en S.*
b) *Linealmente independiente si y sólo si ningún vector en S se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores en S.*

Se demostrará el inciso *a*) y la demostración del inciso *b*) se deja como ejercicio.

Demostración de a). Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ un conjunto con dos o más vectores. Si se supone que S es linealmente dependiente, entonces existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$, no todos iguales a cero, tales que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Para ser específicos, supóngase que $k_1 \neq 0$. Entonces (1) se puede volver a escribir como

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right)\mathbf{v}_r$$

que expresa a $\mathbf{v}_1$ como una combinación lineal de los demás vectores en S. De manera semejante, si $k_j \neq 0$ en (2) para alguna $j = 2, 3, \ldots, r$, entonces $\mathbf{v}_j$ se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores en S.

Recíprocamente, se supone que por lo menos uno de los vectores en S se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores. En concreto, supóngase que

$$\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r$$

de modo que

$$\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 - c_3\mathbf{v}_3 - \cdots - c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Se concluye que S es linealmente dependiente, ya que la ecuación

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

se satisface por

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -c_2, \quad \ldots, \quad k_r = -c_r$$

que no todos son cero. La demostración para el caso en que algún vector diferente de $\mathbf{v}_1$ se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores en S es semejante. □

Ejemplo 6 En el ejemplo 1 se vio que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3), \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1), \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$$

forman un conjunto linealmente dependiente. Por el teorema 5.3.1. se concluye que por lo menos uno de estos vectores se puede expresar como una combinación lineal de los otros dos. En este ejemplo, cada vector puede expresarse como una combinación lineal de los otros dos, ya que por la ecuación $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ se concluye (ver el ejemplo 1) que

$$\mathbf{v}_1 = -\tfrac{1}{3}\mathbf{v}_2 + \tfrac{1}{3}\mathbf{v}_3, \qquad \mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \Delta$$

Ejemplo 7 En el ejemplo 3 se vio que los vectores $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ forman un conjunto linealmente independiente. Así, por el teorema 5.3.1 se concluye que ninguno de estos vectores se puede expresar como una combinación lineal de los otros dos. Para ver directamente que esto es así, supóngase que es posible expresar a $\mathbf{k}$ como

$$\mathbf{k} = k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j}$$

Entonces, en términos de las componentes,

$$(0, 0, 1) = k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0)$$

o

$$(0, 0, 1) = (k_1, k_2, 0)$$

Pero esta ecuación no se cumple para ninguno de los valores de k_1 y k_2, de modo que $\mathbf{k}$ no se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. De manera se-

mejante, no se puede expresar a **i** como una combinación lineal de **j** y **k**, y no es posible expresar a **j** como una combinación lineal de **i** y **k**. Δ

El siguiente teorema establece dos hechos sencillos sobre independencia lineal que es importante conocer.

Teorema 5.3.2.
a) Un conjunto finito de vectores que contiene al vector cero es linealmente dependiente.
b) Un conjunto con exactamente dos vectores es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es un múltiplo escalar del otro.

Se demostrará el inciso *a*) y la demostración del inciso *b*) se deja como ejercicio.

Demostración de a). Para vectores cualesquiera $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{0}\}$ es linealmente dependiente, ya que la ecuación

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_r + 1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

expresa a $\mathbf{0}$ como una combinación lineal de los vectores en S con coeficientes no todos iguales a cero. ▯

Ejemplo 8 Las funciones $\mathbf{f}_1 = x$ y $\mathbf{f}_2 = \text{sen } x$ forman un conjunto linealmente independiente de vectores en $F(-\infty, \infty)$, ya que ninguna de estas funciones es un múltiplo constante de la otra.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INDEPENDENCIA LINEAL

La independencia lineal posee algunas interpretaciones geométricas útiles en R^2 y R^3.

- En R^2 o R^3, un conjunto de dos vectores es linealmente independiente si y sólo si los vectores no están en la misma recta cuando se colocan con sus puntos iniciales en el origen (figura 1).

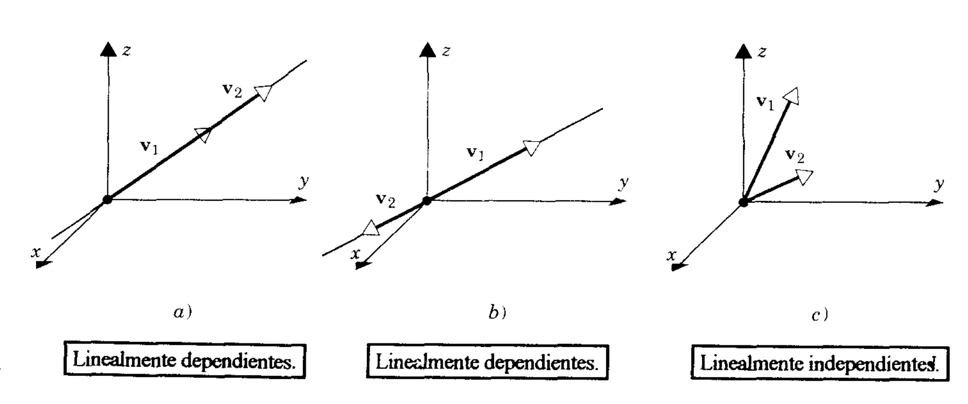


Figura 1

- En R^3, un conjunto de tres vectores es linealmente independiente si y sólo si los vectores no están en el mismo plano cuando se colocan con sus puntos iniciales en el origen (figura 2).

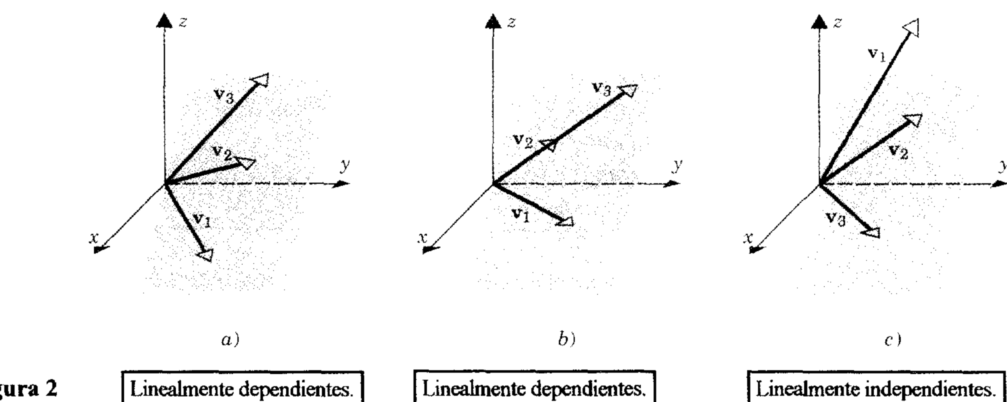


Figura 2

El primer resultado es una conclusión del hecho de que dos vectores son linealmente independientes si y sólo si ninguno de ellos es un múltiplo escalar del otro. Geométricamente, esto equivale a afirmar que los vectores no están en la misma recta cuando se colocan con sus puntos iniciales en el origen.

El segundo resultado es una conclusión del hecho de que tres vectores son linealmente independientes si y sólo si ninguno de ellos es una combinación lineal de los otros dos. Geométricamente, esto equivale a decir que ninguno de los vectores está en el mismo plano que los otros dos o, de otro modo, que los tres vectores no están en un plano común cuando se colocan con sus puntos iniciales en el origen (¿por qué?).

El siguiente teorema muestra que un conjunto linealmente independiente en R^n puede contener cuando mucho n vectores.

Teorema 5.3.3. *Sea* S {= $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$} *un conjunto de vectores en* R^n. *Si* $r > n$, *entonces* S *es linealmente independiente.*

Demostración. Se supone que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}) \\
\mathbf{v}_2 &= (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}) \\
&\ \vdots \\
\mathbf{v}_r &= (v_{r1}, v_{r2}, \ldots, v_{rn})
\end{aligned}$$

Considérese la ecuación

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Si, como se ilustra en el ejemplo 4, ambos miembros de esta ecuación se expresan en términos de las componentes y después se igualan las componentes correspondientes, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \cdots + v_{r1}k_r &= 0 \\ v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \cdots + v_{r2}k_r &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \vdots \quad \vdots \\ v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \cdots + v_{rn}k_r &= 0 \end{aligned}$$

Este es un sistema homogéneo de n ecuaciones en las r incógnitas $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Como $r > n$, por el teorema 1.2.1 se concluye que el sistema tiene soluciones no triviales. Por consiguiente, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto linealmente dependiente. □

OBSERVACIÓN. El teorema precedente establece que un conjunto en R^2 con más de dos vectores es linealmente dependiente, y que un conjunto en R^3 con más de tres vectores es linealmente dependiente.

PARA QUIENES YA ESTUDIARON CÁLCULO

INDEPENDENCIA LINEAL DE FUNCIONES

Algunas veces la dependencia lineal de funciones se puede deducir a partir de identidades conocidas. Por ejemplo, las funciones

$$\mathbf{f}_1 = \operatorname{sen}^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x \quad \text{y} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

forman un conjunto linealmente dependiente en $F(-\infty, \infty)$, ya que la ecuación

$$5\mathbf{f}_1 + 5\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 = 5 \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos^2 x - 5 = 5(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) - 5 = \mathbf{0}$$

$\mathbf{0}$ está expresado como una combinación lineal de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ y $\mathbf{f}_3$ con los coeficientes no todos iguales a cero. Sin embargo, tales identidades se pueden aplicar sólo en situaciones especiales. Aunque no existe ningún método general para establecer independencia lineal o dependencia lineal de funciones en $F(-\infty, \infty)$, a continuación se desarrollará un teorema que algunas veces se puede aplicar para demostrar que un conjunto de funciones dado es linealmente independiente.

Si $\mathbf{f}_1 = f_1(x)$, $\mathbf{f}_2 = f_2(x), \ldots, \mathbf{f}_n = f_n(x)$ son funciones derivables $n - 1$ veces sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces el determinante

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

se llama el ***wronskiano**** de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Como se demostrará en seguida, este determinante es útil para averiguar si las funciones $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ forman un conjunto linealmente independiente de vectores en el espacio vectorial $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

Supóngase, por el momento, que $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ son vectores linealmente dependientes en $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$. Entonces existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$, *no todos iguales a cero*, tales que

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Al combinar esta ecuación con las ecuaciones obtenidas al derivar sucesivamente $n - 1$ veces, se obtiene

$$\begin{array}{lllll} k_1 f_1(x) & + k_2 f_2(x) & + \cdots + k_n f_n(x) & = 0 \\ k_1 f_1'(x) & + k_2 f_2'(x) & + \cdots + k_n f_n'(x) & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1 f_1^{(n-1)}(x) & + k_2 f_2^{(n-1)}(x) & + \cdots + k_n f_n^{(n-1)}(x) & = 0 \end{array}$$

Así, la dependencia lineal de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ indica que el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tiene una solución no trivial para *toda* x en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Esto a su vez significa que para toda x en $(-\infty, \infty)$ la matriz de coeficientes no es invertible o, de manera equivalente, que su determinante (el wronskiano) es cero para toda x en $(-\infty, \infty)$. Por tanto, si el wronskiano *no* es idénticamente cero sobre $(-\infty, \infty)$, entonces las funciones $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ deben ser vectores linealmente independientes en $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$. Éste es el contenido del siguiente teorema:

Teorema 5.3.4. *Si las funciones* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ *tienen* $n - 1$ *derivadas continuas sobre el intervalo* $(-\infty, \infty)$ *y si el wronskiano de estas funciones no es idénticamente cero sobre* $(-\infty, \infty)$, *entonces las funciones forman un conjunto linealmente independiente de vectores en* $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

****Józef Maria Hoëne-Wrónski* (1776-1853).** Matemático y filósofo polaco-francés. Wrónski recibió su primera educación en Poznán y Varsovia. Sirvió como oficial de artilleros en el ejército prusiano en una sublevación nacional en 1794, fue hecho prisionero por el ejército ruso y una vez liberado estudió filosofía en varias universidades alemanas. Se nacionalizó francés en 1800 y terminó por establecerse en París, donde efectuó investigaciones en análisis que lo llevaron a publicar algunos artículos matemáticos polémicos y lo relacionaron con un famoso juicio sobre cuestiones financieras. Varios años después, su propuesta de investigación sobre la determinación de la longitud en el mar fue rechazada por la British Board of Longitude y Wrónski volvió a sus estudios sobre filosofía mesiánica. En la década de 1830 investigó infructuosamente la factibilidad de que los tractores de oruga compitiesen con el ferrocarril y pasó sus últimos años en la pobreza. Bastante de su trabajo matemático estaba atestado de errores e imprecisiones, pero a menudo contenía resultados e ideas aislados valiosos. Algunos autores atribuyen este patrón de razonamiento de toda la vida a tendencias psicóticas y a una exageración de la importancia de su propio trabajo.

Ejemplo 9 Demostrar que $\mathbf{f}_1 = x$ y $\mathbf{f}_2 = \operatorname{sen} x$ forman un conjunto linealmente independiente de vectores en $C^1(-\infty, \infty)$.

Solución. En el ejemplo 8 se demostró que estos vectores forman un conjunto linealmente independiente al observar que ninguno de ellos es un múltiplo escalar del otro. Sin embargo, para fines ilustrativos, este mismo resultado se obtendrá usando el teorema 5.3.4. El wronskiano es

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sen} x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \operatorname{sen} x$$

Esta función es diferente de cero para toda x en el intervalo $(-\infty, \infty)$ (comprobar), de modo que $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ forman un conjunto linealmente independiente. Δ

Ejemplo 10 Demostrar que $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = e^x$ y $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$ forman un conjunto linealmente independiente de vectores en $C^2(-\infty, \infty)$.

Solución. El wronskiano es

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

Esta función es diferente de cero para toda x en el intervalo $(-\infty, \infty)$ (comprobar), de modo que $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ y $\mathbf{f}_3$ forman un conjunto linealmente independiente. Δ

OBSERVACIÓN. El recíproco del teorema 5.3.4 es falso. Si el wronskiano de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ es idénticamente cero sobre $(-\infty, \infty)$, entonces no es posible llegar a ninguna conclusión respecto a la independencia lineal de $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$; este conjunto de vectores puede ser linealmente independiente o linealmente dependiente. Se omiten los detalles de la demostración.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.3

1. Explicar por qué los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes. (Resolver este problema por inspección.)
   a) $\mathbf{u}_1 = (-1, 2, 4)$ y $\mathbf{u}_2 = (5, -10, -20)$ en R^3 b) $\mathbf{u}_1 = (3, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (4, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (-4, 7)$ en R^2
   c) $\mathbf{p}_1 = 3 - 2x + x^2$ y $\mathbf{p}_2 = 6 - 4x + 2x^2$ en P_2 d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ en M_{22}
2. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en R^3 son linealmente dependientes?
   a) $(4, -1, 2)$, $(-4, 10, 2)$ b) $(-3, 0, 4)$, $(5, -1, 2)$, $(1, 1, 3)$
   c) $(8, -1, 3)$, $(4, 0, 1)$ d) $(-2, 0, 1)$, $(3, 2, 5)$, $(6, -1, 1)$, $(7, 0, -2)$
3. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en R^4 son linealmente dependientes?
   a) $(3, 8, 7, -3)$, $(1, 5, 3, -1)$, $(2, -1, 2, 6)$, $(1, 4, 0, 3)$
   b) $(0, 0, 2, 2)$, $(3, 3, 0, 0)$, $(1, 1, 0, -1)$
   c) $(0, 3, -3, -6)$, $(-2, 0, 0, -6)$, $(0, -4, -2, -2)$, $(0, -8, 4, -4)$
   d) $(3, 0, -3, 6)$, $(0, 2, 3, 1)$, $(0, -2, -2, 0)$, $(-2, 1, 2, 1)$
4. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en P_2 son linealmente dependientes?

a) $2 - x + 4x^2,\ 3 + 6x + 2x^2,\ 2 + 10x - 4x^2$
b) $3 + x + x^2,\ 2 - x + 5x^2,\ 4 - 3x^2$
c) $6 - x^2,\ 1 + x + 4x^2$
d) $1 + 3x + 3x^2,\ x + 4x^2,\ 5 + 6x + 3x^2,\ 7 + 2x - x^2$

5. Supóngase que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son vectores en R^3 cuyos puntos iniciales están en el origen. En cada inciso, determinar si los tres vectores son coplanares.

a) $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, -4)$
b) $\mathbf{v}_1 = (-6, 7, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 2)$

6. Supóngase que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son vectores en R^3 cuyos puntos iniciales están en el origen. En cada inciso, determinar si los tres vectores son colineales.

a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, -6)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, 6, 0)$
b) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 7, -6)$
c) $\mathbf{v}_1 = (4, 6, 8)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, -3, -4)$

7. a) Demostrar que los vectores v1 = (0, 3, 1, −1), v2 = (6, 0, 5, 1) y v3 = (4, −7, 1, 3) forman un conjunto linealmente dependiente en R4.
b) Expresar cada vector como una combinación lineal de los otros dos.

8. ¿Para qué valores reales de λ los siguientes vectores forman un conjunto linealmente dependiente en R^3?

$$\mathbf{v}_1 = (\lambda, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), \qquad \mathbf{v}_2 = (-\tfrac{1}{2}, \lambda, -\tfrac{1}{2}), \qquad \mathbf{v}_3 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \lambda)$$

9. Demostrar que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces también $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2\}$ y $\{\mathbf{v}_3\}$ son linealmente independientes.

10. Demostrar que si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces también todo subconjunto no vacío de S es linealmente independiente.

11. Demostrar que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio vectorial V y $\mathbf{v}_4$ es cualquier vector en V, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ también es linealmente independiente.

12. Demostrar que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial V y si $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ son vectores cualesquiera en V, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ también es linealmente independiente.

13. Demostrar que todo conjunto con más de tres vectores de P_2 es linealmente dependiente.

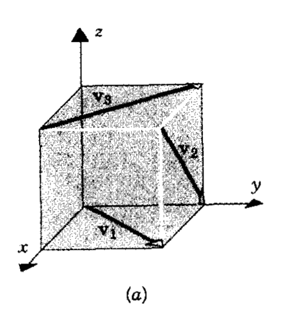
14. Demostrar que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente y $\mathbf{v}_3$ no está en lin $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

15. Demostrar: Para vectores cualesquiera **u**, **v** y **w**, los vectores $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ y $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ forman un conjunto linealmente dependiente.

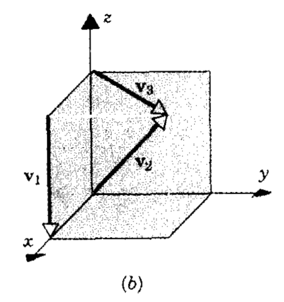
16. Demostrar: El espacio generado por dos vectores en R^3 es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen o el origen mismo.

17. ¿En qué condiciones un conjunto con un vector es linealmente independiente?

18. ¿Son linealmente independientes los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ de la figura 3*a*? ¿Y los de la figura 3*b*? Explicar las respuestas.



(*a*)



(*b*)

Figura 3

19. Usando las identidades adecuadas donde sea necesario, determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $F(-\infty, \infty)$ son linealmente dependientes.

a) $6,\ 3\operatorname{sen}^2 x,\ 2\cos^2 x$ b) $x,\ \cos x$ c) $1, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x$
d) $\cos 2x, \operatorname{sen}^2 x,\ \cos^2 x$ e) $(3-x)^2,\ x^2-6x,\ 5$ f) $0,\ \cos^3 \pi x, \operatorname{sen}^5 3\pi x$

20. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Usando el wronskiano, demostrar que los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

a) $1,\ x,\ e^x$ b) $\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ x \operatorname{sen} x$ c) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$ d) $1,\ x,\ x^2$

21. Con el inciso *a*) del teorema 5.3.1, demostrar el inciso *b*) del mismo teorema.

22. Demostrar el inciso *b*) del teorema 5.3.2.

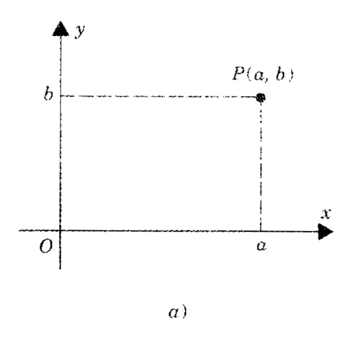
5.4 BASE Y DIMENSIÓN

Es común imaginar a una recta como unidimensional, a un plano como bidimensional y al espacio circundante como tridimensional. El objetivo principal de esta sección es hacer precisa esta noción intuitiva de dimensión.

SISTEMAS DE COORDENADAS NO RECTANGULARES

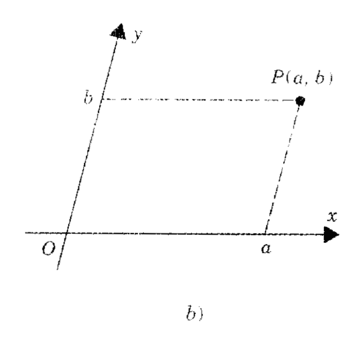
En geometría analítica plana se aprendió a asociar un par de coordenadas (a, b) con un punto P en el plano al proyectar P sobre un par de ejes de coordenadas perpendiculares (figura 1*a*). Mediante este proceso, a cada punto en el plano se asigna un conjunto de coordenadas único y recíprocamente, a cada par de coordenadas se asocia un punto único en el plano. Lo anterior se describe afirmando que el sistema de coordenadas establece una ***correspondencia biunívoca o uno a uno*** entre puntos en el plano y parejas ordenadas de números reales. Aunque los ejes de coordenadas perpendiculares son los más comunes, para definir un sistema de coordenadas en el plano se puede usar cualquier par de rectas no paralelas. Por ejemplo, en la figura 1*b*, al punto P se han asociado las coordenadas (a, b) al proyectar P en forma paralela a los ejes de coordenadas no perpendiculares. De manera semejante, para definir un sistema de coordenadas en el espacio tridimensional es posible usar cualquier terna de ejes de coordenadas no coplanares (figura 1*c*).

Figura 1



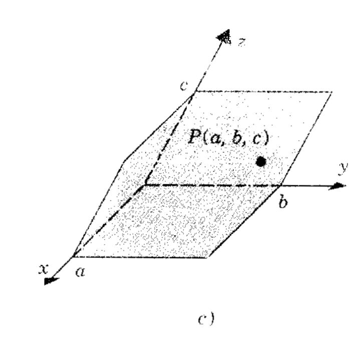
a)

Coordenadas de P en un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio bidimensional.



b)

Coordenadas de P en un sistema de coordenadas no rectangulares en el espacio bidimensional.



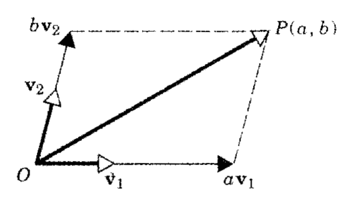
c)

Coordenadas de P en un sistema de coordenadas no rectangulares en el espacio tridimensional.

El primer objetivo en esta sección es ampliar el concepto de sistema de coordenadas a espacios vectoriales generales. Para empezar, será de utilidad volver a plantear el concepto de sistema de coordenadas en el espacio bidimensional o en el espacio tridimensional usando vectores en vez de ejes de coordenadas para especificar el sistema de coordenadas. Esto se puede hacer sustituyendo cada eje de coordenadas por un vector de longitud 1 que apunte en la dirección positiva del eje. En la figura 2a, por ejemplo, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son tales vectores. Como se ilustra en esa figura, si P es cualquier punto en el plano, el vector $\overrightarrow{OP}$ se puede escribir como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ proyectando P en forma paralela a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ a fin de que $\overrightarrow{OP}$ sea la diagonal del paralelogramo determinado por los vectores $a\mathbf{v}_1$ y $b\mathbf{v}_2$:

$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

Resulta evidente que los números a y b en esta fórmula vectorial son precisamente las coordenadas de P en el sistema de coordenadas de la figura 1b. De manera semejante, las coordenadas (a, b, c) del punto P en la figura 1c se pueden obtener al expresar $\overrightarrow{OP}$ como una combinación lineal de los vectores que se muestran en la figura 2b.



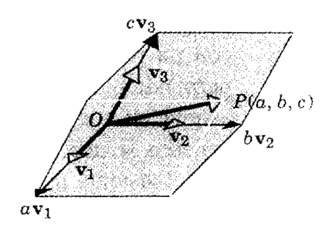


Figura 2 a) b)

En términos informales, los vectores que especifican un sistema de coordenadas se llaman "vectores básicos" de ese sistema. Aunque en el análisis precedente se utilizaron vectores básicos de longitud 1. dentro de poco se verá que ésto no es esencial: basta usar vectores diferentes de cero de cualquier longitud.

Las escalas de medición a lo largo de los ejes de coordenadas son ingredientes esenciales de cualquier sistema de coordenadas. En términos generales, se intenta usar la misma escala en cada eje y situar los puntos enteros sobre los ejes a una distancia de 1 unidad entre sí. Sin embargo, esto no siempre es práctico o apropiado: para ajustar una gráfica particular sobre una página impresa o para representar cantidades físicas con varias unidades en el mismo sistema de coordenadas (tiempo en segundos sobre un eje y temperatura en cientos de grados sobre otro eje, por ejemplo) son necesarias escalas desiguales o escalas en que la distancia entre los puntos enteros sea mayor o menor que 1 unidad. Cuando un sistema de coordenadas se especifica mediante un conjunto de vectores básicos, entonces las longitudes de estos vectores corresponden a las distancias entre puntos enteros consecutivos sobre los ejes de coordenadas (figura 3). Así, lo que define las direcciones positivas de los ejes de coordenadas son las direcciones de los vectores básicos, y lo que establece las escalas de medición son las longitudes de los vectores básicos.

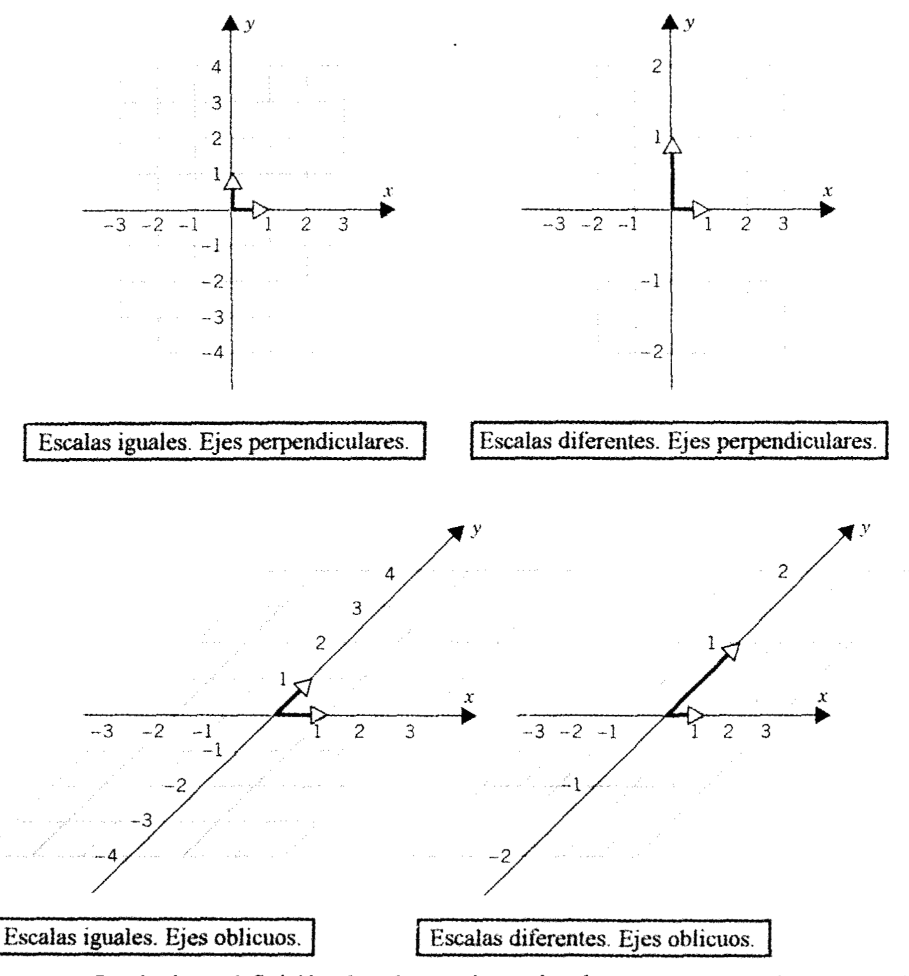


Figura 3

La siguiente definición clave hace más precisas los conceptos anteriores y permite ampliar el concepto de sistema de coordenadas a espacios vectoriales generales.

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición. Si V es cualquier espacio vectorial y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de vectores en V, entonces S se llama ***base*** de V si se cumplen las dos condiciones siguientes:

a) S es linealmente independiente.
b) S genera a V.

Una base es la generalización de espacio vectorial de un sistema de coordenadas en el espacio bidimensional y en el espacio tridimensional. El siguiente teorema ayudará a ver por qué es así.

Teorema 5.4.1. *Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces todo vector $\mathbf{v}$ en V se puede expresar en forma única como $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots, + c_n\mathbf{v}_n$.*

Demostración. Como S genera a V, por la definición de conjunto generador se concluye que todo vector $\mathbf{v}$ en V se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S. Para ver que sólo existe *una* manera de expresar un vector como una combinación lineal de los vectores en S, supóngase que algún vector $\mathbf{v}$ se puede escribir como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

y también como

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$\mathbf{0} = (c_1 - k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - k_n)\mathbf{v}_n$$

Como el miembro derecho de esta ecuación es una combinación lineal de vectores en S, la independencia lineal de S indica que

$$c_1 - k_1 = 0, \qquad c_2 - k_2 = 0, \quad \ldots, \quad c_n - k_n = 0$$

es decir,

$$c_1 = k_1, \quad c_2 = k_2, \quad \ldots, \quad c_n = k_n$$

Así, las dos expresiones para $\mathbf{v}$ son iguales. □

COORDENADAS RESPECTO A UNA BASE

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V y

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

es la expresión que describe un vector $\mathbf{v}$ en términos de la base S, entonces los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se denominan ***coordenadas*** de $\mathbf{v}$ respecto a la base S. El

vector $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ en R^n que se obtiene a partir de estas coordenadas se llama ***vector de coordenadas de* v *con respecto a S***; se denota por

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

OBSERVACIÓN. Se debe notar que los vectores de coordenadas no sólo dependen de la base S, sino también del orden en que se escriben los vectores básicos; un cambio en el orden de los vectores básicos da por resultado un cambio correspondiente en el orden de los elementos en los vectores de coordenadas.

Ejemplo 1 En el ejemplo 3 de la sección precedente se demostró que si

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

entonces $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es un conjunto linealmente independiente en R^3. Este conjunto también genera a R^3, ya que cualquier vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en R^3 se puede escribir como

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \qquad (1)$$

Así, S es una base de R^3; se denomina ***base estándar*** de R^3. Al observar los coeficientes de **i**, **j** y **k** en (1), se concluye que las coordenadas de **v** respecto a la base estándar son a, b y c, de modo que

$$(\mathbf{v})_S = (a, b, c)$$

Comparando este resultado con (1) se observa que

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v})_S$$

Esta ecuación establece que las componentes de un vector **v** con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares xyz y las coordenadas de **v** con respecto a la base estándar son las mismas; así, el sistema de coordenadas y la base producen precisamente la misma correspondencia uno a uno entre puntos en el espacio tridimensional y ternas ordenadas de números reales (figura 4). Δ

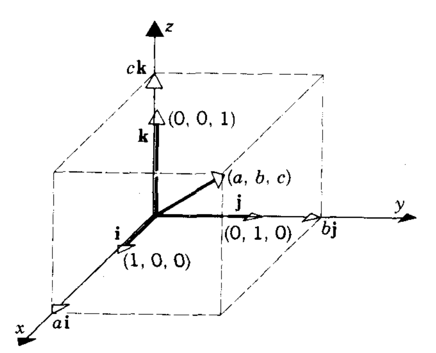


Figura 4

Los resultados del ejemplo anterior son un caso especial de los que se presentan en el siguiente ejemplo.

BASE ESTANDAR PARA R^n

Ejemplo 2 En el ejemplo 3 de la sección precedente se demostró que si

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

entonces

$$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

es un conjunto linealmente independiente de R^n. Este conjunto también genera a R^n, ya que cualquier vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ en R^n se puede escribir como

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \tag{2}$$

Así, S es una base de R^n; se denomina ***base estándar de R^n***. Por (2) se concluye que las coordenadas de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ respecto a la base estándar son $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de modo que

$$(\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Como en el ejemplo 1, aquí también se tiene que

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v})_S$$

de modo que un vector $\mathbf{v}$ y su vector de coordenadas con respecto a la base estándar de R^n son iguales. Δ

OBSERVACIÓN. En otro ejemplo se verá que un vector y su vector de coordenadas no son los mismos; la igualdad observada en los dos ejemplos precedentes es una situación especial que ocurre sólo con la base estándar de R^n.

OBSERVACIÓN. En R^2 y en R^3, los vectores estándar básicos suelen denotarse por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, en vez de por $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$. Aquí se usarán ambas notaciones, dependiendo de la situación particular.

Ejemplo 3 Sean $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$. Demostrar que el conjunto $S = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ es una base de R^3.

Solución. Para probar que el conjunto S genera a R^3 es necesario demostrar que un vector arbitrario $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ se puede expresar como una combinación lineal

$$\mathbf{b} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

de los vectores en S. Expresando esta ecuación en términos de las componentes se obtiene

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

o

$$(b_1, b_2, b_3) = (c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3)$$

o bien, igualando las componentes correspondientes,

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= b_2 \\ c_1 + 4c_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Así, para probar que S genera a R^3 es necesario demostrar que el sistema (3) tiene una solución para todas las elecciones de $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Para probar que S es linealmente independiente, se debe demostrar que la única solución de

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{4}$$

es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Como antes, si (4) se expresa en términos de las componentes, entonces la comprobación de la independencia lineal se reduce a demostrar que el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 4c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

sólo tiene la solución trivial. Obsérvese que los sistemas (3) y (5) tienen la misma matriz de coeficientes. Así, por los incisos *a*), *b*) y *g*) del teorema 4.3.4 se puede probar en forma simultánea que S es linealmente independiente y que genera a R^3 al demostrar que en los sistemas (3) y (5) la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

posee un determinante diferente de cero. Pero

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

de modo que S es una base para R^3. Δ

Ejemplo 4 Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ la base de R^3 en el ejemplo precedente.

a) Encontrar el vector de coordenadas de $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ con respecto a S.
b) Encontrar el vector $\mathbf{v}$ en R^3 cuyo vector de coordenadas con respecto a la base S es $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$.

Solución de a). Es necesario encontrar escalares c_1, c_2, c_3 tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

o bien, en términos de las componentes,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Igualando las componentes correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$ (comprobar). Por consiguiente,

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

Solución de b). Aplicando la definición del vector de coordenadas $(\mathbf{v})_S$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7) \quad \Delta \end{aligned}$$

Ejemplo 5

a) Demostrar que $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es una base para el espacio vectorial P_n de polinomios de la forma $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.
b) Encontrar el vector de coordenadas del polinomio $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ con respecto a la base $S = \{1, x, x^2\}$ para P_2.

Solución de a). En el ejemplo 11 de la sección 5.2 se demostró que S genera a P_2, y en el ejemplo 5 de la sección 5.3 se demostró que S es un conjunto linealmente independiente. Así, S es una base para P_n; se denomina ***base estándar para*** $\boldsymbol{P_n}$.

Solución de a). Las coordenadas de $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ son los coeficientes escalares de los vectores básicos 1, x y x^2, de modo que $(\mathbf{p})_S = (a_0, a_1, a_2)$. Δ

Ejemplo 6 Sean

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es una base para el espacio vectorial M_{22} de matrices 2×2. Para constatar que S genera a M_{22}, obsérvese que un vector (matriz) cualesquiera

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

se puede escribir como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 \end{aligned}$$

Para constatar que S es linealmente independiente, supóngase que

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0$$

Es decir,

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se concluye que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, $a = b = c = d = 0$, de modo que S es linealmente independiente. La base S en este ejemplo se denomina *base estándar para* M_{22}. De manera más general, la ***base estándar para*** $\boldsymbol{M_{nn}}$ consta de las mn matrices diferentes que tienen un solo 1 y cuyos elementos restantes son ceros. Δ

Ejemplo 7 Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto *linealmente independiente* en un espacio vectorial V, entonces S es una base para el subespacio lin (S), ya que por definición de lin (S) el conjunto S genera a lin (S). Δ

DIMENSIÓN

Definición. Se dice que un espacio vectorial V diferente de cero es de ***dimensión finita*** si contiene un conjunto finito de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ que forma una base. Si es así, se dice que V es de ***dimensión infinita***. Además, se considera que el espacio vectorial cero es de dimensión finita.

Ejemplo 8 Por los ejemplos 2, 5 y 6, los espacios vectoriales R^n, P^n y M_{nn} son de dimensión finita. Los espacios vectoriales $F(-\infty, \infty)$, $C(-\infty, \infty)$, $C^m(-\infty, \infty)$ y $C^\infty(-\infty, \infty)$ son de dimensión infinita (ejercicio 23). Δ

El siguiente teorema proporciona la clave del concepto de dimensión.

Teorema 5.4.2. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es cualquier base, entonces:*

a) *Todo conjunto con más de n vectores es linealmente dependiente.*
b) *Ningún conjunto con menos de n vectores genera a V.*

Demostración de a). Sea $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ cualquier conjunto de m vectores en V, donde $m > n$. Se quiere demostrar que S' es linealmente dependiente. Como $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base, todo $\mathbf{w}_i$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S, por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n \\ &\ \ \vdots \\ \mathbf{w}_m &= a_{1m}\mathbf{v}_1 + a_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{6}$$

Para demostrar que S' es linealmente dependiente, es necesario encontrar escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$, no todos cero, tales que

$$k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} \tag{7}$$

Usando las ecuaciones en (6), la expresión (7) se puede volver a escribir como

$$\begin{aligned} &(k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_ma_{1m})\mathbf{v}_1 \\ &\quad + (k_1a_{21} + k_2a_{22} + \cdots + k_ma_{2m})\mathbf{v}_2 \\ &\qquad \ddots \\ &\qquad\quad + (k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \cdots + k_ma_{nm})\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Así, a partir de la independencia lineal de S, el problema de demostrar que S' es un conjunto linealmente dependiente se reduce a probar que existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$, no todos cero, que satisfacen

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \ \ \vdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Pero (8) contiene más incógnitas que ecuaciones, de modo que la demostración está completa, ya que el teorema 1.2.1 garantiza la existencia de soluciones no triviales.

Demostración de b). Sea $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ cualquier conjunto de m vectores en V, donde $m < n$. Se quiere demostrar que S' no genera a V. La demostración será por contradicción: Se demostrará que suponiendo que S' genera a V se llega a una contradicción de la independencia lineal de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Si S' genera a V, entonces todo vector en V es una combinación lineal de los vectores en S'. En particular, cada vector básico $\mathbf{v}_i$ es una combinación lineal de los vectores en S', por ejemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\ \mathbf{v}_2 &= a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m \end{aligned} \tag{9}$$

Para obtener la contradicción, se demostrará que existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$, no todos cero, tales que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{10}$$

Pero obsérvese que (9) y (10) son de la misma forma que (6) y (7), excepto que se han intercambiado m y n, así como las $\mathbf{w}$ y las $\mathbf{v}$. Por tanto, los cálculos con los que se llegó a (8) ahora producen

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mn}k_n &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema lineal contiene más incógnitas que ecuaciones y por el teorema 1.2.1, posee soluciones no triviales. □

Del teorema precedente se deduce que si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es cualquier base para un espacio vectorial V, entonces todos los conjuntos en V que simultáneamente generan a V y son linealmente independientes deben tener precisamente n vectores. Así, todas las bases de V deben tener el mismo número de vectores que la base arbitraria S. Esto lleva al siguiente resultado, que es uno de los más importantes en álgebra lineal.

Teorema 5.4.3. *Todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.*

Para ver cómo se relaciona este teorema con el concepto de "dimensión", recuérdese que la base estándar para R^n tiene n vectores (ejemplo 2). Así, el teorema 5.4.3 indica que todas las bases de R^n tienen n vectores . En particular, cualquier base para R^3 tiene tres vectores, cualquier base para R^2 tiene dos vectores, y cualquier base para R^1 (R) tiene un vector. Intuitivamente, R^3 es tridimensional, R^2 (un plano) es bidimensional, y R (una recta) es unidimensional. Así, para espacios vectoriales conocidos, el número de vectores que hay en una base es igual a la dimensión. Este hecho sugiere la siguiente definición.

> **Definición.** La ***dimensión*** de un espacio vectorial V de dimensión finita, denotada por $\dim(V)$, se define como el número de vectores que hay en una base de V. Además, por definición, el espacio vectorial cero es de dimensión cero.

Ejemplo 9

$\dim(R^n) = n$ La base estándar tiene n vectores (ejemplo 2).
$\dim(P_n) = n + 1$ La base estándar tiene $n + 1$ vectores (ejemplo 5).
$\dim(M_{mn}) = mn$ La base estándar tiene mn vectores (ejemplo 6).

Ejemplo 10 Determinar una base para y la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\quad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Solución. En el ejemplo 6 de la sección 1.2 se demostró que la solución general del sistema dado es

$$x_1 = -s - t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = -t, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = t$$

Por consiguiente, los vectores solución se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lo cual demuestra que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

generan el espacio solución. Como también son linealmente independientes (comprobar), $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base y el espacio solución es bidimensional. Δ

ALGUNOS TEOREMAS FUNDAMENTALES

El resto de esta sección se dedicará a una serie de teoremas que revelan las sutiles relaciones que hay entre los conceptos de generación, independencia lineal, base y dimensión. Estos teoremas no son ejercicios vanos de matemáticas teóricas; por el contrario, son esenciales para comprender los espacios vectoriales y muchas aplicaciones prácticas del álgebra lineal se basan en ellos.

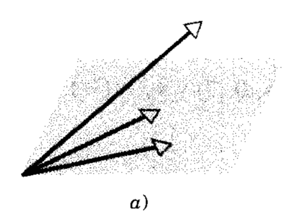
El siguiente teorema, que en este libro se denomina *Teorema Más/Menos*, establece dos principios básicos en los que se basan la mayoría de los teoremas subsecuentes.

> **Teorema 5.4.4.** ***(Teorema Más/Menos).*** *Sea* S *un conjunto no vacío de vectores en un espacio vectorial* V.
>
> *a*) *Si* S *es un conjunto linealmente independiente y* $\mathbf{v}$ *es un vector en* V *que no pertenece a lin* (S)*, entonces el conjunto que se obtiene al incluir* $\mathbf{v}$ *en* S *aún es linealmente independiente.*
>
> *b*) *Si* $\mathbf{v}$ *es un vector en* S *que se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores en* S*, y si* $S - \{\mathbf{v}\}$ *denota el conjunto que se obtiene al quitar* $\mathbf{v}$ *de* S*, entonces* S *y* $S - \{\mathbf{v}\}$ *generan el mismo espacio; es decir,*
>
> $$lin\ (S) = lin\ (S - \{\mathbf{v}\})$$

La demostración se pospone hasta el final de la sección para poder estudiar de inmediato las consecuencias del teorema. Sin embargo, el teorema se puede representar en R^3 como sigue:

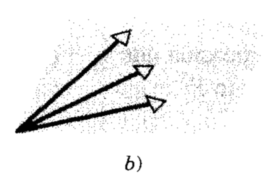
a) Un conjunto S de dos vectores linealmente independientes en R^3 genera un plano que pasa por el origen. Si S se aumenta insertando cualquier vector $\mathbf{v}$ fuera de este plano (figura 5*a*), entonces el conjunto resultante de tres vectores todavía es linealmente independiente, ya que ninguno de los tres vectores está en el mismo plano que los otros dos.

b) Si S es un conjunto de tres vectores no colineales en R^3 que están en un plano común que pasa por el origen (figura 5*b*), entonces los tres vectores generan el plano. Sin embargo, si de S se quita cualquier vector $\mathbf{v}$ que sea una combinación lineal de los otros dos, entonces el conjunto restante de dos vectores sigue generando el plano.



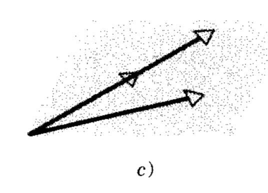
a)

Ninguno de los tres vectores está en el mismo plano que los otros dos.



b)

Cualquiera de los vectores se puede eliminar y los dos restantes siguen generando el plano.



c)

Cualquiera de los vectores colineales se puede eliminar y los dos restantes siguen generando el plano.

Figura 5

En general, para probar que un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, se debe demostrar que los vectores son linealmente independientes y generan a V. Sin embargo, si se sabe que la dimensión de V es n (de modo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ contiene el número adecuado de vectores para una base), entonces basta verificar *ya sea*, la independencia lineal *o* la generación: la otra condición se cumple automáticamente. Este es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 5.4.5. *Si V es un espacio vectorial de dimensión n y si S es un conjunto en V con exactamente n vectores, entonces S es una base de V si S genera a V o si S es linealmente independiente.*

Demostración. Supóngase que S contiene exactamente n vectores y que genera a V. Para probar que S es una base es necesario demostrar que S es un conjunto linealmente independiente. Pero si no es así, entonces algún vector $\mathbf{v}$ en S es una combinación lineal de los demás vectores. Si este vector se quita de S, entonces por el Teorema Más/Menos (teorema 5.4.4*b*) se concluye que el conjunto restante de $n - 1$ vectores aún genera a V. Pero esto es imposible, ya que por el teorema 5.4.2*b* se deduce que ningún conjunto con menos de n vectores puede generar un espacio vectorial de dimensión n. Así, S es linealmente independiente.

Supóngase que S contiene exactamente n vectores y que es un conjunto linealmente independiente. Para probar que S es una base se debe demostrar que S genera a V. Pero si ésto no es así, entonces en V existe un vector $\mathbf{v}$ que no está en lin (S). Si este vector se incluye en S, entonces por el Teorema Más/Menos (teorema 5.4.4*a*) se concluye que este conjunto de $n + 1$ vectores aún es linealmente independiente. Pero esto es imposible, ya que por el teorema 5.4.2*a* se concluye que ningún conjunto con más de n vectores en un espacio de dimensión n puede ser linealmente independiente. Así, S genera a V. ☐

Ejemplo 11

a) Demostrar por inspección que $\mathbf{v}_1 = (-3, 7)$ y $\mathbf{v}_2 = (5, 5)$ forman una base para R^2.

b) Demostrar por inspección que $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 0, 7)$ y $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 4)$ forman una base para R^3.

Solución de a). Como ninguno de los vectores es un múltiplo escalar del otro, los dos vectores forman un conjunto linealmente independiente en el espacio bidimensional R^2 y, entonces, por el teorema 5.4.5, forman una base.

Solución de b). Los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ forman un conjunto linealmente independiente en el plano xz (¿por qué?). El vector $\mathbf{v}_3$ está fuera del plano xz, de modo que

el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ también es linealmente independiente. Como R^3 es tridimensional, el teorema 5.4.5 indica que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base para R^3. Δ

El siguiente teorema muestra que para un espacio vectorial V de dimensión finita todo conjunto que genera a V contiene una base para V, y que todo conjunto linealmente independiente en V forma parte de alguna base para V.

Teorema 5.4.6. *Sea S un conjunto de vectores en un espacio vectorial V de dimensión finita.*

a) *Si S genera a V pero no es una base de V, entonces S se puede reducir a una base de V quitando de S los vectores adecuados.*

b) *Si S es un conjunto linealmente independiente que ya no es una base para V, entonces S se puede agrandar hasta constituir una base para V insertando en S los vectores apropiados.*

Demostración de a). Si S es un conjunto de vectores que genera a V pero no es una base para V, entonces S es un conjunto linealmente dependiente. Así, algún vector $\mathbf{v}$ en S se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores en S. Por el Teorema Más/Menos (teorema 5.4.4*b*), es posible quitar $\mathbf{v}$ de S y el conjunto resultante S' sigue generando a V. Si S' es linealmente independiente, entonces S' es una base para V y ya se ha terminado. Si S' es linealmente dependiente, entonces es posible quitar de S' algún vector adecuado a fin de obtener un conjunto S'' que siga generando a V. Se puede continuar quitando vectores de esta manera hasta que, por último, se llega a un conjunto de vectores en S que sea linealmente independiente y genere a V. Este subconjunto de S es una base para V.

Demostración de b). Supóngase que $\dim(V) = n$. Si S es un conjunto linealmente independiente que no es una base para V, entonces S no genera a V y existe un vector $\mathbf{v}$ en V que no está en lin (S). Pero por el Teorema Más/Menos (teorema 5.4.4*a*), es posible insertar $\mathbf{v}$ en S, y el conjunto resultante S' aún es linealmente independiente. Si S' genera a V, entonces S' es una base para V y ya se ha terminado. Si S' no genera a V, entonces es posible insertar un vector apropiado en S' para obtener un conjunto S'' que siga siendo linealmente independiente. Es posible continuar insertando vectores de esta manera hasta que se llega a un conjunto con n vectores linealmente independientes en V. Por el teorema 5.4.5, este conjunto es un base para V. $\square$

En la siguiente sección se dan ejemplos numéricos que ilustran el teorema precedente.

Esta sección concluye con un teorema que muestra que la dimensión de un subespacio de un espacio vectorial V no puede exceder la dimensión de V mismo, y que la única forma en que un subespacio puede tener la misma dimensión que V es cuando el subespacio es todo el espacio vectorial V. En la figura 6 se ilustra esta

idea para R^3. En esa figura se observa que aumenta la dimensión de subespacios sucesivamente más grandes.

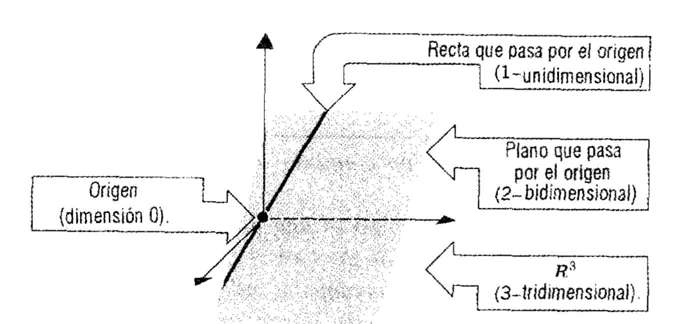


Figura 6

> **Teorema 5.4.7.** *Si W es un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces $dim(W) \leq dim(V)$; además, si $dim(W) = dim(V)$, entonces $W = V$.*

Demostración. Sea $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ una base para W. S puede ser una base para V o no. Si es así, entonces $\dim(W) = \dim(V) = m$. Si no es así, entonces, por el teorema 5.4.6*b*, es posible agregar vectores al conjunto linealmente independiente S a fin de convertirlo en una base para V de modo que $\dim(W) < \dim(V)$. Por tanto, $\dim(W) \leq \dim(V)$ en todos los casos. Si $\dim(W) = \dim(V)$, entonces S es un conjunto de m vectores linealmente independientes en el espacio vectorial V de dimensión m; por tanto, debido al teorema 5.4.5, S es una base para V. Esto significa que $W = V$ (¿por qué?). ☐

MÁS DEMOSTRACIONES

Demostración del teorema 5.4.4*a* Supóngase que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V y que $\mathbf{v}$ es un vector en V fuera de lin (S). Para probar que $S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente, es necesario demostrar que los únicos escalares que satisfacen

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r + k_{r+1}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{11}$$

son $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = k_{r+1} = 0$. Pero se debe tener que $k_{r+1} = 0$; en caso contrario, $\mathbf{v}$ se podría despejar en (11) como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, contradiciendo la hipótesis de que $\mathbf{v}$ es un vector que no pertenece a lin (S). Así, (11) se simplifica a

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{12}$$

lo cual, debido a la independencia lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, significa que

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0.$$

Demostración del teorema 5.4.4b Supóngase que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de vectores en V y, para ser específicos, supóngase que $\mathbf{v}_r$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$, por ejemplo

$$\mathbf{v}_r = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} \tag{13}$$

Se quiere demostrar que si $\mathbf{v}_r$ se quita de S, entonces el conjunto de vectores restante $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}\}$ sigue generando a lin (S); es decir, se debe demostrar que todo vector $\mathbf{w}$ en lin (S) se puede expresar como una combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}\}$. Pero si $\mathbf{w}$ está en lin (S), entonces $\mathbf{w}$ se puede expresar en la forma

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} + k_r\mathbf{v}_r$$

o bien, sustituyendo en (13)

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} + k_r(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{v}_{r-1})$$

que expresa a $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$. □

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.4

1. Explicar por qué los siguientes conjuntos de vectores no son bases de los espacios vectoriales indicados. (Resolver este problema por inspección.)
   a) $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 7)$ para R^2
   b) $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (6, 1, 1)$ para R^3
   c) $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = x - 1$ para P_2
   d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ para M_{22}
2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^2?
   a) (2, 1), (3, 0) b) (4, 1), (−7, −8) c) (0, 0), (1, 3) (d) (3, 9), (−4, −12)
3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^3?
   a) (1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3) b) (3, 1, −4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)
   c) (2, −3, 1), (4, 1, 1), (0, −7, 1) d) (1, 6, 4), (2, 4, −1), (−1, 2, 5)
4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para P_2?
   a) $1 - 3x + 2x^2$, $1 + x + 4x^2$, $1 - 7x$ b) $4 + 6x + x^2$, $-1 + 4x + 2x^2$, $5 + 2x - x^2$
   c) $1 + x + x^2$, $x + x^2$, x^2 d) $-4 + x + 3x^2$, $6 + 5x + 2x^2$, $8 + 4x + x^2$
5. Demostrar que el siguiente conjunto de vectores es una base para M_{22}.
   $$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
6. Sea V el conjunto generado por $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x$, $\mathbf{v}_2 = \operatorname{sen}^2 x$, $\mathbf{v}_3 = \cos 2x$.
   a) Demostrar que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ no es una base para V.
   b) Determinar una base para V.
7. Encontrar el vector de coordenadas de $\mathbf{w}$ con respecto a la base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ para R^2.

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$; $\mathbf{w} = (3, -7)$ b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 8)$; $\mathbf{w} = (1, 1)$
c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2)$; $\mathbf{w} = (a, b)$

8. Hallar el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a la base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$
b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

9. Encontrar el vector de coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto a la base $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$.
a) $\mathbf{p} = 4 - 3x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1$, $\mathbf{p}_2 = x$, $\mathbf{p}_3 = x^2$
b) $\mathbf{p} = 2 - x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1 + x$, $\mathbf{p}_2 = 1 + x^2$, $\mathbf{p}_3 = x + x^2$

10. Determinar el vector de coordenadas de A con respecto a la base $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios del 11 al 16, determinar la dimensión y una base para el espacio solución del sistema.

11. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ 6x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

17. Determinar bases para los siguientes subespacios de R^3.
a) El plano $3x - 2y + 5z = 0$.
b) El plano $x - y = 0$.
c) La recta $x = 2t, y = -t, z = 4t$.
d) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $b = a + c$.

18. Dar las dimensiones de los siguientes subespacios de R^4.
a) Todos los vectores de la forma $(a, b, c, 0)$.
b) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d), donde $d = a + b$ y $c = a - b$.
c) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d), donde $a = b = c = d$.

19. Determinar la dimensión del subespacio de P_3 que consta de todos los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que $a_0 = 0$.

20. Encontrar un vector estándar básico que se pueda agregar al conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para obtener una base para R^3.
a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2, -2)$ b) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, -2)$

21. Encontrar vectores estándar básicos que se puedan agregar al conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para obtener una base para R^4.

$$\mathbf{v}_1 = (1, -4, 2, -3), \qquad \mathbf{v}_2 = (-3, 8, -4, 6)$$

22. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de un espacio vectorial V. Demostrar que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ también es una base, donde $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

23. a) Demostrar que para todo entero positivo n, en F($-\infty$, ∞) se puede hallar n + 1 vectores linealmente independientes. [***Sugerencia.*** Buscar polinomios.]
b) Usar el resultado del inciso a) para demostrar que $F(-\infty, \infty)$ es de dimensión infinita.
c) Demostrar que $C(-\infty, \infty)$, $C^m(-\infty, \infty)$ y $C(-\infty, \infty)$ son espacios vectoriales de dimensión infinita.

24. Sea S una base de un espacio vectorial V de dimensión n. Demostrar que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_r$ forman un conjunto linealmente independiente de vectores en V, entonces los vectores de coordenadas $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ forman un conjunto linealmente independiente en R^n y recíprocamente.

25. Usando la notación del ejercicio 24, demostrar que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_r$ generan a V, entonces los vectores de coordenadas $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ generan a R^n y recíprocamente.

26. Encontrar una base para el subespacio de P_2 generado por los vectores dados.
a) $-1 + x - 2x^2$, $3 + 3x + 6x^2$, 9 b) $1 + x$, x^2, $-2 + 2x^2$, $-3x$
c) $1 + x - 3x^2$, $2 + 2x - 6x^2$, $3 + 3x - 9x^2$
[***Sugerencia.*** Sea S la base estándar para P_2 y trabájese con los vectores de coordenadas relativos a S; consultar los ejercicios 24 y 25.]

27. En la figura 7 se muestran un sistema de coordenadas rectangulares *xy* y un sistema de coordenadas *x'y' con* ejes oblicuos. Suponiendo que en todos los ejes la escala mide 1 unidad, encontrar las coordenadas *x'y'* de los puntos cuyas coordenadas *xy* se proporcionan.
a) (1, 1). b) (1, 0). c) (0, 1). d) (a, b).

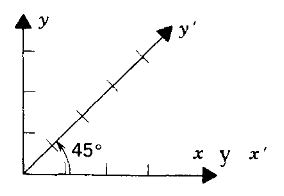


Figura 7

28. En la figura 8 se muestran un sistema de coordenadas rectangulares *xy* determinado por los vectores unitarios básicos **i** y **j** y un sistema de coordenadas *x'y'* determinado por los vectores unitarios básicos $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Encontrar las coordenadas *x'y'* de los puntos cuyas coordenadas *xy* se proporcionan.

a) $(\sqrt{3}, 1)$. b) (1, 0). c) (0, 1). d) (a, b).

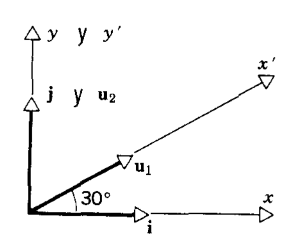


Figura 8

5.5 ESPACIO RENGLÓN, ESPACIO COLUMNA Y ESPACIO NULO

En esta sección se estudiarán tres espacios vectoriales importantes asociados con matrices. Con el trabajo aquí realizado se comprenderá mejor la relación que hay entre las soluciones de un sistema lineal y las propiedades de su matriz de coeficientes.

Se empezará con algunas definiciones.

VECTORES RENGLÓN Y VECTORES COLUMNA

Definición. Para una matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\ \mathbf{r}_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}] \end{aligned}$$

en R^n formados a partir de los renglones de A se denominan ***vectores renglón*** de A, y los vectores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

en R^m formados a partir de las columnas de A se denominan ***vectores columna*** de A.

Ejemplo 1 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

los vectores renglón de A son

$$\mathbf{r}_1 = [2 \quad 1 \quad 0] \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_2 = [3 \quad -1 \quad 4]$$

y los vectores columna de A son

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

La siguiente definición caracteriza tres espacios vectoriales importantes asociados con una matriz.

ESPACIO COLUMNA, ESPACIO RENGLÓN Y ESPACIO NULO

Definición. Si A es una matriz $m \times n$, entonces el subespacio de R^n generado por los vectores renglón de A se denomina ***espacio renglón*** de A, y el subespacio de R^m generado por los vectores columna de A se denomina ***espacio columna*** de A. El espacio solución del sistema de ecuaciones homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que es un subespacio de R^n, se denomina ***espacio nulo*** de A.

En esta sección y en la siguiente se abordarán las siguientes preguntas generales:

- ¿Qué relaciones existen entre las soluciones de un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y el espacio renglón, el espacio columna y el espacio nulo de la matriz de coeficientes A?
- ¿Qué relaciones existen entre el espacio renglón, el espacio columna y el espacio nulo de una matriz?

Para investigar la primera de tales preguntas, supóngase que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Por la fórmula (7) de la sección 1.3 se concluye que si $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ denotan los vectores columna de A, entonces el producto $A\mathbf{x}$ se puede expresar como una combinación lineal de estos vectores columna con coeficientes de $\mathbf{x}$; es decir,

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \tag{1}$$

Así, un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m ecuaciones con n incógnitas se puede escribir como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \tag{2}$$

de donde se concluye que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores columna de A o, equivalentemente, si y sólo si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A. Lo anterior conduce al siguiente teorema.

Teorema 5.5.1. *Un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A.*

Ejemplo 2 Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A, y expresar $\mathbf{b}$ como una combinación lineal de los vectores columna de A.

Solución. Resolviendo el sistema por eliminación gaussiana se obtiene (comprobar)

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 3$$

Como el sistema es consistente, $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A, además, por (2) y la solución obtenida, se concluye que

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

RELACIÓN ENTRE LAS SOLUCIONES DE $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ Y LAS SOLUCIONES DE $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

El siguiente teorema establece una relación fundamental entre las soluciones de un sistema lineal no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y las del sistema lineal homogéneo correspondiente $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ con la misma matriz de coeficientes.

Teorema 5.5.2. *Si $\mathbf{x}_0$ denota cualquier solución simple de un sistema lineal no homogéneo consistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ forman una base para el espacio nulo de A, es decir, el espacio solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces toda solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede expresar en la forma*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \tag{3}$$

y, recíprocamente, para todas las elecciones de los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, el vector $\mathbf{x}$ en esta fórmula es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Demostración. Supóngase que $\mathbf{x}_0$ es cualquier solución fija de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y que $\mathbf{x}$ es una solución cualesquiera. Entonces

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \qquad \text{y} \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Al restar estas ecuaciones se obtiene

$$A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

o

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

lo cual indica que $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ es una solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ es una base para el espacio solución de este sistema, entonces $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ se puede expresar como una combinación lineal de estos vectores, por ejemplo

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

Por tanto,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

lo que demuestra la primera parte del teorema. Recíprocamente, para todas las elecciones de los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ en (3) se tiene

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k)$$

o

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_0 + c_1(A\mathbf{v}_1) + c_2(A\mathbf{v}_2) + \cdots + c_k(A\mathbf{v}_k)$$

Pero $\mathbf{x}_0$ es una solución del sistema no homogéneo y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son soluciones del sistema homogéneo, de modo que la última ecuación indica que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

lo cual muestra que $\mathbf{x}$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. □

OBSERVACIÓN. Hay cierta terminología asociada con la fórmula (3). El vector $\mathbf{x}_0$ se denomina ***solución particular*** de $A\mathbf{x}$ =La expresión $\mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots, + c_k\mathbf{v}_k$ se llama ***solución general*** de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y la expresión $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots, + c_k\mathbf{v}_k$ se conoce como ***solución general*** de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Con esta terminología, la fórmula (3) establece que *la solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es la suma de cualquier solución particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y la solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Para sistemas lineales con dos o tres incógnitas, el teorema 5.5.2 posee una interpretación geométrica interesante en R^2 y en R^3. Por ejemplo, considérese el caso en que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son sistemas lineales con dos incógnitas. Las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ forman un subespacio de R^2 y, por tanto constituyen una recta que pasa por el origen, sólo el origen o todo R^2. Por el teorema 5.5.2, las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se pueden obtener sumando cualquier solución particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, por ejemplo $\mathbf{x}_0$, a las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Suponiendo que $\mathbf{x}_0$ está colocado con su punto inicial en el origen, esto tiene el efecto geométrico de trasladar el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de modo que el punto en el origen se mueve hacia la punta de $\mathbf{x}_0$ (figura 1). Esto significa que los vectores solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ forman una recta que pasa por la punta de $\mathbf{x}_0$, el punto en la punta de $\mathbf{x}_0$, o todo R^2. (¿Puede el lector imaginar el último caso?) De manera semejante, para sistemas lineales con tres incógnitas, las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ constituyen un plano que pasa por la punta de cualquier solución particular $\mathbf{x}_0$, una recta que pasa por la punta de $\mathbf{x}_0$, o todo R^3.

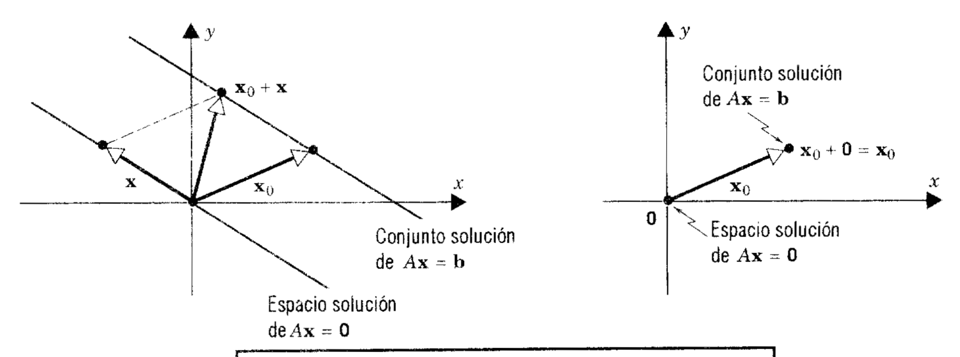


Figura 1 Al sumar $\mathbf{x}_0$ a cada vector $\mathbf{x}$ en el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se traslada el espacio solución.

Ejemplo 3 En el ejemplo 3 de la sección 1.2 se resolvió el sistema lineal no homogéneo

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0\\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1\\
5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 5\\
2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned} \tag{4}$$

y se obtuvo

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

Este resultado se puede escribir en forma vectorial como

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t\\ r\\ -2s\\ s\\ t\\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -3\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4\\ 0\\ -2\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}$$

que es la solución general de (4). Al comparar con (3), el vector

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

es una solución particular de (4) y

$$\mathbf{x} = r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es la solución general del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned}$$

(comprobar). Δ

BASES PARA ESPACIOS RENGLÓN, ESPACIOS COLUMNA Y ESPACIOS NULOS

Primero se designaron las operaciones elementales en los renglones para resolver sistemas lineales y, por ese trabajo, se sabe que al efectuar una operación elemental en los renglones de una matriz aumentada no cambia el conjunto solución del sistema lineal correspondiente. Se concluye que realizar una operación elemental en los renglones de una matriz A no modifica el conjunto solución del sistema lineal correspondiente $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o, expresado de otra forma, no cambia el espacio nulo de A. Así, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 5.5.3. *Las operaciones elementales en los renglones no cambian el espacio nulo de una matriz.*

Ejemplo 4 Encontrar una base para el espacio nulo de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. El espacio nulo de A es el espacio solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\quad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

En el ejemplo 10 de la sección 5.4 se demostró que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base para este espacio. Δ

El siguiente teorema es el correlativo del teorema 5.5.3.

Teorema 5.5.4. *Las operaciones elementales en los renglones no cambian el espacio renglón de una matriz.*

Demostración. Supóngase que los vectores renglón de una matriz A son $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ y sea B la matriz que se obtiene al efectuar una operación elemental en los renglones de A. Se demostrará que todo vector en el espacio renglón de B también está en el espacio renglón de A y recíprocamente, que todo vector en el espacio renglón de A está en el espacio renglón de B. Es posible concluir entonces que A y B tienen el mismo espacio renglón.

Considerar las posibilidades: Si la operación en los renglones es un intercambio de renglones, entonces B y A tienen los mismos vectores renglón y, en consecuencia, tienen el mismo espacio renglón. Si la operación en los renglones es la multiplicación de un renglón por un escalar diferente de cero o es la adición de un múltiplo de un renglón a otro renglón, entonces los vectores renglón $r_1', r_2', \ldots, r_m'$ de B son combinaciones lineales de $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$; así, están en el espacio renglón de A. Como un espacio vectorial es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar, todas las combinaciones lineales de $r_1', r_2', \ldots, r_m'$ también están en el espacio renglón de A. Por consiguiente, todo vector en el espacio renglón de B está en el espacio renglón de A.

Como B se obtiene a partir de A al efectuar una operación en los renglones, A se puede obtener de B al efectuar la operación inversa (sección 1.5). Así, el razonamiento anterior muestra que el espacio renglón de A está contenido en el espacio renglón de B. □

En vista de los teoremas 5.5.3 y 5.5.4 se podría anticipar que las operaciones elementales en los renglones no deben cambiar el espacio columna de una matriz. Sin embargo, esto *no* es así: las operaciones elementales en los renglones pueden modificar el espacio columna. Por ejemplo, considérese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

La segunda columna es un múltiplo escalar de la primera, de modo que el espacio columna de A consta de todos los múltiplos escalares del primer vector columna. Sin embargo, si se suma -2 veces el primer renglón de A al segundo renglón, se obtiene

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí nuevamente la segunda columna es un múltiplo escalar de la primera, de modo que el espacio columna de B consta de todos los múltiplos escalares del primer vector columna. Este espacio columna no es el mismo que el espacio columna de A.

Aunque las operaciones elementales en los renglones pueden cambiar el espacio columna de una matriz, se demostrará que no importa cuáles sean las relaciones de independencia o dependencia lineal existentes entre los vectores columna antes de la ejecución de una operación en los renglones, esas relaciones también se cumplen para las columnas correspondientes de la matriz que se obtiene al realizar esa operación. Para precisar más este hecho, supóngase que una matriz B se obtiene al efectuar una operación elemental en los renglones de una matriz A $m \times n$. Por el teorema 5.5.3, los dos sistemas lineales homogéneos

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad B\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tienen el mismo conjunto solución. Así, el primer sistema tiene una solución no trivial si y sólo si lo mismo se cumple para el segundo sistema. Pero si los vectores columna de A y B, respectivamente, son

$$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n \qquad \text{y} \qquad \mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \ldots, \mathbf{c}'_n$$

entonces por (2) ambos sistemas se pueden volver a escribir como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{0} \tag{5}$$

y

$$x_1\mathbf{c}'_1 + x_2\mathbf{c}'_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}'_n = \mathbf{0} \tag{6}$$

Así, (5) tiene una solución no trivial para $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si y sólo si lo mismo es cierto para (6). Esto indica que los vectores columna de A son linealmente independientes si y sólo si lo mismo es cierto para B. Aunque se omitirá la demostración, esta conclusión también es válida para cualquier subconjunto de los vectores columna. Así, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.5.5. *Si A y B son matrices equivalentes por renglones, entonces*

a) *Un conjunto dado de vectores columna de A es linealmente independiente si y sólo si los vectores columna correspondientes de B son linealmente independientes.*

b) *Un conjunto dado de vectores columna de A forma una base para el espacio columna de A si y sólo si los vectores columna correspondientes de B forman una base para el espacio columna de B.*

El siguiente teorema hace posible encontrar por inspección bases para los espacios renglón y columna de una matriz en forma escalonada.

> **Teorema 5.5.6.** *Si una matriz R está en forma escalonada, entonces los vectores renglón con los unos principales (es decir, los vectores renglón diferentes de cero) forman una base para el espacio renglón de R, y los vectores columna con los unos principales de los vectores renglón forman una base para el espacio columna de R.*

Como este resultado es casi evidente cuando se consideran ejemplos numéricos, se omitirá la demostración; ésta requiere algo más que el análisis de las posiciones de los ceros y los unos de R.

Ejemplo 5 La matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está escrita en forma escalonada. Por el teorema 5.5.6, los vectores

$$\mathbf{r}_1 = [1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \quad 3]$$
$$\mathbf{r}_2 = [0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0]$$
$$\mathbf{r}_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

forman una base para el espacio renglón de R, y los vectores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

forman una base para el espacio columna de R. Δ

Ejemplo 6 Encontrar bases para los espacios renglón y columna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución. Como las operaciones elementales en los renglones no cambian el espacio renglón de una matriz, es posible hallar una base para el espacio renglón

de A determinando una base para el espacio renglón de cualquier forma escalonada de A. Reduciendo A a forma escalonada se obtiene (comprobar)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por el teorema 5.5.6, los vectores renglón diferentes de cero de R forman una base para el espacio renglón de R y, por tanto, forman una base para el espacio renglón de A. Estos vectores básicos son

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [1 \quad -3 \quad 4 \quad -2 \quad 5 \quad 4] \\ \mathbf{r}_2 &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad -2 \quad -6] \\ \mathbf{r}_3 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que A y R pueden tener espacios columna diferentes, no es posible encontrar una base para el espacio columna de A *directamente* a partir de los vectores columna de R. Sin embargo, por el teorema 5.5.5*b* se concluye que si se puede hallar un conjunto de vectores columna de R que formen una base para el espacio columna de R, entonces los vectores columna *correspondientes* de A formarán una base para el espacio columna de A.

Las columnas primera, tercera y quinta de R contienen los unos principales de los vectores renglón, de modo que

$$\mathbf{c}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3' = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_5' = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

forman una base para el espacio columna de R; así, los vectores columna correspondientes de A, a saber

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

forman una base para el espacio columna de A. Δ

Ejemplo 7 Encontrar una base para el espacio generado por los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0),$$
$$\mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

Solución. Salvo por una variación en la notación, el espacio generado por estos vectores es el espacio renglón de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduciendo esta matriz a la forma escalonada se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores renglón diferentes de cero en esta matriz son

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0), \quad \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

Estos vectores forman una base para el espacio renglón y por tanto forman una base para el subespacio de R^5 generado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$. Δ

Obsérvese que en el ejemplo 6 los vectores básicos obtenidos para el espacio columna de A consistían en los vectores columna de A, pero los vectores básicos obtenidos para el espacio renglón de A no eran todos los vectores renglón de A. El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento para encontrar una base del espacio renglón de una matriz A que consta completamente de vectores renglón de A.

Ejemplo 8 Encontrar una base para el espacio renglón de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

que conste completamente de vectores renglón de A.

Solución. Se transpondrá A, convirtiendo así el espacio renglón de A en el espacio columna de A^T; luego se aplicará el método del ejemplo 6 para encontrar una base del espacio columna de A^T; y luego se transpondrá nuevamente a fin de convertir los vectores columna de nuevo en vectores renglón. Al transponer A se obtiene

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduciendo esta matriz a forma escalonada se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas primera, segunda y cuarta contienen los unos principales, de modo que los vectores columna correspondientes en A^T forman una base para el espacio columna de A^T; éstos son

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Transponiendo de nuevo y ajustando correctamente la notación se obtienen los vectores básicos

$$\mathbf{r}_1 = [\,1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 3\,], \qquad \mathbf{r}_2 = [\,2 \quad -5 \quad -3 \quad -2 \quad 6\,],$$

y

$$\mathbf{r}_4 = [\,2 \quad 6 \quad 18 \quad 8 \quad 6\,]$$

para el espacio renglón de A. Δ

Por el teorema 5.5.5 se sabe que las operaciones elementales en los renglones no modifican las relaciones de independencia lineal o dependencia lineal entre los vectores columna; sin embargo, las fórmulas (5) y (6) indican un resultado incluso más profundo. Debido a que estas fórmulas tienen en realidad *los mismos coeficientes escalares* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se concluye que las operaciones elementales en los renglones no modifican las *fórmulas* (combinaciones lineales) que relacionan vectores columna linealmente dependientes. Se omite la demostración formal.

Ejemplo 9

a) Encontrar un subconjunto de los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, 6),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 3, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (2, -1, 4, -7), \quad \mathbf{v}_5 = (5, -8, 1, 2)$$

que forme una base para el espacio generado por estos vectores.

b) Expresar los vectores que no pertenecen a la base como una combinación lineal de los vectores básicos.

Solución de a). Se empezará por construir una matriz que tenga a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_5$ como sus vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5 \end{matrix}$$

La primera parte del problema se puede resolver encontrando una base para el espacio columna de esta matriz. Al reducir la matriz a la forma escalonada y denotar los vectores columna de la matriz resultante por $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ y $\mathbf{w}_5$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 & \mathbf{w}_5 \end{matrix}$$

Los unos principales aparecen en las columnas 1, 2 y 4, de modo que por el teorema 5.5.6

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4\}$$

es una base para el espacio columna de (8) y en consecuencia

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$$

es una base para el espacio columna de (7).

Solución de b). Se empezará por expresar $\mathbf{w}_3$ y $\mathbf{w}_5$ como combinaciones lineales de los vectores básicos $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_4$. La forma más sencilla de hacer lo anterior es expresando $\mathbf{w}_3$ y $\mathbf{w}_5$ en términos de los vectores básicos que tengan los subíndices más pequeños. Así, $\mathbf{w}_3$ se expresará como una combinación lineal de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, y

$\mathbf{w}_5$ se expresará como una combinación lineal de $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_4$. Por inspección de (8), estas combinaciones lineales son

$$\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$$
$$\mathbf{w}_5 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4$$

Las expresiones anteriores se denominan ***ecuaciones de dependencia***. Las relaciones correspondientes en (7) son

$$\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$
$$\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \quad \Delta$$

El método ilustrado en el ejemplo precedente es tan importante que a continuación se resumen los pasos:

Dado un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en R^n con el siguiente procedimiento se obtiene un subconjunto de estos vectores que forma una base para lin (S) y expresa los vectores de S que no pertenecen a la base como una combinación lineal de los vectores básicos.

Paso 1. Formar la matriz A que tiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ como sus vectores columna.

Paso 2. Expresar la matriz A en su forma escalonada reducida R, y sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ los vectores columna de R.

Paso 3. Identificar las columnas que contienen a los unos principales en R. Los vectores columna correspondientes de A son los vectores básicos para lin (S).

Paso 4. Expresar cada vector columna de R que *no* contenga un uno principal como combinación lineal de los vectores columna precedentes que contengan unos principales. (Esto se puede hacer por inspección.) Así, se obtiene un conjunto de ecuaciones de dependencia que incluyen a los vectores columna de R. Las ecuaciones correspondientes para los vectores columna de A expresan los vectores que no pertenecen a la base como combinaciones lineales de los vectores básicos.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.5

1. Enumerar los vectores renglón y los vectores columna de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Expresar el producto $A\mathbf{x}$ como una combinación lineal de los vectores columna de A.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

3. Determinar si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A y, en caso afirmativo, expresar $\mathbf{b}$ como una combinación lineal de loa vectores columna de A.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

4. Supóngase que $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -3$ es una solución de un sistema lineal no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y que el conjunto solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ está definido por las fórmulas

$$x_1 = -3r + 4s, \qquad x_2 = r - s, \qquad x_3 = r, \qquad x_4 = s$$

a) Encontrar la forma vectorial de la solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
b) Encontrar la forma vectorial de la solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5. Encontrar la forma vectorial de la solución general del sistema lineal dado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; luego, usar el resultado para encontrar la forma vectorial de la solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

a) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 &= 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 \quad + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= -3 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 7x_2 \qquad - 5x_4 &= -5 \end{aligned}$

6. Encontrar una base para el espacio nulo de A.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

7. En cada inciso se proporciona una matriz en forma escalonada. Por inspección, hallar las bases de los espacios renglón y columna de A.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Para las matrices del ejercicio 6, encontrar una base para el espacio renglón de A reduciendo la matriz a la forma escalonada.

9. Para las matrices del ejercicio 6, encontrar una base para el espacio columna de A.

10. Para las matrices del ejercicio 6, encontrar una base para el espacio renglón de A que conste completamente de vectores renglón de A.

11. Encontrar una base para el subespacio de R^4 generado por los vectores dados.

a) $(1, 1, -4, -3)$, $(2, 0, 2, -2)$, $(2, -1, 3, 2)$ (b) $(-1, 1, -2, 0)$, $(3, 3, 6, 0)$, $(9, 0, 0, 3)$

c) $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(-2, 0, 2, 2)$, $(0, -3, 0, 3)$

12. Determinar un subconjunto de los vectores que formen una base para el espacio generado por los vectores; luego, expresar cada vector que no pertenezca a la base como una combinación lineal de los vectores básicos.

a) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-3, 3, 7, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 9, 3)$, $\mathbf{v}_4 = (-5, 3, 5, -1)$

b) $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 0, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, -1, 2, 3)$

c) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 5, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -5, 9, 4)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 4, 2, -3)$, $\mathbf{v}_5 = (-7, 18, 2, -8)$

13. Demostrar que los vectores renglón de una matriz invertible A $n \times n$ forman una base para R^n.

14. a) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y considérese un sistema de coordenadas rectangulares xyz en el espacio tridimensional. Demostrar que el espacio nulo de A consta de todos los puntos del eje z y que el espacio columna consta de todos los puntos en el plano xy.

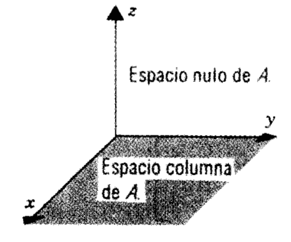


Figura 2

b) Encontrar una matriz 3×3 cuyo espacio nulo sea el eje x y cuyo espacio columna sea el plano yz.

5.6 RANGO Y NULIDAD

En la sección precedente se analizaron las relaciones entre los sistemas de ecuaciones lineales y los espacios renglón, columna y nulo de la matriz de coeficientes. En esta sección se estudiarán las relaciones que hay entre las dimensiones de los espacios renglón, columna y nulo de una matriz y su transpuesta. Los resultados obtenidos son fundamentales y proporcionan una comprensión más profunda sobre los sistemas lineales y las transformaciones lineales.

LOS CUATRO ESPACIOS MATRICIALES FUNDAMENTALES

Si se consideran juntas una matriz A y su transpuesta A^T, entonces existen seis espacios vectoriales de interés:

espacio renglón de A	espacio renglón de A^T
espacio columna de A	espacio columna de A^T
espacio nulo de A	espacio nulo de A^T

Sin embargo, al transponer una matriz sus vectores renglón se convierten en vectores columna y sus vectores columna se convierten en vectores renglón, de modo que, excepto por una diferencia en la notación, el espacio renglón de A^T es el mismo que el espacio columna de A, y el espacio columna de A^T es el mismo que el espacio renglón de A. Así, quedan cuatro espacios vectoriales de interés:

espacio renglón de A	espacio columna de A
espacio nulo de A	espacio nulo de A^T

Éstos se denominan ***espacios matriciales fundamentales*** asociados con A. Si A es una matriz $m \times n$, entonces el espacio renglón de A y el espacio nulo de A son subespacios de R^n y el espacio columna de A y el espacio nulo de A^T son subespacios de R^m. El objetivo principal en esta sección es establecer las relaciones que hay entre las dimensiones de estos cuatro espacios vectoriales.

EL ESPACIO RENGLÓN Y EL ESPACIO COLUMNA TIENEN LA MISMA DIMENSIÓN

En el ejemplo 6 de la sección 5.5 se encontró que el espacio renglón y el espacio columna de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

tienen, cada uno, tres vectores; es decir, ambos espacios son tridimensionales. No es fortuito que estas dimensiones sean iguales; es una consecuencia del siguiente resultado general.

Teorema 5.6.1. *Si A es cualquier matriz, entonces el espacio renglón y el espacio columna de A tienen la misma dimensión.*

Demostración. Sea R la forma escalonada reducida de A.Por el teorema 5.5.4 se deduce que

$$\dim(\text{espacio renglón de } A) = \dim(\text{espacio renglón de } R)$$

y, por el teorema 5.5.5*b*, se concluye que

$$\dim(\text{espacio columna de } A) = \dim(\text{espacio columna de } R)$$

Así, la demostración estará completa si se puede probar que el espacio renglón y el espacio columna de R tienen la misma dimensión. Pero la dimensión del espacio renglón de R es el número de vectores diferentes de cero y la dimensión del espacio columna de R es el número de columnas que contienen unos principales (teorema 5.5.6). Sin embargo, los renglones diferentes de cero son precisamente los renglones en que aparecen los unos principales, de modo que el número de éstos y el número de renglones diferentes de cero es el mismo. Esto demuestra que el espacio renglón y el espacio columna de R tienen la misma dimensión. ☐

Las dimensiones de los espacios renglón, columna y nulo de una matriz son números tan importantes que existen notación y terminología especiales asociadas con ellos.

RANGO Y NULIDAD

Definición. La dimensión común del espacio renglón y del espacio columna de una matriz A se denomina ***rango*** de A y se denota por rango(A); la dimensión del espacio nulo de A se denomina ***nulidad*** de A y se denota por nulidad(A).

Ejemplo 1 Encontrar el rango y la nulidad de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución. La forma escalonada reducida de A es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(comprobar). Como existen dos renglones diferentes de cero (o, equivalentemente, dos unos principales), el espacio renglón y el espacio columna, ambos, son bidimensionales, de modo que rango(A) = 2. Para encontrar la nulidad de A es necesario determinar la dimensión del espacio solución del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Este sistema se puede resolver expresando la matriz aumentada en la forma escalonada reducida. La matriz resultante es idéntica a (1), excepto que contiene una última columna adicional de ceros y el sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + \ \ 5x_6 &= 0 \end{aligned}$$

o bien, despejando las variables principales,

$$\begin{aligned} x_1 &= 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6 \\ x_2 &= 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - \ \ 5x_6 \end{aligned} \tag{2}$$

Se concluye que la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} x_1 &= 4r + 28s + 37t - 13u \\ x_2 &= 2r + 12s + 16t - 5u \\ x_3 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \\ x_6 &= u \end{aligned}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Los cuatro vectores del miembro derecho de (3) forman una base para el espacio solución, de modo que nulidad(A) = 4. Δ

El siguiente teorema muestra que una matriz y su transpuesta tienen el mismo rango.

Teorema 5.6.2. *Si A es cualquier matriz, entonces rango(A) = rango(A^T).*

Demostración.

rango(A) = dim(espacio renglón de A) = dim(espacio columna de A^T) = rango(A^T). □

El siguiente teorema establece una relación importante entre el rango y la nulidad de una matriz.

TEOREMA DE LA DIMENSIÓN

Teorema 5.6.3. (***Teorema de la dimensión para matrices***). *Si A es una matriz con n columnas, entonces*

$$\text{rango}(A) + \text{nulidad}(A) = n \quad (4)$$

Demostración. Como A tiene n columnas, el sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene n incógnitas (variables), que se clasifican en dos categorías: principales y libres.

Ası,

$$\begin{bmatrix}\text{número de variables}\\ \text{principales}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{número de}\\ \text{variables libres}\end{bmatrix} = n$$

Pero el número de variables principales es el mismo que el número de unos principales en la forma escalonada reducida de A, que es el rango de A. Por tanto,

$$\text{rango}(A) + \begin{bmatrix}\text{número de}\\ \text{variables libres}\end{bmatrix} = n$$

El número de variables libres es igual a la nulidad de A. Esto es así porque la nulidad de A es la dimensión del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que es igual al número de parámetros que hay en la solución general véase (3), por ejemplo , que es igual al número de variables libres. Así,

$$\text{rango}(A) + \text{nulidad}(A) = n \quad \square$$

La demostración del teorema precedente contiene dos resultados importantes de suyo.

Teorema 5.6.4. *Si A es una matriz $n \times n$, entonces*:

a) *Rango(A) = Número de variables principales que hay en la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
b) *Nulidad(A) = Número de parámetros que hay en la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Ejemplo 2 La matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

tiene seis columnas, de modo que

$$\text{rango}(A) + \text{nulidad}(A) = 6$$

Lo anterior es consistente con el ejemplo 1, donde se demostró que rango$(A) = 2$ y nulidad$(A) = 4$. Δ

Ejemplo 3 Encontrar el número de parámetros que hay en el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si A es una matriz 5×7 de rango 3.

Solución. Por (4),

$$\text{nulidad}(A) = n - \text{rango}(A) = 7 - 3 = 4$$

Así, existen cuatro parámetros. Δ

Ahora supóngase que A es una matriz $m \times n$ de rango r; por el teorema 5.6.2 se concluye que A^T es una matriz $n \times m$ de rango r. Aplicando el teorema 5.6.3 a A y A^T se obtiene

$$\text{nulidad}(A) = n - r, \quad \text{nulidad}(A^T) = m - r$$

a partir de lo cual se deduce la siguiente tabla que relaciona las dimensiones de los cuatro espacios fundamentales de una matriz A de rango r.

Espacio fundamental	**Dimensión**
Espacio renglón de A	r
Espacio columna de A	r
Espacio nulo de A	$n - r$
Espacio nulo de A^T	$m - r$

VALOR MÁXIMO PARA EL RANGO

Si A es una matriz $m \times n$, entonces los vectores renglón están en R^n y los vectores columna están en R^m. Esto significa que el espacio renglón de A es cuando mucho de dimensión n y que el espacio columna de A es cuando mucho de dimensión m. Como los espacios renglón y columna tiene la misma dimensión (el rango de A), se debe concluir que si $m = n$, entonces el rango de A es menor o igual al mínimo de m y n. Este hecho se indica escribiendo

$$\text{rango } (A) \le \text{mín } (m, n) \tag{5}$$

donde mín(m, n) denota el menor de los números m y n si $m \neq n$ o su valor común si $m = n$.

Ejemplo 4 Si A es una matriz 7×4, entonces el rango de A es menor o igual que 4 y, en consecuencia, los siete vectores renglón deben ser linealmente dependientes. Si A es una matriz 4×7, entonces nuevamente el rango de A es menor o igual que 4 y, por tanto, los siete vectores columna deben ser linealmente dependientes. Δ

SISTEMAS LINEALES DE *m* ECUACIONES CON *n* INCÓGNITAS

En secciones anteriores se obtuvo una amplia gama de teoremas relacionados con sistemas lineales de n ecuaciones con n incógnitas (véase el teorema 4.3.4). Ahora la atención se dirigirá a sistemas lineales de m ecuaciones en n incógnitas en los cuales m y n no necesariamente son iguales.

El siguiente teorema establece condiciones en las que se garantiza que un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas es consistente.

Teorema 5.6.5. (***Teorema de consistencia***). *Si* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *es un sistema lineal de m ecuaciones en n incógnitas, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *es consistente.*
b) $\mathbf{b}$ *está en el espacio columna de A.*
c) La matriz de coeficientes A y la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ *tienen el mismo rango.*

Demostración. Basta demostrar las equivalencias $a \Leftrightarrow b$ y $b \Leftrightarrow c$, ya que entonces por lógica se concluye que $a \Leftrightarrow c$.

$a \Leftrightarrow b$. Véase el teorema 5.5.1.

$b \Leftrightarrow c$. Se demostrará que si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A, entonces los espacios columna de A y de $[A \mid \mathbf{b}]$ son iguales en realidad, a partir de lo cual se concluirá que estas dos matrices tienen el mismo rango.

Por definición. el espacio columna de una matriz es el espacio generado por sus vectores columna, de modo que los espacios columna de A y de $[A \mid \mathbf{b}]$ se pueden expresar como

$$\text{Generado } \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\} \quad \text{y} \quad \text{generado } \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n, \mathbf{b}\}$$

respectivamente. Si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A, entonces cada vector en el conjunto $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n, \mathbf{b}\}$ es una combinación lineal de los vectores en $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ y recíprocamente (¿por qué?). Así, por el teorema 5.2.4, el espacio columna de A y el espacio columna de $[A \mid \mathbf{b}]$ son iguales.

$c \Leftrightarrow b$ Supóngase que A y $[A \mid \mathbf{b}]$ tienen el mismo rango r. Por el teorema 5.4.4, existe algún subconjunto de los vectores columna de A que forman una base para el espacio columna de A. Supóngase que estos vectores columna son

$$\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \ldots, \mathbf{c}'_r$$

Estos r vectores básicos también pertenecen al espacio columna de dimensión r de $[A \mid \mathbf{b}]$; por tanto, según el teorema 5.4.6*a*, también forman una base para el espacio columna de $[A \mid \mathbf{b}]$. Esto significa que $\mathbf{b}$ se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \ldots, \mathbf{c}'_r$, y, en consecuencia, $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A. ▯

No es difícil imaginar por qué este teorema es verdadero si el rango de una matriz se considera como el número de renglones diferentes de cero que hay en su forma escalonada reducida. Por ejemplo, la matriz aumentada del sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -4 \\ -3x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 7 \\ -3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 6x_4 &= -1 \end{aligned}$$

es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 7 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 4 & -3 & 7 \\ -3 & 6 & 9 & -6 & -1 \end{array}\right]$$

que tiene la siguiente forma escalonada reducida (comprobar):

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -23 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Debido al renglón

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

se observa que el sistema es inconsistente. Sin embargo, también es debido a este renglón que la forma escalonada reducida de la matriz aumentada tiene menos renglones cero que la forma escalonada reducida de la matriz de coeficientes. Esto hace que la matriz de coeficientes y la matriz aumentada del sistema tengan rangos distintos.

El teorema de consistencia trata sobre las condiciones en las cuales un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para un vector *específico* $\mathbf{b}$. El siguiente teorema tiene que ver con las condiciones en que un sistema lineal es consistente para *todas las elecciones posibles* de $\mathbf{b}$.

Teorema 5.6.6. *Si* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *es un sistema lineal de* m *ecuaciones con* n *incógnitas, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *es consistente para toda matriz* $\mathbf{b}$ $m \times 1$.
b) Los vectores columna de A *generan a* R^m.
c) $rango(A) = m$.

Demostración. Basta probar las equivalencias $a \Leftrightarrow b$ y $a \Leftrightarrow c$, ya que entonces por lógica se concluye que $b \Leftrightarrow c$.

$a \Leftrightarrow b$. Por la fórmula (2) de la sección 5.5, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede expresar como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b}$$

del cual se concluye que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $m \times 1$ si y sólo si $\mathbf{b}$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores columna $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ o, equivalentemente, si y sólo si estos vectores columna generan a R^m.

$a \Leftrightarrow c$ Por la hipótesis de que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $m \times 1$, y por los incisos *a)* y *b)* del teorema de consistencia (teorema 5.6.5), se concluye que todo vector $\mathbf{b}$ en R^m está en el espacio columna de A; es decir, el espacio columna de A es todo R^m. Así, rango$(A) = \dim(R^m) = m$.

$c \Leftrightarrow a$ Por la hipótesis de que rango$(A) = m$, se concluye que el espacio columna de A es un subespacio de R^m de dimensión m, y debido al inciso *b)* del teorema 5.4.7, debe ser todo R^m. Ahora, por los incisos *a)* y *b)* del teorema de consistencia (teorema 5.6.5) se concluye que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para todo vector $\mathbf{b}$ en R^m, ya que $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A. □

Se dice que un sistema lineal con más ecuaciones que incógnitas es un ***sistema lineal sobredeterminado***. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema lineal sobredeterminado de m ecuaciones con n incógnitas (de modo que $m > n$), entonces los vectores columna de A no pueden generar a R^m (¿por qué?); por el último teorema se concluye que *un sistema lineal sobredeterminado* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *no puede ser consistente para ningún* $\mathbf{b}$ *posible*.

Ejemplo 5 El sistema lineal

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 &= b_1 \\
x_1 - x_2 &= b_2 \\
x_1 + x_2 &= b_3 \\
x_1 + 2x_2 &= b_4 \\
x_1 + 3x_2 &= b_5
\end{aligned}$$

es sobredeterminado, de modo que no puede ser consistente para ninguno de los valores posibles de b_1, b_2, b_3, b_4 y b_5. La resolución del sistema lineal por eliminación de Gauss-Jordan da las condiciones exactas en que el sistema es consistente. Se deja para el lector demostrar que la forma escalonada reducida de la matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_2 + 2b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 4b_2 + 3b_1 \\ 0 & 0 & b_5 - 5b_2 + 4b_1 \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema es consistente si y sólo si b_1, b_2, b_3, b_4 y b_5 satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} 2b_1 - 3b_2 + b_3 \qquad\qquad &= 0 \\ 3b_1 - 4b_2 \qquad + b_4 \qquad &= 0 \\ 4b_1 - 5b_2 \qquad\qquad + b_5 &= 0 \end{aligned}$$

o bien, resolviendo este sistema lineal homogéneo,

$$b_1 = 5r - 4s, \qquad b_2 = 4r - 3s, \qquad b_3 = 2r - s, \qquad b_4 = r, \qquad b_5 = s$$

donde r y s son arbitrarios. Δ

En la fórmula (3) del teorema 5.5.2, los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son parámetros cualesquiera presentes en las soluciones generales de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Así, estos dos sistemas tienen el mismo número de parámetros en sus soluciones generales. Además, por el inciso *b*) del teorema 5.6.4 se concluye que el número de tales parámetros es nulidad(A). Este hecho y el teorema de la dimensión para matrices (teorema 5.6.3) conducen al siguiente teorema.

Teorema 5.6.7. *Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema lineal consistente de m ecuaciones con n incógnitas y si A tiene rango r, entonces la solución general del sistema contiene $n - r$ parámetros.*

Ejemplo 6 Si A es una matriz 5×7 con rango 4 y si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema lineal consistente, entonces la solución general del sistema contiene $7 - 4 = 3$ parámetros.

En secciones anteriores se obtuvo una amplia gama de condiciones en las que se garantiza que un sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de n ecuaciones con n incógnitas sólo tiene la solución trivial (véase el teorema 4.3.4.) Con el siguiente teorema se obtienen algunos resultados correspondientes para sistemas de ecuaciones de m ecuaciones con n incógnitas, donde m y n pueden ser diferentes.

Teorema 5.6.8. *Si A es una matriz $m \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*
a) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *sólo tiene la solución trivial.*
b) *Los vectores columna de A son linealmente independientes.*
c) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tiene cuando mucho una solución (ninguna o una) para toda matriz* $\mathbf{b}$ $m \times 1$.

Demostración. Basta probar las equivalencias $a \Leftrightarrow b$ y $a \Leftrightarrow c$, ya que entonces por lógica se concluye que $b \Leftrightarrow c$.

$a \Leftrightarrow b$. Si $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son los vectores columna de A, entonces el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se puede escribir como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{0} \tag{6}$$

Si $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son linealmente independientes, entonces la ecuación anterior se cumple sólo para $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, lo cual significa que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial. Recíprocamente, si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial, entonces (6) se cumple sólo para $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, lo cual significa que $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son linealmente independientes.

$a \Leftrightarrow c$. Supóngase que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente o no lo es. En caso de que no sea consistente, no existen soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y ya se ha terminado. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, sea $\mathbf{x}_0$ cualquier solución. Por la observación enunciada después del teorema 5.5.2 y el hecho de que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial, se concluye que la solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x}_0 + \mathbf{0} = \mathbf{x}_0$. Así, la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x}_0$.

$c \Leftrightarrow a$. Supóngase que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene cuando mucho una solución para toda matriz $\mathbf{b}$ $m \times 1$. Entonces, en particular $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene cuando mucho una solución. Así, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial. □

Un sistema lineal con más incógnitas que ecuaciones se denomina ***sistema lineal subdeterminado***. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema lineal subdeterminado consistente de m ecuaciones con n incógnitas (de modo que $m < n$), entonces por el teorema 5.6.7 se concluye que la solución general tiene por lo menos un parámetro (¿por qué?); por tanto, *un sistema lineal subdeterminado consistente debe tener infinidad de soluciones*. Además, si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es cualquier sistema lineal subdeterminado, entonces los vectores columna de A no pueden ser linealmente independientes (¿por qué?); por el teorema 5.6.3 se concluye que *para un sistema lineal subdeterminado* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *existe alguna* $\mathbf{b}$ *para la cual el sistema tiene infinidad de soluciones.*

OBSERVACIÓN. Por el teorema 5.6.3 también se concluye que un sistema lineal homogéneo subdeterminado tiene infinidad de soluciones; aunque este hecho ya se demostró en el capítulo 1 (teorema 1.2.1).

Ejemplo 7 Si A es una matriz 5×7, entonces para toda matriz $\mathbf{b}$ 7×1 el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es subdeterminado. Así, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ debe ser consistente para alguna $\mathbf{b}$, y para toda $\mathbf{b}$ así la solución general debe tener $7 - r$ parámetros, donde r es el rango de A. Δ

RESUMEN

En el teorema 4.3.4 se enumeraron ocho resultados que son equivalentes a la invertibilidad de una matriz A. Esta sección concluye agregando ocho resultados más a la lista, a fin de obtener el siguiente teorema que relaciona los temas principales que se han estudiado hasta el momento.

Teorema 5.6.9. *Si A es una matriz $n \times n$, y si $T_A: R^n \to R^n$ es la multiplicación por A, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *A es invertible.*
b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.*
c) *La forma escalonada reducida de A es I_n.*
d) *A se puede escribir como un producto de matrices elementales.*
e) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.*
f) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.*
g) *$\det(A) \neq 0$.*
h) *El rango de T_A es R^n.*
i) *T_A es uno a uno.*
j) *Los vectores columna de A son linealmente independientes.*
k) *Los vectores renglón de A son linealmente independientes.*
l) *Los vectores columna de A generan a R^n.*
m) *Los vectores renglón de A generan a R^n.*
n) *Los vectores columna de A forman una base para R^n.*
o) *Los vectores renglón de A forman una base para R^n.*
p) *El rango de A es n.*
q) *La nulidad de A es 0.*

Demostración. Por el teorema 4.3.4, se sabe que las proposiciones de la *a*) a la *i*) son equivalentes. Para completar la demostración se probará que las proposiciones de la *j*) a la *q*) son equivalentes a *b*), al demostrar la sucesión de implicaciones $b \Rightarrow j \Rightarrow k \Rightarrow l \Rightarrow m \Rightarrow n \Rightarrow o \Rightarrow p \Rightarrow q \Rightarrow b$.

$b \Rightarrow j$. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial, entonces por el teorema 5.6.8 los vectores columna de A son linealmente independientes.

$j \Rightarrow k \Rightarrow l \Rightarrow m \Rightarrow n \Rightarrow o$. Esto se concluye por el teorema 5.4.5 y el hecho de que R^n es un espacio vectorial de dimensión n. (Los detalles se dejan como ejercicio.)

$o \Rightarrow p$. Si los n vectores renglón de A forman una base para R^n, entonces el espacio renglón de A es de dimensión n y el rango de A es n.

$p \Rightarrow q$. Este hecho se concluye por el teorema de la dimensión (teorema 5.6.3).

$q \Rightarrow b$. Si la nulidad de A es 0, entonces el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene dimensión 0, lo cual significa que sólo contiene al vector cero. Por tanto, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial. □

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.6

1. Comprobar que rango(A) = rango(A^T).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Encontrar el rango y la nulidad de la matriz; luego, comprobar que los valores obtenidos satisfacen la fórmula (4) del teorema de la dimensión.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

3. En cada inciso del ejercicio (2), usar los resultados obtenidos para encontrar el número de variables principales y el número de parámetros que hay en la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sin resolver el sistema.

4. En cada inciso, usar la información que se proporciona en la tabla para encontrar la dimensión del espacio renglón de A, del espacio columna de A, del espacio nulo de A y del espacio nulo de A^T.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Tamaño de A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
Rango de A	3	2	1	2	2	0	2

5. En cada inciso, encontrar el valor máximo posible para el rango de A y el valor mínimo posible para la nulidad de A.
a) A es 4×4. b) A es 3×5. c) A es 5×3.

6. Si A es una matriz $m \times n$, ¿cuál es el valor máximo posible para su rango y cuál es el valor mínimo posible para su nulidad? [***Sugerencia.*** Ver el ejercicio 5.]

7. En cada inciso, usar la información que se proporciona en la tabla para determinar si el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente. En caso afirmativo, escribir el número de parámetros que hay en su solución general.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Tamaño de A	3×3	3×3	3×3	5×9	5×9	4×4	6×2
Rango de A	3	2	1	2	2	0	2
Rango de $[A \mid \mathbf{b}]$	3	3	1	2	3	0	2

8. Para cada una de las matrices del ejercicio 7, encontrar la nulidad de A y determinar el número de parámetros que hay en la solución general del sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

9. ¿Qué condiciones deben satisfacer b_1, b_2, b_3, b_4 y b_5 para que el sistema lineal sobredeterminado

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= b_1 \\ x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \\ x_1 - 4x_2 &= b_4 \\ x_1 + 5x_2 &= b_5 \end{aligned}$$

sea consistente?

10. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Demostrar que el rango de A es 2 si y sólo si uno o más de los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero.

11. Supóngase que A es una matriz 3×3 cuyo espacio nulo es una recta que pasa por el origen en el espacio tridimensional. ¿Es posible que el espacio renglón o el espacio columna de A también sea una recta que pasa por el origen? Explicar la respuesta.

12. Analizar cómo el rango de A varía con t.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{bmatrix}$

13. ¿Existen valores de r y s para los cuales el rango de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

sea uno o dos? En caso afirmativo, encontrar los valores.

14. Supóngase que A es una matriz 3×3 cuyo espacio columna es un plano que pasa por el origen en el espacio tridimensional. ¿Es posible que el espacio nulo sea un plano que pasa por el origen? ¿Es posible que el espacio renglón sea un plano que pasa por el origen? Explicar las respuestas.

15. a) Demostrar: Si A es una matriz 3×5, entonces los vectores columna de A son linealmente dependientes.
b) Demostrar: Si A es una matriz 5×3, entonces los vectores renglón de A son linealmente dependientes.

16. Demostrar: Si A es una matriz no cuadrada, entonces los vectores renglón de A o los vectores columna de A son linealmente dependientes. [***Sugerencia.*** Ver el ejercicio 15.]

17. Usar el resultado del ejercicio 10 para demostrar que el conjunto de puntos (x, y, z) en R^3 para el que la matriz

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & x & y \end{bmatrix}$$

tiene rango 1 es la curva con ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

18. Demostrar: Si $k \neq 0$, entonces A y kA tienen el mismo rango.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. En cada inciso, el espacio solución es un subespacio de R^3, por lo que debe ser una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, todo R^3 o sólo el origen. Para cada sistema, determinar cuál es el caso. Si el subespacio es un plano, encontrar una ecuación para él y si es una recta, encontrar las ecuaciones paramétricas.

a) $0x + 0y + 0z = 0$

b) $$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 6x - 9y + 3z &= 0 \\ -4x + 6y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x - 2y + 7z &= 0 \\ -4x + 8y + 5z &= 0 \\ 2x - 4y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x + 4y + 8z &= 0 \\ 2x + 5y + 6z &= 0 \\ 3x + y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

2. ¿Para qué valores de s el espacio solución de

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + sx_3 &= 0 \\ x_1 + sx_2 + x_3 &= 0 \\ sx_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, sólo el origen o todo R^3?

3. a) Expresar $(4a, a - b, a + 2b)$ como una combinación lineal de $(4, 1, 1)$ y $(0, -1, 2)$.
b) Expresar $(3a + b + 3c, -a + 4b - c, 2a + b + 2c)$ como una combinación lineal de $(3, -1, 2)$ y $(1, 4, 1)$.

c) Expresar $(2a - b + 4c, 3a - c, 4b + c)$ como una combinación lineal de tres vectores diferentes de cero.

4. Sea W el espacio generado por $\mathbf{f} = \text{sen } x$ y $\mathbf{g} = \cos x$.

a) Demostrar que para cualquier valor de θ, $\mathbf{f}_1 = \text{sen } (x + \theta)$ y $\mathbf{g}_1 = \cos (x + \theta)$ son vectores en W.

b) Demostrar que $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{g}_1$ forman una base para W.

5. a) Expresar $\mathbf{v} = (1, 1)$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1)$ en dos formas distintas.

b) Demostrar que el resultado del inciso anterior no viola el teorema 5.4.1.

6. Sea A una matriz $n \times n$, y sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores linealmente independientes en R^n expresados como matrices $n \times 1$. ¿Qué debe cumplir A a fin de que $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n$ sean linealmente independientes?

7. ¿Una base para P_n debe contener un polinomio de grado k para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n$? Justificar la respuesta.

8. Para efectos de este problema, una "matriz en tablero de ajedrez" se definirá como una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ es par} \\ 0 & \text{si } i + j \text{ es impar} \end{cases}$$

Encontrar el rango y la nulidad de las siguientes matrices en tablero de ajedrez:
La matriz 3×3. b) La matriz 4×4. c) La matriz $n \times n$.

9. Para efectos de este ejercicio, una "matriz en X" se definirá como una matriz cuadrada con un número impar de renglones y de columnas que contiene ceros en todas partes, excepto en las dos diagonales, donde tiene unos. Encontrar el rango y la nulidad de las siguientes matrices en X

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) la matriz X de tamaño $(2n + 1) \times (2n + 1)$

10. En cada inciso, demostrar que el conjunto de polinomios es un subespacio de P_n y encontrar una base para éste.

a) Todos los polinomios en P_n tales que $p(-x) = p(x)$.

b) Todos los polinomios en P_n tales que $p(0) = 0$.

11. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo.)*** Demostrar que el conjunto de todos los polinomios en P_n que tienen una tangente horizontal en $x = 0$ es un subespacio de P_n. Encontrar una base para este subespacio.

12. En álgebra lineal avanzada se demuestra el siguiente criterio de determinante para el rango: *El rango de una matriz A es r si y sólo si A contiene alguna submatriz $r \times r$ con determinante diferente de cero y todas las submatrices cuadradas de tamaño su-*

perior tienen determinante igual a cero. (Una submatriz de A es cualquier matriz que se obtiene al eliminar renglones o columnas de A. La matriz A en sí también se considera como una submatriz de A.) En cada inciso, aplicar este criterio para encontrar el rango de la matriz.

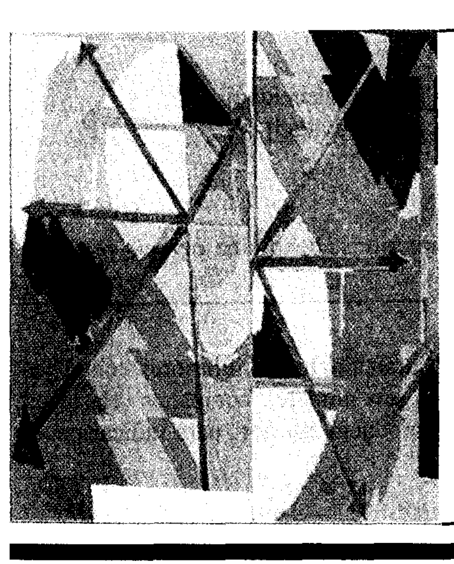
a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

13. Usando el resultado del ejercicio 12, encontrar los rangos posibles para las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{bmatrix}$$

14. Demostrar: Si S es una base para un espacio vectorial V, entonces para cualesquiera vectores **u** y **v** en V y cualquier escalar k se cumplen las siguientes relaciones:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (\mathbf{u})_S + (\mathbf{v})_S$. b) $(k\mathbf{u})_S = k(\mathbf{u})_S$.



CAPÍTULO 6

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR

6.1 PRODUCTOS INTERIORES

En la sección 4.1 se definió el producto interior euclidiano sobre R^n y se usó para extender los conceptos de longitud y distancia al espacio euclidiano n dimensional. En esta sección se usarán como axiomas las propiedades más importantes del producto interior euclidiano para definir el concepto general de producto interior; luego se demostrará cómo los productos interiores se pueden utilizar para definir las ideas de longitud y distancia en espacios vectoriales diferentes a R^n.

PRODUCTOS INTERIORES GENERALES

En la sección 4.1, el producto interior euclidiano de dos vectores en R^n se denotó por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. En esta sección será conveniente introducir la otra notación $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ para denotar este producto interior. Con esta notación, las propiedades fundamentales del producto interior euclidiano enumeradas en el teorema 4.1.2 son precisamente los axiomas de la siguiente definición.

Definición. Un ***producto interior*** sobre un espacio vectorial real V es una función que asocia un número real $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ a cada pareja de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V de forma que los siguientes axiomas se cumplen para los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y los escalares k.

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ [Axioma de simetría]
(2) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ [Axioma de aditividad]

(3) $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ [Axioma de homogeneidad]
(4) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \geq 0$ [Axioma de positividad]
donde $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$
si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Un espacio vectorial real con un producto interior se denomina ***espacio real con producto interior***.

OBSERVACIÓN. En el capítulo 10 se estudiarán productos interiores complejos; es decir, productos interiores cuyos valores son números complejos. Hasta ese momento se usará la expresión "espacio con producto interior" para indicar que se trata de un "espacio real con producto interior".

Debido a que los axiomas del producto interior se basan en las propiedades del producto interior euclidiano, éste satisface de forma automática los axiomas; este es el contenido del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son vectores en R^n, entonces la fórmula

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

define a $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ como el producto interior euclidiano sobre R^n. Los cuatro axiomas del producto interior se cumplen debido al teorema 4.1.2. Δ

El producto interior euclidiano es el producto interior más importante sobre R^n. Sin embargo, existen varias aplicaciones en las que resulta conveniente modificar el producto interior euclidiano *ponderando* sus términos de manera diferente. En pocas palabras, si

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

son números reales *positivos*, que se denominarán ***pesos***, y si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son vectores en R^n, entonces se puede demostrar (ejercicio 26) que la fórmula

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n} \qquad (1)$$

define un producto interior sobre R^n; se denomina ***producto interior euclidiano ponderado con pesos $w_1, w_2, \ldots, w_n$***.

Para ver una forma en que puede surgir un producto interior euclidiano ponderado, supóngase que en algún experimento físico puede obtenerse cualquiera de n valores numéricos

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

y que m repeticiones del experimento producen estos valores con varias frecuencias; es decir, x_1 ocurre f_1 veces, x_2 ocurre f_2 veces, etc. Como en total hay m repeticiones del experimento,

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = m$$

Así, el ***promedio aritmético*** o la ***media*** de los valores numéricos observados (que se denota por $\bar{x}$) es

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{1}{m}(f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n) \tag{2}$$

Si se hace

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (f_1, f_2, \ldots, f_n) \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_1 &= w_2 = \cdots = w_n = 1/m \end{aligned}$$

entonces (2) se puede expresar como el producto interior ponderado

$$\bar{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle = w_1f_1x_1 + w_2f_2x_2 + \cdots + w_nf_nx_n$$

OBSERVACIÓN. Siempre se supondrá que R^n tiene el producto interior euclidiano, a menos de que explícitamente se especifique que tiene algún otro producto interior. Como se definió en la sección 4.1, R^n con el producto interior euclidiano se denomina *espacio euclidiano n dimensional.*

Ejemplo 2 Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vectores en R^2. Comprobar que el producto interior euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

satisface los cuatro axiomas de producto interior.

Solución. Primero, obsérvese que si en esta ecuación se intercambian $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, el miembro derecho permanece igual. Por consiguiente,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

Si $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

con lo que se establece el segundo axioma.

Luego,

$$\begin{aligned}\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 \\ &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\ &= k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\end{aligned}$$

con lo que se establece el tercer axioma.

Finalmente,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 3v_1v_1 + 2v_2v_2 = 3v_1^2 + 2v_2^2$$

Resulta evidente que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2\ 0$. Además, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$ si y sólo si $v_1 = v_2 = 0$, es decir, si y sólo si $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \mathbf{0}$. Así, se cumple el cuarto axioma. Δ

LONGITUD Y DISTANCIA EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR

Antes de analizar más ejemplos de productos interiores, se hará una pausa y se explicará cómo se usan los productos interiores para introducir los conceptos de longitud y distancia en espacios con producto interior. Recuérdese que en el espacio euclidiano n dimensional la longitud euclidiana de un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ se puede expresar en términos del producto interior euclidiano como

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^{1/2}$$

y la distancia euclidiana entre dos puntos cualesquiera $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se puede expresar como

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = [(\mathbf{u} - \mathbf{v})\cdot(\mathbf{u} - \mathbf{v})]^{1/2}$$

[Véanse las fórmulas (1) y (2) de la sección 4.1.] Tomando como motivación estas fórmulas, se hace la siguiente definición.

> **Definición.** Si V es un espacio con producto interior, entonces la ***norma*** (o ***longitud***) de un vector $\|\mathbf{u}\|$ en V se denota por $\mathbf{u}$ y se define como
>
> $$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle^{1/2}$$
>
> La ***distancia*** entre dos puntos (vectores) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se denota por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ y se define como
>
> $$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Ejemplo 3 Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son vectores en R^3 con el producto interior euclidiano, entonces

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle^{1/2} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

y

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{1/2} = [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})]^{1/2}$$
$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Obsérvese que las expresiones anteriores son simplemente las fórmulas estándar para la norma y la distancia euclidianas que se analizaron en la sección 4.1 [véanse las fórmulas (1) y (2) de esa sección.] Δ

Ejemplo 4 Es importante tener en mente que la norma y la distancia dependen del producto interior que se esté usando. Si se cambia el producto interior, entonces también cambian las normas y las distancias entre vectores. Por ejemplo, para los vectores $\mathbf{u} = (1, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 1)$ en R^2 con el producto interior euclidiano se tiene

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

y

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Sin embargo, si se cambia al producto interior euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

entonces se obtiene

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = [3(1)(1) + 2(0)(0)]^{1/2} = \sqrt{3}$$

y

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle (1, -1), (1, -1) \rangle^{1/2}$$
$$= [3(1)(1) + 2(-1)(-1)]^{1/2} = \sqrt{5} \quad \Delta$$

CIRCUNFERENCIAS Y ESFERAS UNITARIAS EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR

Si V es un espacio con producto interior, entonces el conjunto de puntos en V que satisfacen

$$\|\mathbf{u}\| = 1$$

se denomina ***esfera unitaria*** o algunas veces ***circunferencia unitaria*** en V. En R^2 y R^3, estos son los puntos cuya distancia al origen es igual a 1.

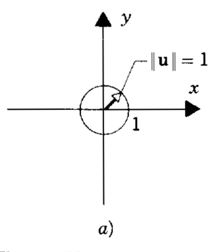
Ejemplo 5

a) Trazar la circunferencia unitaria en un sistema de coordenadas xy en R^2 usando el producto interior euclidiano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$.
b) Trazar la circunferencia unitaria en un sistema de coordenadas xyz en R^3 usando el producto interior euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{9} u_1v_1 + \frac{1}{4} u_2v_2$.

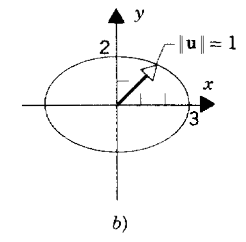
Solución de a). Si $\mathbf{u} = (x, y)$, entonces $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, de modo que la ecuación de la circunferencia unitaria es $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ o bien, elevando al cuadrado ambos miembros,

$$x^2 + y^2 = 1$$

Como se esperaba, la gráfica de esta ecuación es una circunferencia de radio 1 con centro en el origen (figura 1*a*).



a)



b)

Figura 1 Circunferencia unitaria con norma euclidiana $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ | Circunferencia unitaria con norma $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2}$

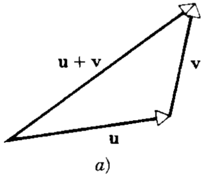
Solución de b). Si $\mathbf{u} = (x, y)$, entonces $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2}$, de modo que la ecuación de la circunferencia unitaria es $\sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2} = 1$ o bien, elevando al cuadrado ambos miembros,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

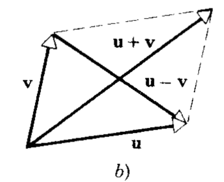
La gráfica de esta ecuación es la elipse que se muestra en la figura 1*b*. Δ

Sería razonable que el lector se sienta incómodo con los resultados obtenidos en el último ejemplo. Aun cuando las definiciones de longitud y distancia se reducen a las definiciones estándar cuando se aplican a R^2 con el producto interior euclidiano, es necesario recurrir a la imaginación para pensar que la "circunferencia" unitaria tiene forma elíptica. Sin embargo, aunque los productos interiores no estándar distorsionan los espacios conocidos y conducen a valores extraños de longitudes y distancias, muchos de los teoremas básicos de la geometría euclidiana aún son válidos en estos espacios poco comunes. Por ejemplo, es un hecho básico de la geometría euclidiana es que la suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo es por lo menos tan grande como la longitud del tercer lado (figura 2*a*). Después se verá que este resultado se cumple en todos los espacios con producto interior, sin importar cuán poco común pueda ser el producto interior. Como otro ejemplo, recuérdese el teorema de la geometría euclidiana que establece que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados (figura 2*b*). Este resultado también es válido en

todos los espacios con producto interior, sin importar cuál sea el producto interior (ejercicio 20).



a)



b)

Figura 2 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ $\qquad$ $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$

PRODUCTOS INTERIORES GENERADOS POR MATRICES

El producto interior euclidiano y el producto interior euclidiano ponderado son casos especiales de una clase general de productos interiores sobre R^n, que se describirán a continuación. Sean

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

vectores en R^n (expresados como matrices $n \times 1$), y sea A una matriz *invertible* $n \times n$. Se puede demostrar (ejercicio 30) que si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es el producto interior euclidiano sobre R^n, entonces la fórmula

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}} \tag{3}$$

define un producto interior; se llama ***producto interior sobre R^n generado por A***.

Si se recuerda que el producto interior euclidiano $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ puede escribirse como el producto matricial $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$ [véase (7) en la sección 4.1], se concluye que otra forma de escribir (3) es

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (A\mathbf{v})^T A\mathbf{u}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T A^T A\mathbf{u}} \tag{4}$$

Ejemplo 6 El producto interior sobre R^n generado por la matriz identidad $n \times n$ es el producto interior euclidiano, ya que al sustituir $A = I$ en (3) se obtiene

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = I\mathbf{u} \cdot I\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

El producto interior euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ que se analizó en el ejemplo 2 es el producto interior sobre R^2 generado por

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

debido a que al sustituir esta matriz en (4) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \end{aligned}$$

En general, el producto interior euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n$$

es el producto interior sobre R^n generado por

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \tag{5}$$

(comprobar). Δ

En los siguientes ejemplos se describirán algunos productos interiores sobre espacios vectoriales diferentes a R^n.

Ejemplo 7 Si

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

son dos matrices cualesquiera 2×2, entonces la siguiente fórmula define un producto interior sobre M_{22} (comprobarlo):

$$\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

Por ejemplo, si

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\langle U, V \rangle = 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) = 16$$

La norma de una matriz U con respecto a este producto interior es

$$\|U\| = \langle U, U\rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

y la esfera unitaria en este espacio consta de todas las matrices U 2×2 cuyos elementos satisfacen la ecuación $\|U\| = 1$, que cuando se eleva al cuadrado queda como

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1 \quad \Delta$$

Ejemplo 8 Si

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 \qquad \text{and} \qquad \mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

son dos vectores cualesquiera en P_2, entonces la siguiente fórmula define un producto interior sobre P_2 (comprobar):

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

La norma del polinomio $\mathbf{p}$ con respecto a este producto interior es

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle^{1/2} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}$$

y la esfera unitaria en este espacio consta de todos los polinomios $\mathbf{p}$ en P_2 cuyos coeficientes satisfacen la ecuación $\|\mathbf{p}\| = 1$, que elevada al cuadrado queda como

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1 \quad \Delta$$

Ejemplo 9 (***Para quienes ya estudiaron Cálculo***). Sean $\mathbf{f} = f(x)$ y $\mathbf{g} = g(x)$ dos funciones continuas en $C\,[a, b]$, y se define

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{6}$$

Se demostrará que esta fórmula define un producto interior sobre $C\,[a, b]$ al comprobar los cuatro axiomas de producto interior para las funciones $\mathbf{f} = f(x)$, $\mathbf{g} = g(x)$ y $\mathbf{s} = s(x)$ en $C\,[a, b]$:

(1) $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f}\rangle$

lo cual demuestra que se cumple el axioma 1.

(2) $$\begin{aligned}\langle \mathbf{f} + \mathbf{g}, \mathbf{s}\rangle &= \int_a^b (f(x) + g(x))s(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)s(x)\,dx + \int_a^b g(x)s(x)\,dx \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{s}\rangle + \langle \mathbf{g}, \mathbf{s}\rangle\end{aligned}$$

esto demuestra que el axioma 2 es válido.

(3) $\langle k\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_a^b kf(x)g(x)\,dx = k\int_a^b f(x)g(x)\,dx = k\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$

con lo que queda demostrado que se cumple el axioma 3.

(4) Si $\mathbf{f} = f(x)$ es cualquier función en $C\,[a, b]$, entonces $f^2(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$; por consiguiente,

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$$

Además, debido a que $f^2(x) \geq 0$ y $\mathbf{f} = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, se concluye que $\int_a^b f^2(x)dx =$ si y sólo si $f(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$. Por tanto, se tiene que $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle = \int_a^b f^2(x)dx = 0$ si y sólo si $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Así se demuestra que se cumple el axioma 4. Δ

Ejemplo 10 ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Si $C\,[a, b]$ tiene el producto interior definido en el ejemplo precedente, entonces la norma de una función $\mathbf{f} = f(x)$ con respecto a este producto interior es

$$\|\mathbf{f}\| = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle^{1/2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \tag{7}$$

y la esfera unitaria en este espacio consta de todas las funciones $\mathbf{f}$ en $C\,[a, b]$ que satisfacen la ecuación $\|\mathbf{f}\| = 1$, que cuando se eleva al cuadrado queda como

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 1 \quad \Delta$$

OBSERVACIÓN. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Como los polinomios son funciones continuas sobre $(-\infty, \infty)$ entonces son continuas sobre cualquier intervalo cerrado $[a, b]$. Así, para todos estos intervalos el espacio vectorial P_n es un subespacio de $C\,[a, b]$, y la fórmula (6) define un producto interior sobre P_n.

OBSERVACIÓN. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Recordar que en Cálculo la longitud de arco de una curva $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ está definida por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \tag{8}$$

Este concepto de longitud de arco no se debe confundir con $\|\mathbf{f}\|$, que es la longitud (norma) de $\mathbf{f}$ cuando $\mathbf{f}$ se considera como un vector en $C\,[a, b]$. Las fórmulas (7) y (8) son bastante diferentes.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS PRODUCTOS INTERIORES

En el siguiente teorema se enumeran algunas propiedades algebraicas básicas de los productos interiores.

> **Teorema 6.1.1.** *Si* **u**, **v** *y* **w** *son vectores en un espacio real con producto interior y k es cualquier escalar, entonces*:
>
> *a*) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0}\rangle = 0$
> *b*) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$
> *c*) $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v}\rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$
> *d*) $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$
> *e*) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$

Demostración. Se demostrará el inciso *b*) y la demostración de los demás incisos se deja como ejercicio.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\rangle &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle && \text{[Por simetría]} \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle && \text{[Por aditividad]} \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle && \text{[Por simetría]} \quad \square
\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo ilustra cómo se pueden usar el teorema 6.1.1 y las propiedades que definen los productos interiores para efectuar cálculos algebraicos con éstos. A medida que se estudie el ejemplo, será instructivo que el lector justifique los pasos.

Ejemplo 11

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u} - 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}\rangle &= \langle \mathbf{u}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}\rangle - \langle 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, 3\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, 4\mathbf{v}\rangle - \langle 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u}\rangle - \langle 2\mathbf{v}, 4\mathbf{v}\rangle \\
&= 3\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - 6\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - 8\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\
&= 3\|\mathbf{u}\|^2 + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - 6\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - 8\|\mathbf{v}\|^2 \\
&= 3\|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - 8\|\mathbf{v}\|^2 \quad \Delta
\end{aligned}$$

Como el teorema 6.1.1 es un resultado general, se tiene la garantía de que se cumple para *todos* los espacios reales con producto interior. Este es el verdadero poder del desarrollo axiomático de los espacios vectoriales y los productos interiores: un sólo teorema demuestra una multitud de resultados de una vez. Por ejemplo, sin necesidad de ninguna demostración adicional se tiene la garantía de que las cinco propiedades dadas en el teorema 6.1.1 son verdaderas para el producto interior sobre R^n generado por cualquier matriz A [fórmula (3)]. Por ejemplo, para este producto interior se comprobará el inciso b) del teorema 6.1.1:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\rangle &= (\mathbf{v} + \mathbf{w})^T A^T A\mathbf{u} \\
&= (\mathbf{v}^T + \mathbf{w}^T) A^T A\mathbf{u} && \text{[Propiedad de la transpuesta]} \\
&= (\mathbf{v}^T A^T A\mathbf{u}) + (\mathbf{w}^T A^T A\mathbf{u}) && \text{[Propiedad de la multiplicación de matrices]} \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle
\end{aligned}$$

Será instructivo para el lector comprobar los demás incisos del teorema 6.1.1 para este producto interior.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.1

1. Sea $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ el producto interior euclidiano sobre R^2, y sean $\mathbf{u} = (3, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 5)$, $\mathbf{w} = (-1, 6)$ y $k = -4$. Encontrar
   a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$ b) $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ (c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$
   d) $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v}\rangle$ e) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0}\rangle = 0$

2. Repetir el ejercicio 1 para el producto interior euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2$.

3. Calcular $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ usando el producto interior del ejemplo 7.
   a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

4. Calcular $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle$ usando el producto interior del ejemplo 8.
   a) $\mathbf{p} = -2 + x + 3x^2$, $\mathbf{q} = 4 - 7x^2$ b) $\mathbf{p} = -5 + 2x + x^2$, $\mathbf{q} = 3 + 2x - 4x^2$

5. a) Usando la fórmula (7), demostrar que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 9u_1v_1 + 4u_2v_2$ es el producto interior sobre R^2 generado por
   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
   b) Con el producto interior del inciso a), calcular $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ si $\mathbf{u} = (-3, 2)$ y $\mathbf{v} = (1, 7)$.

6. a) Usar la fórmula (3), para demostrar que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 10u_2v_2$ es el producto interior sobre R^2 generado por
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
   b) Usando el producto interior del inciso a), calcular $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ si $\mathbf{u} = (0, -3)$ y $\mathbf{v} = (6, 2)$.

7. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. En cada inciso, la expresión dada es un producto interior sobre R^2. Encontrar una matriz que lo genere.
   a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$ b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 4u_1v_1 + 6u_2v_2$

8. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Comprobando que se cumplen los axiomas de producto interior, demostrar que las siguientes expresiones definen productos interiores sobre R^2.
   a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$ b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$

9. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son productos interiores sobre R^3. Para las que no lo sean, enumerar los axiomas que no se cumplen.

a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$ b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$
c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$ d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

10. En cada inciso, usando el producto interior sobre R^2, encontrar $\|\mathbf{w}\|$ donde $\mathbf{w} = (-1, 3)$.
a) El producto interior euclidiano.
b) El producto interior euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$, donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.
c) El producto interior generado por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Con los productos interiores del ejercicio 10, hallar $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ para $\mathbf{u} = (-1, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, 5)$.

12. Sea P_2 con el producto interior del ejemplo 8. En cada inciso, determinar $\|\mathbf{p}\|$.
a) $\mathbf{p} = -2 + 3x + 2x^2$ b) $\mathbf{p} = 4 - 3x^2$

13. Sea M_{22} con el producto interior del ejemplo 7. En cada inciso, encontrar $\|A\|$.

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. Sea P_2 con el producto interior del ejemplo 8. Hallar $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

$$\mathbf{p} = 3 - x + x^2, \qquad \mathbf{q} = 2 + 5x^2$$

15. Sea M_{22} con el producto interior del ejemplo 7. Encontrar $d(A, B)$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

16. Supóngase que **u**, **v** y **w** son vectores tales que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -3, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 5, \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \|\mathbf{v}\| = 2, \quad \|\mathbf{w}\| = 7$$

Evaluar la expresión dada.
a) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle$ b) $\langle 2\mathbf{v} - \mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{w} \rangle$ c) $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} - 2\mathbf{w}, 4\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle$
d) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ e) $\|2\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$ f) $\|\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 4\mathbf{w}\|$

17. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea el espacio vectorial P_2 con el producto interior

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx$$

a) Determinar $\|\mathbf{p}\|$ para $\mathbf{p} = 1$, $\mathbf{p} = x$ y $\mathbf{p} = x^2$. b) Encontrar $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ si $\mathbf{p} = 1$ y $\mathbf{q} = x$.

18. Trazar la circunferencia unitaria en R^2 usando el producto interior dado.
a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4}u_1v_1 + \frac{1}{16}u_2v_2$ b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2$

19. Encontrar un producto interior euclidiano ponderado sobre R^2 para el cual la circunferencia unitaria sea la elipse que se muestra en la figura 3.

Figura 3

20. Demostrar que la siguiente identidad se cumple para vectores en cualquier espacio con producto interior.

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

21. Demostrar que la siguiente identidad se cumple para vectores en cualquier espacio con producto interior.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

22. Sea $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ y $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$.

Demostrar que $\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$ *no* es un producto interior sobre M_{22}.

23. Sean $\mathbf{p} = p(x)$ y $\mathbf{q} = q(x)$ polinomios en P_2. Demostrar que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p(0)q(0) + p(\tfrac{1}{2})q(\tfrac{1}{2}) + p(1)q(1)$$

es un producto interior sobre P_2.

24. Demostrar: Si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ es un producto interior euclidiano sobre R^n y si A es una matriz $n \times n$, entonces

$$\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle A^T\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

[***Sugerencia.*** Usar el hecho de que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$.]

25. Comprobar el resultado del ejercicio 24 para el producto interior euclidiano sobre R^3 y

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

26. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Demostrar que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n$$

es un producto interior sobre R^n si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son números reales positivos.

27. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Usando el producto interior

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

calcular $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ para los vectores $\mathbf{p} = p(x)$ y $\mathbf{q} = q(x)$ en P_3.

a) $\mathbf{p} = 1 - x + x^2 + 5x^3$ $\quad \mathbf{q} = x - 3x^2$

b) $\mathbf{p} = x - 5x^3$ $\quad \mathbf{q} = 2 + 8x^2$

28. **(*Para quienes ya estudiaron Cálculo*).** En cada inciso, usar el producto interior

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

para calcular $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ de los vectores $\mathbf{f} = f(x)$ y $\mathbf{g} = g(x)$ en $C\,[0, 1]$.

a) $\mathbf{f} = \cos 2\pi x, \quad \mathbf{g} = \operatorname{sen} 2\pi x$ b) $\mathbf{f} = x, \quad \mathbf{g} = e^x$ c) $\mathbf{f} = \tan \frac{\pi}{4} x, \quad \mathbf{g} = 1$

29. Demostrar que el producto interior del ejemplo 7 se puede escribir como $\langle U, V \rangle = \operatorname{tr}(U^T V)$.

30. Demostrar que la fórmula (3) define un producto interior sobre R^n. [***Sugerencia.*** Usar la otra versión de la fórmula (3), definida por (4).]

31. Demostrar que la matriz (5) genera el producto interior euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n$ sobre R^n.

32. Demostrar los incisos *a*) y *d*) del teorema 6.1.1.

33. Demostrar los incisos *c*) y *e*) del teorema 6.1.1.

6.2 ÁNGULO Y ORTOGONALIDAD EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR

En esta sección se definirá el concepto de ángulo entre dos vectores en un espacio con producto interior, y esta idea se usará para obtener algunas relaciones básicas entre vectores en un espacio con producto interior, incluyendo una relación geométrica fundamental entre el espacio nulo y el espacio columna de una matriz.

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Recuérdese por la fórmula (1) de la sección 3.3 que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores diferentes de cero en R^2 o en R^3 y θ es el ángulo entre estos vectores, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos \theta \tag{1}$$

o bien, de otra manera,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \tag{2}$$

En el primer objetivo de esta sección es definir el concepto de ángulo entre dos vectores en un espacio general con producto interior. Para que la definición sea razonable, sería bueno que fuese consistente con la fórmula (2) cuando se aplique al caso especial de R^2 y R^3 con el producto interior euclidiano. Así, se quiere que la definición del ángulo θ entre dos vectores diferentes de cero en un espacio con producto interior cumpla la relación

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \tag{3}$$

Sin embargo, debido a que $|\cos\theta| \leq 1$, no hay ninguna posibilidad de que (3) se cumpla, a menos de que se tenga la certeza de que toda pareja de vectores diferentes de cero en un espacio con producto interior satisface la desigualdad

$$\left|\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1$$

Afortunadamente será posible demostrar que así es, usando la siguiente generalización del la desigualdad de Cauchy-Schwarz (véase el teorema 4.1.3).

Teorema 6.2.1. ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*** *Si* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son vectores en un espacio real con producto interior, entonces*

$$\boxed{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \tag{4}$$

Demostración. *De* antemano se advierte a lector que la demostración aquí presentada depende de una argucia sutil que no es fácil motivar. Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0$, de modo que los dos miembros de (4) son iguales. Supóngase ahora que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Sean $a = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle$, $b = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, $c = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ y sea t cualquier número real. Por el axioma de positividad, el producto interior de cualquier vector consigo mismo siempre es positivo. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle (t\mathbf{u} + \mathbf{v}), (t\mathbf{u} + \mathbf{v})\rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &= at^2 + bt + c \end{aligned}$$

Esta desigualdad indica que el polinomio cuadrático $at^2 + bt + c$ no tiene raíces reales o tiene una raíz real repetida. En consecuencia, su discriminante debe satisfacer la desigualdad $b^2 - 4ac \leq 0$. Expresando los coeficientes a, b y c en términos de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se obtiene $4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \leq 0$ o bien, de manera equivalente,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle.$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros y aplicando el hecho de que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ son no negativos se obtiene

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle^{1/2}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{1/2}$$

o bien, de manera equivalente,

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

con lo que se completa la demostración. □

Para referencia, se observa que la desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede escribir de otras dos formas:

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} \qquad (5)$$

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2} \qquad (6)$$

La primera de estas fórmulas se obtuvo en la demostración del teorema 6.2.1, y la segunda se obtiene de la primera aplicando el hecho de que $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle$ y $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$.

Ejemplo 1 La desigualdad de Cauchy-Schwarz para R^n (teorema 4.1.3) se concluye como un caso especial del teorema 6.2.1 tomando a $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ como el producto interior euclidiano $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Δ

PROPIEDADES DE LA LONGITUD Y LA DISTANCIA EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR

Los dos teoremas siguientes demuestran que las propiedades básicas de la longitud y la distancia establecidas en los teoremas 4.1.4 y 4.1.5 para vectores en el espacio euclidiano n dimensional son válidas en espacios generales con producto interior. Este hecho es una evidencia de que las definiciones de producto interior, longitud y distancia están bien elegidas.

Teorema 6.2.2. *Si* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son vectores en un espacio* V *con producto interior y si* k *es cualquier escalar, entonces:*

a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
b) $\|\mathbf{u}\| = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
c) $\|k\mathbf{u}\| = |k|\,\|\mathbf{u}\|$
d) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (*Desigualdad del triángulo*)

Teorema 6.2.3. *Si* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ *son vectores en un espacio* V *con producto interior y si* k *es cualquier escalar, entonces:*

a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (*Desigualdad del triángulo*)

Se demostrará el inciso *d*) del teorema 6.2.2 y la demostración de los demás incisos de este teorema, así como la demostración del teorema 6.2.3, se dejan como ejercicio.

Demostración del teorema 6.2.2*d*. Por definición,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&\leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle && \text{[Propiedad del valor absoluto]} \\
&\leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle && \text{[Por (4)]} \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
\end{aligned}$$

Extrayendo raíz cuadrada se obtiene

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \square$$

ÁNGULO ENTRE VECTORES

A continuación se mostrará cómo se puede usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para definir ángulos en espacios generales con producto interior. Supóngase que **u** y **v** son vectores diferentes de cero en un espacio V con producto interior. Si ambos miembros de la fórmula (6) se dividen entre $\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$, se obtiene

$$\left[\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right]^2 \leq 1$$

o bien, de manera equivalente,

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1 \tag{7}$$

Luego, si θ es un ángulo cuya medida en radianes varía de 0 a π, entonces cos θ asume todos los valores entre -1 y 1 (inclusive) exactamente una vez (figura 1).

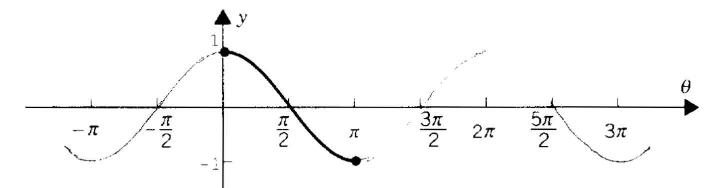


Figura 1

Así, por (7) existe un ángulo θ único tal que

$$\boxed{\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi} \tag{8}$$

Se define a θ como el ***ángulo entre* u *y* v**. Obsérvese que en R^2 o en R^3 con el producto interior euclidiano, la expresión (8) concuerda con la fórmula usual para el coseno del ángulo entre dos vectores diferentes de cero fórmula (2).

Ejemplo 2 Sea R^4 con el producto interior euclidiano. Encontrar el coseno del ángulo θ entre los vectores $\mathbf{u} = (4, 3, 1, -2)$ y $\mathbf{v} = (-2, 1, 2, 3)$.

Solución. Se deja para el lector comprobar que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30}, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{18}, \qquad \text{y} \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -9$$

de modo que

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = -\frac{9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} = -\frac{3}{2\sqrt{15}} \quad \Delta$$

ORTOGONALIDAD

El ejemplo 2 es en esencia un ejercicio matemático, ya que hay relativamente poca necesidad de encontrar ángulos entre vectores, excepto en R^2 o en R^3 con el producto interior euclidiano. Sin embargo, un problema de importancia capital en todos los espacios con producto interior es determinar si dos vectores son *ortogonales*; es decir, si el ángulo entre ellos es $\theta = \pi/2$.

Por (8) se concluye que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores *diferentes de cero* en un espacio con producto interior y θ es el ángulo entre ellos, entonces $\cos\theta = 0$ si y sólo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. De manera equivalente, para vectores diferentes de cero se tiene $\theta = \pi/2$ si y sólo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Si por acuerdo se considera el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como $\pi/2$ cuando uno de los vectores es $\mathbf{0}$ o ambos vectores son $\mathbf{0}$, entonces se puede afirmar sin excepción que el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/2$ si y sólo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Este hecho sugiere la siguiente definición.

Definición. Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en un espacio con producto interior se denominan ***ortogonales*** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Obsérvese que en el caso especial en que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es el producto interior euclidiano sobre R^n, la definición anterior se reduce a la definición de ortogonalidad en el espacio euclidiano n dimensional proporcionada en la sección 4.1. También se hace notar que la ortogonalidad depende del producto interior; dos vectores pueden ser ortogonales con respecto a un producto interior pero pueden no serlo con respecto a otro.

Ejemplo 3 Si M_{22} tiene el producto interior del ejemplo 7 de la sección precedente, entonces las matrices

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

son ortogonales, ya que

$$\langle U, V \rangle = 1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0) = 0 \quad \Delta$$

Ejemplo 4 (***Para quienes ya estudiaron Cálculo***). Sea P_2 con el producto interior

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

y sea

$$\mathbf{p} = x, \qquad \mathbf{q} = x^2$$

Entonces

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} xx\,dx \right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2\,dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|\mathbf{q}\| = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2x^2\,dx \right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^4\,dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} xx^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

Debido a que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$, los vectores $\mathbf{p} = x$ y $\mathbf{q} = x^2$ son ortogonales con respecto al producto interior dado. Δ

En la sección 4.1 se demostró el teorema de Pitágoras para vectores en el espacio euclidiano de dimensión n. El siguiente teorema amplía este resultado a vectores en cualquier espacio con producto interior.

Teorema 6.2.4. (*Teorema de Pitágoras generalizado*). *Si* **u** y **v** *son vectores ortogonales en un espacio con producto interior, entonces*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Demostración. La ortogonalidad de **u** y **v** indica que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 5 (*Para quienes ya estudiaron Cálculo*). En el ejemplo 4 se demostró que $\mathbf{p} = x$ y $\mathbf{q} = x^2$ son ortogonales con respecto al producto interior

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

sobre P_2. Por el teorema de Pitágoras se concluye que

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$$

Así, por los cálculos en el ejemplo 4 se tiene

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{5}} \right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

Este resultado se puede comprobar por integración directa:

$$\|\mathbf{p}+\mathbf{q}\|^2 = \langle \mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}+\mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} (x+x^2)(x+x^2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2\,dx + 2\int_{-1}^{1} x^3\,dx + \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{5} = \frac{16}{15} \quad \Delta$$

COMPLEMENTOS ORTOGONALES

Si V es un plano que pasa por el origen de R^3 con el producto interior euclidiano, entonces el conjunto de todos los vectores que son ortogonales a cada vector en V forman la recta L que pasa por el origen y es perpendicular a V (figura 2). En términos de álgebra lineal, se dice que la recta y el plano son *complementos ortogonales* entre sí. La siguiente definición amplía este concepto a espacios generales con producto interior.

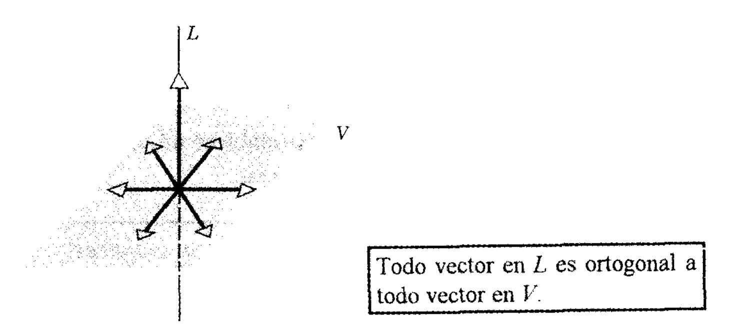


Figura 2

> **Definición.** Sea W un subespacio de un espacio V con producto interior. Se dice que un vector $\mathbf{u}$ en V es ***ortogonal a W*** si es ortogonal a todo vector en W, y el conjunto de todos los vectores en V que son ortogonales a W se denomina ***complemento ortogonal de W***.

Recuérdese que en geometría el símbolo $\perp$ se usa para indicar perpendicularidad. En álgebra lineal, el complemento ortogonal de un subespacio W se denota por $W^{\perp}$(que se lee como "W perpendicular"). En el siguiente teorema se enumeran las propiedades básicas de los complementos ortogonales.

> **Teorema 6.2.5.** *Si W es un subespacio de un espacio V de dimensión finita con producto interior, entonces*
>
> *a)* *$W^{\perp}$ es un subespacio de V.*
> *b)* *El único vector común a W* y *$W^{\perp}$ es* $\mathbf{0}$.
> *c)* *El complemento ortogonal de $W^{\perp}$ es W; es decir, $(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

Se demostrará el inciso *a*), y la demostración de los demás incisos se deja como ejercicio.

Demostración de a). Primero obsérvese que $\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{w}$ en W, de modo que $W^{\perp}$ contiene por lo menos al vector cero. Se quiere demostrar que $W^{\perp}$ es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar; es decir, se quiere demostrar que la suma de dos vectores en $W^{\perp}$ es ortogonal a todo vector en W y que cualquier múltiplo escalar de un vector en $W^{\perp}$ es ortogonal a todo vector en W. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores cualesquiera en $W^{\perp}$, sea k cualquier escalar y sea $\mathbf{w}$ cualquier vector en W. Entonces por la definición de $W^{\perp}$ se tiene $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. Usando las propiedades básicas del producto interior se tiene

$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 + 0 = 0$$
$$\langle k\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = k(0) = 0$$

lo cual demuestra que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $k\mathbf{u}$ están en $W^{\perp}$. □

OBSERVACIÓN. Debido a que por el inciso *c*) del teorema precedente W y $W^{\perp}$ son complementos ortogonales entre sí, se dirá que W y $W^{\perp}$ son ***complementos ortogonales***.

RELACIÓN GEOMÉTRICA ENTRE EL ESPACIO NULO Y EL ESPACIO RENGLÓN

El siguiente teorema fundamental establece un vínculo geométrico entre el espacio nulo y el espacio renglón de una matriz.

Teorema 6.2.6. *Si A es una matriz $m \times n$, entonces:*

a) *El espacio nulo de A y el espacio renglón de A son complementos ortogonales en R^n con respecto al producto interior euclidiano.*
b) *El espacio nulo de A^T y el espacio columna de A son complementos ortogonales en R^m con respecto al producto interior euclidiano.*

Demostración de a). Se desea demostrar que el complemento ortogonal del espacio renglón de A es el espacio nulo de A. Para lograr esto es necesario demostrar que si un vector $\mathbf{v}$ es ortogonal a todo vector en el espacio renglón, entonces $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y, recíprocamente, si $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a todo vector en el espacio renglón.

Supóngase primero que $\mathbf{v}$ es ortogonal a todo vector en el espacio renglón de A. Entonces, en particular $\mathbf{v}$ es ortogonal a los vectores renglón $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ de A; es decir

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v} = \cdots = \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{9}$$

Pero por la fórmula (11) de la sección 4.1, el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se puede expresar en notación de producto punto como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

de modo que por (9), **v** es una solución de este sistema y, por tanto, está en el espacio nulo de A.

Recíprocamente, supóngase que **v** es un vector en el espacio nulo de A, de modo que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Por (10) se concluye que

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v} = \cdots = \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{v} = 0$$

Pero si **r** es cualquier vector en el espacio renglón de A, entonces **r** se puede expresar como una combinación lineal de los vectores renglón de A, por ejemplo

$$\mathbf{r} = c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_n\mathbf{r}_n$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= (c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_n\mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{v} \\ &= c_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v}) + \cdots + c_n(\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{v}) \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0 \end{aligned}$$

con lo cual se demuestra que **v** es ortogonal a todo vector en el espacio renglón de A.

Demostración de b). Como el espacio columna de A es el espacio renglón de A^T (excepto por alguna diferencia en la notación), esta demostración se concluye al aplicar el resultado del inciso *a*) a A^T. □

El ejemplo siguiente muestra cómo se puede usar el teorema 6.2.6 a fin de encontrar una base para el complemento ortogonal de un subespacio del espacio euclidiano de dimensión n o n dimensional.

Ejemplo 6 Sea W el subespacio de R^5 generado por los vectores

$$\mathbf{w}_1 = (2, 2, -1, 0, 1), \qquad \mathbf{w}_2 = (-1, -1, 2, -3, 1),$$
$$\mathbf{w}_3 = (1, 1, -2, 0, -1), \qquad \mathbf{w}_4 = (0, 0, 1, 1, 1)$$

Encontrar una base para el complemento ortogonal de W.

Solución. El espacio W generado por $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ y $\mathbf{w}_4$ es el mismo que el espacio renglón de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y, por el inciso *a*) del teorema 6.2.6, el espacio nulo de A es el complemento ortogonal de W. En el ejemplo 4 de la sección 5.5 se demostró que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base para este espacio nulo. Expresando estos vectores en la misma notación que $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ y $\mathbf{w}_4$ se concluye que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$$

forman una base para el complemento ortogonal de W. Como comprobación, calculando los productos punto necesarios, el lector puede verificar que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ y $\mathbf{w}_4$. Δ

Teorema 6.2.7. *Si A es una matriz $n \times n$, y si $T_A : R^n \to R^n$ es la multiplicación por A, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *A es invertible.*
b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.*
c) *La forma escalonada reducida de A es I_n.*
d) *A se puede escribir como un producto de matrices elementales.*
e) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.*
f) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.*
g) *$det(_A) \neq 0$.*
h) *El rango de T_A es R^n.*
i) *T_A es uno a uno.*
j) *Los vectores columna de A son linealmente independientes.*
k) *Los vectores renglón de A son linealmente independientes.*
l) *Los vectores columna de A generan a R^n.*
m) *Los vectores renglón de A generan a R^n.*
n) *Los vectores columna de A forman una base para R^n.*
o) *Los vectores renglón de A forman una base para R^n.*
p) *El rango de A es n.*
q) *La nulidad de A es 0.*
r) *El complemento ortogonal del espacio nulo de A es R^n.*
s) *El complemento ortogonal del espacio renglón de A es $\{\mathbf{0}\}$.*

Este teorema relaciona todos los temas principales estudiados hasta el momento.

RESUMEN

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que en cualquier espacio V con producto interior, el espacio cero $\{\mathbf{0}\}$ y todo el espacio V son complementos ortogonales. Entonces, si A es una matriz $n \times n$, afirmar que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial es equivalente a decir que el complemento ortogonal del espacio nulo de A es todo R^n o, de manera equivalente, que el espacio renglón de A es todo R^n. Este hecho permite agregar dos nuevos resultados a los 17 resultados mencionados en el teorema 5.6.9.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.2

1. En cada inciso, determinar si los vectores dados son ortogonales con respecto al producto interior euclidiano.

a) $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 2, -1)$
b) $\mathbf{u} = (-2, -2, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
c) $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$
d) $\mathbf{u} = (-4, 6, -10, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2, 9)$
e) $\mathbf{u} = (0, 3, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (5, 2, -1, 0)$
f) $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (-b, a)$

2. Sea R^4 con el producto interior euclidiano, y sea $\mathbf{u} = (-1, 1, 0, 2)$. Determinar si el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal al conjunto de vectores $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, donde $\mathbf{w}_1 = (0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{w}_2 = (1, -1, 3,)$ y $\mathbf{w}_3 = (4, 0, 9, 2)$.

3. Sean R^2, R^3 y R^4 con el producto interior euclidiano. En cada inciso, hallar el coseno del ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

a) $\mathbf{u} = (1, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 4)$
b) $\mathbf{u} = (-1, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 8)$
c) $\mathbf{u} = (-1, 5, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 4, -9)$
d) $\mathbf{u} = (4, 1, 8)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$
e) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$
f) $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1)$, $\mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

4. Sea P_2 con el producto interior del ejemplo 8 en la sección 6.1. Encontrar el coseno del ángulo entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.

a) $\mathbf{p} = -1 + 5x + 2x^2$, $\mathbf{q} = 2 + 4x - 9x^2$
b) $\mathbf{p} = x - x^2$, $\mathbf{q} = 7 + 3x + 3x^2$

5. Demostrar que $\mathbf{p} = 1 - x + 2x^2$ y $\mathbf{q} = 2x + x^2$ son ortogonales con respecto al producto interior del ejercicio 4.

6. Sea M_{22} con el producto interior del ejemplo 7 en la sección 6.1. Encontrar el coseno del ángulo entre A y B.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

7. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes matrices son ortogonales a A con respecto al producto interior del ejercicio 6?

a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

8. Sea R^3 con el producto interior euclidiano. ¿Para qué valores de k son ortogonales **u** y **v**?
a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$ b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$

9. Sea R^4 con el producto interior euclidiano. Encontrar dos vectores de norma 1 que sean ortogonales a los tres vectores $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$ y $\mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$.

10. En cada inciso, con el producto interior euclidiano comprobar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple para los vectores dados.
a) $\mathbf{u} = (3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, -1)$ b) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$
c) $\mathbf{u} = (-4, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (8, -4, -2)$ d) $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$

11. En cada inciso, comprobar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple para los vectores dados.
a) $\mathbf{u} = (-2, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, 0)$, usando el producto interior del ejemplo 2 en la sección 6.1.
b) $U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ y $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
usando el producto interior del ejemplo 7 en la sección 6.1.
c) $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$ y $\mathbf{q} = 2 - 4x^2$ usando el producto interior dado en el ejemplo 8 de la sección 6.1.

12. Sea W la recta en R^2 cuya ecuación es $y = 2x$. Encontrar una ecuación para $W^{\perp}$.

13. a) Sea W el plano en R^3 cuya ecuación es $x - 2y - 3z = 0$. Encontrar las ecuaciones paramétricas para $W^{\perp}$.
b) Sea W la recta en R^3 con ecuaciones paramétricas

$$x = 2t, \quad y = -5t, \quad z = 4t \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Determinar una ecuación para $W^{\perp}$.

14. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar bases para el espacio renglón y el espacio nulo de A.
b) Comprobar que todo vector en el espacio renglón es ortogonal a todo vector en el espacio nulo (como garantiza el teorema 6.2.6*a*).

15. Sea A la matrizl ejercicio 14.
a) Encontrar bases para el espacio columna de A y el espacio nulo de A^{T}
b) Comprobar que todo vector en el espacio columna de A es ortogonal a todo vector en el espacio nulo de A^{T} (como garantiza el teorema 6.2.6*b*).

16. Encontrar una base para el complemento ortogonal del subespacio de R^n generado por los vectores
a) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (5, -4, -4)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -6, 2)$
b) $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 0, -2)$
c) $\mathbf{v}_1 = (1, 4, 5, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 2, 2)$
d) $\mathbf{v}_1 = (1, 4, 5, 6, 9)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -2, 1, 4, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, -1, -2, -1)$, $\mathbf{v}_4 = (2, 3, 5, 7, 8)$

17. Sea V un espacio con producto interior. Demostrar que si **u** y **v** son vectores ortogonales en V tales que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$, entonces $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

18. Sea V un espacio con producto interior. Demostrar que si **w** es ortogonal tanto a $\mathbf{u}_1$ como a $\mathbf{u}_2$, entonces es ortogonal a $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2$ para todos los escalares k_1 y k_2. Interpretar geométricamente este resultado para el caso en que V es R^3 con el producto interior euclidiano.

19. Sea V un espacio con producto interior. Demostrar que si **w** es ortogonal a cada uno de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$, entonces es ortogonal a todo vector en lin $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$.

20. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ una base para un espacio V con producto interior. Demostrar que el vector cero es el único vector en V que es ortogonal a todos los vectores básicos.

21. Sea $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ una base para un subespacio W de V. Demostrar que $W^{\perp}$ consta de todos los vectores en V que son ortogonales a todos los vectores básicos.

22. Demostrar la siguiente generalización del teorema 6.2.4. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son vectores ortogonales por parejas en un espacio V con producto interior, entonces

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_r\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_r\|^2$$

23. Demostrar los siguientes incisos del teorema 6.2.2:
a) Inciso *a*). b) Inciso *b*). c) Inciso *c*).

24. Demostrar los siguientes incisos del teorema 6.2.3:
a) Inciso *a*). b) Inciso *b*). c) Inciso *c*). d) Inciso *d*).

25. Demostrar el inciso *b*) del teorema 6.2.5.

26. Demostrar: Si **u** y **v** son matrices $n \times 1$ y A es una matriz invertible $n \times n$, entonces

$$[\mathbf{v}^T A^T A \mathbf{u}]^2 \leq (\mathbf{u}^T A^T A \mathbf{u})(\mathbf{v}^T A^T A \mathbf{v})$$

27. Por medio de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, demostrar que para todos los valores reales de a, b y θ,

$$[a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta]^2 \leq a^2 + b^2$$

28. Demostrar: Si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son números reales positivos y si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son dos vectores cualesquiera en R^n, entonces

$$|w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n| \leq (w_1u_1^2 + w_2u_2^2 + \cdots + w_nu_n^2)^{1/2}(w_1v_1^2 + w_2v_2^2 + \cdots + w_nv_n^2)^{1/2}$$

29. Demostrar que la igualdad se cumple en la desigualdad de Cauchy-Schwarz si y sólo si **u** y **v** son linealmente dependientes.

30. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea $C\,[0, \pi]$ con el producto interior

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

y sea $\mathbf{f}_n = \cos nx$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Demostrar que si $k \neq l$, entonces $\mathbf{f}_k$ y $\mathbf{f}_l$ son ortogonales con respecto al producto interior dado.

31. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas sobre $[0, 1]$. Demostrar:

a) $$\left[\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leq \left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]\left[\int_0^1 g^2(x)\,dx\right]$$

b) $$\left[\int_0^1 [\,f(x) + g(x)\,]^2\,dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]^{1/2} + \left[\int_0^1 g^2(x)\,dx\right]^{1/2}$$

[***Sugerencia.*** Usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.]

32. Mediante métodos vectoriales, demostrar que el triángulo inscrito en una circunferencia, de modo que uno de sus lados es el diámetro de la circunferencia, debe ser un triángulo rectángulo. [***Sugerencia.*** Expresar los vectores AB y BC de la figura 3 en términos de **u** y **v**.]

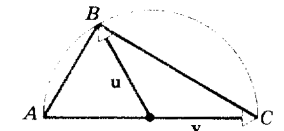


Figura 3

33. Con respecto al producto interior euclidiano, la norma de los vectores $\mathbf{u} = (1, \sqrt{3})$ y $\mathbf{v} = (-1, 3)$ es igual a 2, y el ángulo entre **u** y **v** mide 60° (figura 4). Encontrar un producto interior euclidiano ponderado con respecto al cual **u** y **v** sean vectores unitarios ortogonales.

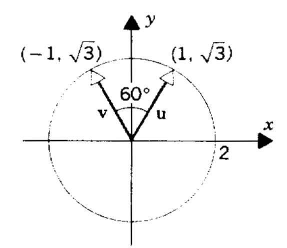


Figura 4

6.3 BASES ORTONORMALES; PROCESO DE GRAM-SCHMIDT; DESCOMPOSICIÓN *QR*

En muchos problemas con espacios vectoriales, quien resuelve el problema puede elegir cualquier base que juzgue pertinente para el espacio vectorial. En espacios con producto interior, la solución de un problema a menudo se simplifica bastante al elegir una base en la que los vectores sean ortogonales entre sí. En esta sección se mostrará cómo es posible obtener las bases.

BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES

Definición. Un conjunto de vectores en un espacio con producto interior se denomina ***conjunto ortogonal*** si todas las parejas de vectores distintos en el conjunto son ortogonales. Un conjunto ortogonal en el que cada vector tiene norma 1 se denomina ***conjunto ortonormal***.

Ejemplo 1 Sean

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1), \qquad \mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$$

y supóngase que R^3 tiene el producto interior euclidiano. Se concluye que el conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es ortogonal, ya que $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\rangle = 0$. Δ

Si $\mathbf{v}$ es un vector no nulo en un espacio con producto interior, entonces por el inciso *c*) del teorema 6.2.2 el vector

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

tiene norma 1, ya que

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right| \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

El proceso de multiplicar un vector $\mathbf{v}$ diferente de cero por el recíproco de su longitud para obtener un vector de norma 1 se denomina ***normalización*** de $\mathbf{v}$. Un conjunto ortogonal de vectores *no nulos* siempre se puede convertir en un conjunto ortonormal al normalizar cada uno de sus vectores.

Ejemplo 2 Las normas euclidianas de los vectores en el ejemplo 1 son

$$\|\mathbf{u}_1\| = 1, \qquad \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}, \qquad \|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{2}$$

En consecuencia, al normalizar $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

El lector debe comprobar que el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es ortonormal, al demostrar que

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$$
$$\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1 \quad \Delta$$

En un espacio con producto interior, una base que consta de vectores ortonormales se denomina ***base ortonormal***, y una base que consta de vectores ortogonales se denomina ***base ortogonal***. Un ejemplo conocido de una base ortonormal es la base estándar para R^3 con el producto interior euclidiano:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Esta es la base asociada con los sistemas de coordenadas rectangulares (figura 4 de la sección 5.4). En términos más generales, en R^n con el producto interior euclidiano, la base estándar

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

es ortonormal.

COORDENADAS RELATIVAS A BASES ORTONORMALES

El interés de encontrar bases ortonormales para espacios con producto interior es motivada en parte por el siguiente teorema, que muestra cuán excepcionalmente sencillo es expresar un vector en términos de una base ortonormal.

Teorema 6.3.1. *Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ortonormal para un espacio V con producto interior y si* **u** *es cualquier vector en V, entonces*

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Demostración. Como $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base, un vector **u** se puede expresar como

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

La demostración se completará probando que $k_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Para todo vector $\mathbf{v}_i$ en S se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i\rangle &= \langle k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i\rangle \\ &= k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i\rangle + k_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i\rangle\end{aligned}$$

Como $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto ortonormal, se tiene

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\rangle = 0 \qquad \text{if } j \neq i$$

Por consiguiente, la expresión anterior para $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i\rangle$ se simplifica a

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i\rangle = k_i \quad \square$$

Usando la terminología y la notación presentadas en la sección 5.4, los escalares

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle, \ldots, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n\rangle$$

en el teorema 6.3.1 son las coordenadas de $\mathbf{u}$ con respecto a la base ortonormal $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle, \ldots, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n\rangle)$$

es el vector de coordenadas de $\mathbf{u}$ con respecto a esta base.

Ejemplo 3 Sean

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{v}_2 = (-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}), \qquad \mathbf{v}_3 = (\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5})$$

Es fácil comprobar que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base ortonormal para R^3 con el producto interior euclidiano. Expresar el vector $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ como una combinación lineal de los vectores en S y hallar el vector de coordenadas $(\mathbf{u})_S$.

Solución.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle = 1, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle = -\tfrac{1}{5}, \qquad \text{y} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3\rangle = \tfrac{7}{5}$$

Por consiguiente, debido al teorema 6.3.1, se tiene

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{5}\mathbf{v}_2 + \tfrac{7}{5}\mathbf{v}_3$$

es decir,

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \tfrac{1}{5}(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}) + \tfrac{7}{5}(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5})$$

El vector de coordenadas de $\mathbf{u}$ con respecto a S es

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3\rangle) = (1, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{7}{5}) \quad \Delta$$

OBSERVACIÓN. La utilidad del teorema 6.3.1 debe resultar evidente a partir de este ejemplo si se considera que para bases no ortonormales suele ser necesario resolver un sistema de ecuaciones a fin de expresar un vector en términos de la base.

Las bases ortonormales para espacios con producto interior son convenientes porque, como se muestra en el siguiente teorema, muchas fórmulas conocidas se cumplen para esas bases.

Teorema 6.3.2. *Si S es una base ortonormal para un espacio n dimensional con producto interior, y si*

$$(\mathbf{u})_S = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad y \qquad (\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

entonces:

a) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$

La demostración se deja para los ejercicios.

OBSERVACIÓN. Nótese que el miembro derecho de la igualdad en el inciso *a*) es la norma del vector de coordenadas $(\mathbf{u})_S$ con respecto al producto interior euclidiano sobre R^n, y que el miembro derecho de la igualdad en el inciso *c*) es el producto interior euclidiano de $(\mathbf{u})_S$ y $(\mathbf{v})_S$. Así, trabajando con bases ortonormales, el cálculo de normas y productos interiores generales se puede reducir al cálculo de normas y productos interiores euclidianos de los vectores de coordenadas.

Ejemplo 4 Si R^3 tiene el producto interior euclidiano, entonces la norma del vector $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ es

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Sin embargo, si se hace que R^3 tenga la base ortonormal S del ejemplo anterior, entonces por ese ejemplo se sabe que el vector de coordenadas de $\mathbf{u}$ con respecto a S es

$$(\mathbf{u})_S = (1, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{7}{5})$$

La norma de $\mathbf{u}$ también se puede calcular a partir de este vector usando el inciso *a*) del teorema 6.3.2. Así, se obtiene

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + (-\tfrac{1}{5})^2 + (\tfrac{7}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{75}{25}} = \sqrt{3} \quad \Delta$$

COORDENADAS RELATIVAS A BASES ORTOGONALES

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base *ortogonal* para un espacio vectorial V, entonces al normalizar cada uno de sus vectores se obtiene la base ortonormal

$$S' = \left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, \ldots, \frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|} \right\}$$

Así, si **u** es cualquier vector en V, por el teorema 6.3.1 se concluye que

$$\mathbf{u} = \left\langle \mathbf{u}, \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \right\rangle \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} + \left\langle \mathbf{u}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \right\rangle \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} + \cdots + \left\langle \mathbf{u}, \frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|} \right\rangle \frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|}$$

que, debido al inciso *c*) del teorema 6.1.1 se puede volver a escribir como

$$\boxed{\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n} \tag{1}$$

Esta fórmula expresa **u** como una combinación lineal de los vectores en la base ortogonal S. En los ejercicios se dan algunos problemas que requieren el empleo de esta fórmula.

Es evidente que si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son tres vectores diferentes de cero mutuamente perpendiculares en R^3, entonces ninguno de los vectores está en el mismo plano que los otros dos; es decir, los vectores son linealmente independientes. El siguiente teorema generaliza este resultado.

Teorema 6.3.3. *Si* $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *es un conjunto ortogonal de vectores no nulos en un espacio con producto interior, entonces* S *es linealmente independiente.*

Demostración. Supóngase que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{2}$$

Para demostrar que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente, es necesario probar que $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.

Para todo $\mathbf{v}_i$ en S, por (2) se concluye que

$$\langle k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

o, de manera equivalente,

$$k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + k_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

Por la ortogonalidad de S se concluye que $<\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i> = 0$ cuando $j \neq i$, de modo que esta ecuación se reduce a

$$k_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

Como se supone que los vectores en S son diferentes de cero, entonces $<\langle_i, \mathbf{v}_i\rangle \neq 0$ por el axioma de positividad en la definición de producto interior. Por consiguiente, $k_i = 0$. Como el subíndice i es arbitrario, se tiene $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$; así, S es linealmente independiente. □

Ejemplo 5 En el ejemplo 2 se demostró que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

forman un conjunto ortonormal con respecto al producto interior euclidiano sobre R^3. Por el teorema 6.3.3, estos vectores forman un conjunto linealmente independiente, y como R^3 es tridimensional, entonces por el teorema 5.4.6*a* se tiene que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base ortonormal para R^3. Δ

PROYECCIONES ORTOGONALES

A continuación se desarrollarán algunos resultados que serán de utilidad para obtener bases ortogonales y bases ortonormales para espacios con producto interior.

En R^2 o R^3 con el producto interior euclidiano, geométricamente resulta obvio que si W es una recta o un plano que pasa por el origen, entonces todo vector $\mathbf{u}$ en el espacio se puede expresar como una suma

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

donde $\mathbf{w}_1$ está en W y $\mathbf{w}_2$ es perpendicular a W (figura 1). Este resultado es un caso especial del siguiente teorema general cuya demostración se da a final de esta sección.

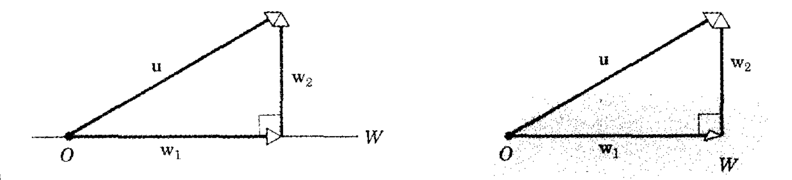


Figura 1

> **Teorema 6.3.4.** (***Teorema de proyección***). *Si W es un subespacio de dimensión finita en un espacio V con producto interior, entonces todo vector* $\mathbf{u}$ *en V se puede expresar de manera única como*
>
> $$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \tag{3}$$
>
> *donde $\mathbf{w}_1$ está en W y $\mathbf{w}_2$ está en $W^{\perp}$.*

El vector $\mathbf{w}_1$ en el teorema precedente se denomina ***proyección ortogonal de*** $\mathbf{u}$ ***sobre*** W y se denota por $\text{proy}_W\,\mathbf{u}$. El vector $\mathbf{w}_2$ se denomina ***componente de*** $\mathbf{u}$ ***ortogonal a*** W y se denota por $\text{proy}_{W^\perp}\,\mathbf{u}$. Así, la fórmula (3) en el teorema de proyección se puede expresar como

$$\mathbf{u} = \text{proy}_W\,\mathbf{u} + \text{proy}_{W^\perp}\,\mathbf{u} \tag{4}$$

Como $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$, se concluye que

$$\text{proy}_{W^\perp}\,\mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proy}_W\,\mathbf{u}$$

de modo que la fórmula (4) también se puede escribir como

$$\mathbf{u} = \text{proy}_W \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u}) \tag{5}$$

(figura 2).

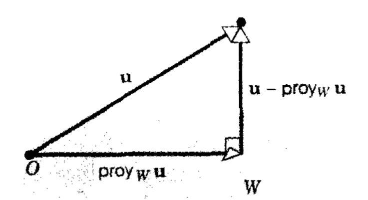


Figura 2

El siguiente teorema, cuya demostración se pide en los ejercicios, proporciona fórmulas para calcular proyecciones ortogonales.

Teorema 6.3.5. *Sea W un subespacio de dimensión finita en un espacio V con producto interior.*

a) *Si* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *es una base ortonormal para W y* **u** *es cualquier vector en V, entonces*

$$\boxed{\text{proy}_W \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r} \tag{6}$$

b) *Si* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *es una base ortogonal para W y* **u** *es cualquier vector en V, entonces*

$$\boxed{\text{proy}_W \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r} \tag{7}$$

Ejemplo 6 Sea R^3 con el producto interior euclidiano, y sea W el subespacio generado por los vectores ortonormales $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$. Por (6), la proyección ortogonal de $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ sobre W es

$$\begin{aligned}\text{proy}_W \mathbf{u} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \\ &= (1)(0, 1, 0) + (-\tfrac{1}{5})(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}) \\ &= (\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25})\end{aligned}$$

La componente de **u** ortogonal a W es

$$\text{proy}_{W^\perp} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proy}_W \mathbf{u} = (1, 1, 1) - (\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25}) = (\tfrac{21}{25}, 0, \tfrac{28}{25})$$

Obsérvese que $\text{proy}_{W^\perp} \mathbf{u}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{v}_1$ como a $\mathbf{v}_2$, de modo que este vector es ortogonal a todo vector en el espacio W generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, como debe ser. Δ

DETERMINACIÓN DE BASES ORTOGONALES Y BASES ORTONORMALES

Se ha visto que las bases ortonormales poseen varias propiedades útiles. El siguiente teorema, que es el resultado principal de esta sección, muestra que todo espacio vectorial no nulo y de dimensión finita tiene una base ortonormal. La demostración de este resultado es muy importante, ya que proporciona un algoritmo, o método, para convertir una base arbitraria en una base ortonormal.

Teorema 6.3.6. *Todo espacio no nulo de dimensión finita con producto interior tiene una base ortonormal.*

Demostración. Sea V cualquier espacio no nulo de dimensión finita con producto interior, y sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ cualquier base de V. Basta demostrar que V tiene una base ortogonal, ya que los vectores en la base ortogonal se pueden normalizar a fin de obtener una base ortonormal para V. La siguiente serie de pasos produce una base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para V.

Paso 1. Sea $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

Paso 2. Como se ilustra en la figura 3, se puede obtener un vector $\mathbf{v}_2$ que sea ortogonal a $\mathbf{v}_1$ calculando la componente de $\mathbf{u}_2$ que sea ortogonal al espacio W_1 generado por $\mathbf{v}_1$. Se aplica la fórmula (7):

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proy}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

Por supuesto, si $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}_2$ no es un vector básico. Pero ésto no puede suceder, ya que por la fórmula precedente para $\mathbf{v}_2$ se concluiría que

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1$$

la cual establece que $\mathbf{u}_2$ es un múltiplo de $\mathbf{u}_1$, contradiciendo la independencia lineal de la base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Paso 3. Para obtener un vector $\mathbf{v}_3$ que sea ortogonal tanto a $\mathbf{v}_1$ como a $\mathbf{v}_2$, se calcula la componente de $\mathbf{u}_3$ ortogonal al espacio W_2 generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (figura 4). Por (7),

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

Como en el paso 2, la independencia lineal de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ asegura que $\mathbf{v}_3 \neq 0$. Los detalles se dejan como ejercicio.

Paso 4. Para determinar un vector $\mathbf{v}_4$ que sea ortogonal a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, se calcula la componente de $\mathbf{u}_4$ ortogonal al espacio W_3 generado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Por (7),

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \text{proy}_{W_3}\, \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$$

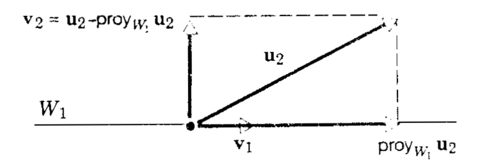


Figura 3

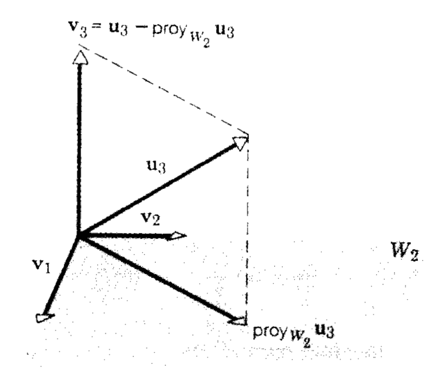


Figura 4

Continuando de esta manera, después de n pasos se obtiene un conjunto ortogonal de vectores, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Como la dimensión de V es n y todo conjunto ortogonal es linealmente independiente, el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ortogonal para V. □

La construcción precedente paso a paso para convertir una base cualesquiera en una base ortogonal se denomina ***proceso de Gram-Schmidt****(página 376).

Ejemplo 7 Considérese el espacio vectorial R^3 con el producto interior euclidiano. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt para transformar los vectores básicos $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)$ y $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$ en una base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$; luego, normalizar los vectores básicos ortogonales para obtener una base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$.

Solución.

Paso 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$

Paso 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proy}_{W_1}\, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

$$= (0, 1, 1) - \tfrac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

Paso 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2}\,\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$$= (0, 0, 1) - \tfrac{1}{3}(1, 1, 1) = \frac{1/3}{2/3}\left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

$$= \left(0, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

Así,

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \qquad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

forma una base ortogonal para R^3. Las normas de estos vectores son

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \qquad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \qquad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de modo que una base ortonormal para R^3 es

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \; \Delta$$

****Jörgen Pederson Gram* (1850-1916)** fue un actuario danés. Recibió su primera instrucción en escuelas públicas, complementada con tutores particulares. Después de terminar el bachillerato obtuvo la maestría en matemáticas con especialización en álgebra moderna, que estaba en pleno desarrollo. Gram trabajó después como actuario para la Hafnia Life Insurance Company, donde desarrolló los cimientos matemáticos de los seguros contra accidente para la compañía Skjold. Fue miembro de la junta directiva de Hafnia y dirigió la compañía Skjold hasta 1910, cuando se convirtió en director de la Danish Insurance Board. Durante el tiempo que trabajó como actuario obtuvo el Doctorado en Filosofía con base en su tesis "On Series Development Utilizing the Least Squares Method". Fue en esta tesis que planteó por primera vez sus contribuciones al proceso de Gram-Schmidt. Gram terminó por interesarse en teoría abstracta de números y fue galardonado con la medalla de oro concedida por la Royal Danish Society of Sciences and Letters debido a sus investigaciones en ese campo. Sin embargo, durante toda su vida también mantuvo un interés sobre la interacción entre las matemáticas teóricas y las matemáticas aplicadas, cuyo resultado fueron cuatro tratados sobre administración de bosques daneses. Gram falleció una tarde en un choque en bicicleta cuando se dirigía a una reunión de la Royal Danish Society.

****Erhardt Schmidt* (1876-1959)** fue un matemático alemán. En 1905 Schmidt recibió su grado de doctor en la universidad de Gotinga, donde estudió bajo la asesoría de uno de los grandes matemáticos; David Hilbert. En 1917 decidió ir a dar clases en la Universidad de Berlín, ciudad en la que permaneció por el resto de su vida. Schmidt realizó importantes contribuciones a varios campos matemáticos, pero es más conocido por haber agrupado muchas de las ideas dispersas de Hilbert en un concepto general (denominado espacio de Hilbert), que es fundamental en el estudio de espacios vectoriales de dimensión infinita. Schmidt describió por primera vez el proceso que lleva su nombre en un artículo sobre ecuaciones integrales publicado en 1907.

OBSERVACIÓN. En el ejemplo precedente se usó el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal; luego, una vez que se obtuvo la base ortogonal, se normalizó para obtener una base ortonormal. De otra manera, es posible normalizar cada vector básico de la base ortogonal en cuanto se obtiene generando, así, paso a paso la base ortonormal. Sin embargo, este método presenta la ligera desventaja de producir más raíces cuadradas que manejar.

El proceso de Gram-Schmidt con normalización ulterior no sólo convierte una base cualesquiera $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ en una base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$, sino que también lo hace de modo que para $k \geq 2$ se cumplan las siguientes relaciones:

- $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_k\}$ es una base ortonormal para el espacio generado por $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.
- $\mathbf{q}_k$ es ortogonal a $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}\}$.

Se omiten las demostraciones, pero estos hechos deben ser evidentes después de un análisis profundo de la demostración del teorema 6.3.6.

DESCOMPOSICIÓN *QR*

Se plantea el siguiente problema.

Problema. Si A es una matriz $m \times n$ con vectores columna linealmente independientes, y si Q es la matriz con vectores columna ortonormales que se obtienen al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a los vectores columna de A, ¿qué relación, en caso de haber alguna, existe entre A y Q?

Para resolver este problema, supóngase que los vectores columna de A son $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, y que los vectores columna ortonormales de Q son $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$; así,

$$A = [\,\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n\,] \qquad \text{y} \qquad Q = [\,\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_n\,]$$

Por el teorema 6.3.1 se concluye que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden expresar en términos de $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ como

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1\rangle\mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_2\rangle\mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n\rangle\mathbf{q}_n \\
\mathbf{u}_2 &= \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1\rangle\mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2\rangle\mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n\rangle\mathbf{q}_n \\
&\ \ \vdots \\
\mathbf{u}_n &= \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1\rangle\mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2\rangle\mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n\rangle\mathbf{q}_n
\end{aligned}$$

Recordando de la sección 1.3 que el j-ésimo vector columna de un producto de matrices es una combinación lineal de los vectores columna del primer factor con coeficientes provenientes de la j-ésima columna de segundo factor, se concluye que estas relaciones se pueden expresar en forma matricial como

$$[\,\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n\,] = [\,\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_n\,]\begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1\rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1\rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1\rangle \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_2\rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2\rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n\rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n\rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n\rangle \end{bmatrix}$$

o, más brevemente, como

$$A = QR \tag{8}$$

Sin embargo, una propiedad del proceso de Gram-Schmidt es que para $j \geq 2$, el vector $\mathbf{q}_j$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$; así, los elementos abajo de la diagonal principal de R son cero.

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \end{bmatrix} \tag{9}$$

Se deja como ejercicio demostrar que los elementos de la diagonal de R son diferentes de cero, de modo que R es invertible. Así, (8) es una factorización de A en el producto de una matriz Q con vectores columna ortonormales y una matriz triangular superior invertible R. La expresión (8) se denomina ***descomposición QR de A***. En resumen, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 6.3.7. (*Descomposición QR*). *Si A es una matriz $m \times n$ con vectores columna linealmente independientes, entonces A se puede factorizar como*

$$A = QR$$

donde Q es una matriz $m \times n$ con vectores columna ortonormales y *R es una matriz triangular superior invertible $n \times n$.*

OBSERVACIÓN. Recuérdese por el teorema 6.2.7 que si A es una matriz $n \times n$, entonces la invertibilidad de A equivale a la independencia lineal de los vectores columna; así, toda matriz invertible posee una descomposición QR.

Ejemplo 8 Encontrar la descomposición QR de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. Los vectores columna de A son

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el proceso de Gram-Schmidt con normalización ulterior a estos vectores columna se obtienen los vectores ortonormales (véase el ejemplo 7)

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

y por (9), la matriz R es

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Así, la descomposición QR de A es

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{Q}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}} \underset{R}{\begin{bmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}} \quad \Delta$$

FUNCIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN *QR* EN ÁLGEBRA LINEAL

En años recientes, la descomposición QR ha adquirido una importancia cada vez mayor como fundamento matemático de una amplia gama de algoritmos numéricos prácticos, incluyendo un algoritmo bastante usado para calcular eigenvalores de matrices grandes. Los algoritmos se analizan en libros de texto relacionados con los métodos numéricos del álgebra lineal.

DEMOSTRACIÓN ADICIONAL

Demostración del teorema 6.3.4. La demostración se efectúa en dos partes. Primero es necesario encontrar vectores $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ con las propiedades enunciadas y luego demostrar que estos vectores son únicos.

Por el proceso de Gram-Schmidt, existe una base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para W. Sean

$$\mathbf{w}_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \tag{10}$$

y

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 \tag{11}$$

Se concluye que $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$, de modo que queda por demostrar que $\mathbf{w}_1$ está en W y que $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a W. Pero $\mathbf{w}_1$ está en W porque es una combinación lineal de los vectores básicos para W. Para demostrar que $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a W es necesario probar que $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w} \rangle = 0$ para todo vector $\mathbf{w}$ en W. Pero si $\mathbf{w}$ es cualquier vector en W, se puede expresar como una combinación lineal

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

de los vectores básicos $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Así,

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} - \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle \tag{12}$$

Pero

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{u}, k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \rangle \\ &= k_1\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \end{aligned}$$

y por el inciso *c*) del teorema 6.3.2

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle k_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle k_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle k_n$$

Así, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ y $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle$ son iguales, de modo que (12) produce $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w} \rangle = 0$, que es lo que quería probarse.

Para ver que (10) y (11) son los únicos vectores con las propiedades enunciadas en el teorema, supóngase que también es posible escribir

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2' \tag{13}$$

donde $\mathbf{w}_1'$ está en W y $\mathbf{w}_2'$ es ortogonal a W. Si de (13) se resta la ecuación

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

se obtiene

$$\mathbf{0} = (\mathbf{w}_1' - \mathbf{w}_1) + (\mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2)$$

o bien,

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1' = \mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2 \tag{14}$$

Como $\mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_2'$ son ortogonales a W, su diferencia también es ortogonal a W, ya que para cualquier vector $\mathbf{w}$ en W se puede escribir

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_2' \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_2 \rangle = 0 - 0 = 0$$

Pero $\mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2$ es un vector en W, ya que por (14) es la diferencia de los dos vectores $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_1'$ que están en el subespacio W. Así, $\mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2$ debe ser ortogonal a sí mismo; es decir,

$$\langle \mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2 \rangle = 0$$

Pero esto significa que $\mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2 = 0$ por el axioma 4 en la definición de producto interior. Así, $\mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_2$ y, por (14), $\mathbf{w}_1' = \mathbf{w}_1$. ☐

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.3

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales con respecto al producto interior euclidiano sobre R^2?

a) $(0, 1), (2, 0)$ b) $(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$
c) $(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ d) $(0, 0), (0, 1)$

2. ¿Cuáles de los conjuntos del ejercicio 1 son ortonormales con respecto al producto interior euclidiano sobre R^2?

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales con respecto al producto interior euclidiano sobre R^3?

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

c) $(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1)$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

4. ¿Cuáles de los conjuntos del ejercicio 3 son ortonormales con respecto al producto interior euclidiano sobre R^3?

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de polinomios son ortonormales con respecto al producto interior sobre P_2 que se analizó en el ejemplo 8 de la sección 6.1?

a) $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2,\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2,\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2$ b) $1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2,\ x^2$

6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de matrices son ortonormales con respecto al producto interior sobre M_{22} que se analizó en el ejemplo 7 de la sección 6.1?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

7. Comprobar que el conjunto de vectores dado es ortogonal con respecto al producto interior euclidiano; luego, normalizando los vectores convertirlo en un conjunto ortonormal.
a) $(-1, 2), (6, 3)$ b) $(1, 0, -1), (2, 0, 2), (0, 5, 0)$ c) $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

8. Sean $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y $\mathbf{y} = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$.

Demostrar que $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$es ortonormal sí R^2 tiene el producto interior $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$, pero que no es ortonormal sí R^2 tiene el producto interior euclidiano.

9. Comprobar que los vectores $\mathbf{v}_1 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), \mathbf{v}_2 = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ forman una base ortonormal para R^3 con el producto interior euclidiano; luego, mediante el teorema 6.3.1, expresar cada uno de los siguientes vectores como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.
a) $(1, -1, 2)$ b) $(3, -7, 4)$ c) $(\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{7})$

10. Comprobar que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2, -1), \quad \mathbf{v}_2 = (-2, 2, 3, 2), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 2, 0, -1), \quad \mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)$$

forman una base ortogonal para R^4 con el producto interior euclidiano; luego, con la fórmula (1), expresar cada uno de los siguientes vectores como una combinación lineal de $_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$.

a) $(1, 1, 1, 1)$ b) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ c) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

11. En cada inciso se proporciona una base ortonormal con respecto al producto interior euclidiano. Con el teorema 6.3.1, encontrar el vector de coordenadas de **w** con respecto a la base.

a) $\mathbf{w} = (3, 7)$; $\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) $\mathbf{w} = (-1, 0, 2)$; $\mathbf{u}_1 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

12. Sea R^2 con el producto interior euclidiano, y sea $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ la base ortonormal con $\mathbf{w}_1 = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, $\mathbf{w}_2 = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

a) Determinar los vectores **u** y **v** cuyos vectores de coordenadas son $(\mathbf{u})_S = (1, 1)$ y $(\mathbf{v})_S = (-1, 4)$.

b) Calcular $\|\mathbf{u}\|$, $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ aplicando el teorema 6.3.2 a los vectores de coordenadas $(\mathbf{u})_S$ y $(\mathbf{v})_S$; luego, comprobar los resultados mediante cálculos directos sobre **u** y **v**.

13. Sea R^3 con el producto interior euclidiano, y sea $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ la base ortonormal con $\mathbf{w}_1 = (0, -(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $\mathbf{w}_2 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{w}_3 = (0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

a) Encontrar los vectores **u**, **v** y **w** cuyos vectores de coordenadas son $(\mathbf{u})_S = (-2, 1, 2)$, $(\mathbf{v})_S = (3, 0, -2)$ y $(\mathbf{w})_S = (5, -4, 1)$.

b) Calcular $\|\mathbf{v}\|$, $d(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ y $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ aplicando el teorema 6.3.2 a los vectores de coordenadas $(\mathbf{u})_S$, $(\mathbf{v})_S$ y $(\mathbf{w})_S$; luego, comprobar los resultados mediante cálculos directos sobre **u** y **v**.

14. En cada inciso, S representa alguna base ortonormal de un espacio tetradimensional con producto interior. Usar la información que se proporciona para encontrar $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$, $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

a) $(\mathbf{u})_S = (-1, 2, 1, 3)$, $(\mathbf{v})_S = (0, -3, 1, 5)$, $(\mathbf{w})_S = (-2, -4, 3, 1)$

b) $(\mathbf{u})_S = (0, 0, -1, -1)$, $(\mathbf{v})_S = (5, 5, -2, -2)$, $(\mathbf{w})_S = (3, 0, -3, 0)$

15. a) Demostrar que los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3, -4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -4, -3)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, 4, 1, -2)$ y $\mathbf{v}_4 = (4, 3, 2, 1)$ forman una base ortogonal para R^4 con el producto interior euclidiano.

b) Usando (1), expresar $\mathbf{u} = (-1, 2, 3, 7)$ como una combinación lineal de los vectores en el inciso a).

16. Sea R^2 con el producto interior euclidiano. Usando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ en una base ortonormal.

a) $\mathbf{u}_1 = (1, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 2)$ b) $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (3, -5)$

17. Sea R^3 con el producto interior euclidiano. Con el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en una base ortonormal.

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 7, -2)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 4, 1)$

18. Sea R^4 con el producto interior euclidiano. Usando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ en una base ortonormal.

$\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 0, -1)$, $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, 1)$

19. Sea R^3 con el producto interior euclidiano. Encontrar una base ortonormal para el subespacio generado por $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ y $(-1, 1, 3)$.

20. Sea R^3 con el producto interior $\mathbf{u}, \mathbf{v} = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. Con el proceso de Gram-Schmidt, transformar $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)$ en una base ortonormal.

21. El subespacio de R^3 generado por los vectores $\mathbf{u}_1 = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$ y $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$ es un plano que pasa por el origen. Expresar $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ en la forma $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ está en el plano y $\mathbf{w}_2$ es perpendicular al plano.

22. Repetir el ejercicio 21 con $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{u}_2 = (2, 0, -1)$.

23. Sea R^4 con el producto interior euclidiano. Expresar $\mathbf{w} = (-1, 2, 6, 0)$ en la forma $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ está en el espacio W generado por $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1, 2)$ y $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 1)$, y $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a W.

24. Encontrar la descomposición QR de la matriz

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

25. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base ortonormal para un espacio V con producto interior. Demostrar que si $\mathbf{w}$ es un vector en V, entonces $\|\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 \rangle^2$.

26. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base ortonormal de un espacio V con producto interior. Demostrar que si $\mathbf{w}$ es un vector en V, entonces $\|\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \ldots + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle^2$.

27. En el paso 3 de la demostración del teorema 6.3.6, se afirmó que "la independencia lineal de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ asegura que $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$". Demostrar esta afirmación.

28. Demostrar que los elementos en la diagonal de R en la fórmula (9) son diferentes de cero.

29. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea el espacio vectorial P_2 con el producto interior

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

Aplicando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base estándar $S = \{1, x, x^2\}$ en una base ortonormal. (Los polinomios en la base resultante son los tres primeros ***polinomios normalizados de Legendre***.)

30. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Usando el teorema 6.3.1, expresar los siguientes polinomios como una combinación lineal de los tres polinomios normalizados de Legendre (ejercicio 29).
a) $1 + x + 4x^4$. b) $2 - 7x^2$. c) $4 + 3x$.

31. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea P_2 con el producto interior

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$

Aplicando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base estándar $S = \{1, x, x^2\}$ en una base ortonormal.

32. Demostrar el teorema 6.3.5.

33. Demostrar el teorema 6.3.2*a*.

34. Demostrar el teorema 6.3.2*b*.

35. Demostrar el teorema 6.3.2*c*.

6.4 MEJOR APROXIMACIÓN; MÍNIMOS CUADRADOS

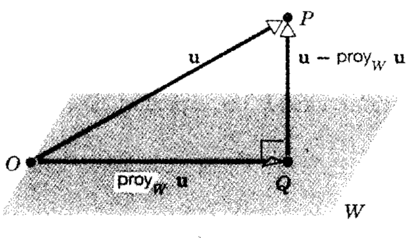
En esta sección se mostrará la manera de utilizar las proyecciones ortogonales para resolver ciertos problemas de aproximación. Los resultados obtenidos en esta sección titnen aplicaciones diversas tanto en matemáticas como en ciencias.

PROYECCIONES ORTOGONALES CONSIDERADAS COMO APROXIMACIONES

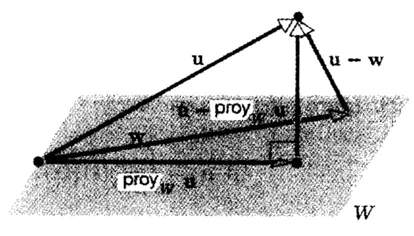
Si P es un punto en el espacio tridimensional ordinario y W es un plano que pasa por el origen, entonces el punto Q en W más próximo a P se obtiene al trazar una perpendicular de P a W (figura 1*a*). Por tanto, si se hace $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$, la distancia entre P y W está definida por

$$\|\mathbf{u} - \text{proy}_W\, \mathbf{u}\|$$

En otras palabras, de todos los vectores $\mathbf{w}$ en W, el vector $\mathbf{w} = \text{proy}_W\, \mathbf{u}$ minimiza la distancia $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$ (figura 1*b*).



a)



b)

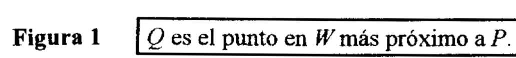


Figura 1 Q es el punto en W más próximo a P. $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$ es minimizada por $\mathbf{w} = \text{proy}_W\, \mathbf{u}$.

Hay otra forma de pensar esta idea. Considerar que **u** es un vector fijo cuya aproximación se desea obtener por medio de un vector en W. Cualquier aproximación **w** de este tipo dará por resultado un "vector de error"

$$\mathbf{u} - \mathbf{w}$$

el cual, a menos de que **u** esté en W, no se puede hacer igual a **0**. Sin embargo, eligiendo

$$\mathbf{w} = \text{proy}_W\, \mathbf{u}$$

es posible hacer que la longitud del vector de error

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u} - \text{proy}_W\, \mathbf{u}\|$$

sea tan pequeña como se quiera. Así, $\mathbf{w} = \text{proy}_W\, \mathbf{u}$ se puede describir como la "mejor aproximación" para **u** por medio de vectores en W. El siguiente teorema precisará estas ideas intuitivas.

Teorema 6.4.1. (*Teorema de la mejor aproximación*). *Si W es un subespacio de dimensión finita de un espacio V con producto interior, y si* **u** *es un vector en V, entonces* $\text{proy}_W\, \mathbf{u}$ *es la* ***mejor aproximación*** *para* **u** *desde W en el sentido de que*

$$\|\mathbf{u} - \text{proy}_W\, \mathbf{u}\| < \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$$

para todo vector **w** *en W diferente de* $\text{proy}_W\, \mathbf{u}$.

Demostración. Para todo vector **w** en W se puede escribir

$$\mathbf{u} - \mathbf{w} = (\mathbf{u} - \text{proy}_W\, \mathbf{u}) + (\text{proy}_W\, \mathbf{u} - \mathbf{w}) \tag{1}$$

Pero $\text{proy}_W\, \mathbf{u} - \mathbf{w}$, por ser una diferencia de vectores en W, está en W; y $\mathbf{u} - \text{proy}_W\, \mathbf{u}$ es ortogonal a W, de modo que los dos términos en el miembro derecho de (1) son ortogonales. Así, por el teorema de Pitágoras (teorema 6.2.4),

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} - \text{proy}_W\, \mathbf{u}\|^2 + \|\text{proy}_W\, \mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2$$

si $\mathbf{w} \neq \text{proy}_W\, \mathbf{u}$, entonces el segundo término de esta suma es positivo, de modo que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{u} - \text{proy}_W\, \mathbf{u}\|^2$$

o, de manera equivalente,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| > \|\mathbf{u} - \text{proy}_W\, \mathbf{u}\| \quad \square$$

Después, se proporcionarán aplicaciones de este teorema.

SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES POR MÍNIMOS CUADRADOS

Hasta ahora se han tratado principalmente sistemas de ecuaciones lineales consistentes. Sin embargo, los sistemas lineales inconsistentes también son importantes en aplicaciones físicas. Una situación común es que algún problema físico conduzca a un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que desde un punto de vista teórico debe ser consistente, aunque no lo es debido a que "errores de medición" en los elementos de A y $\mathbf{b}$ perturban bastante al sistema para hacerlo inconsistente. En situaciones como éstas se busca un valor de $\mathbf{x}$ que esté "lo más próximo posible" de ser una solución en el sentido de que reduzca el valor de $\|A\mathbf{x} = \mathbf{b}\|$ con respecto al producto interior euclidiano. La cantidad $\|A\mathbf{x} = \mathbf{b}\|$ se puede considerar como una medida del "error" que resulta al considerar a $\mathbf{x}$ como una solución aproximada del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si el sistema es consistente y $\mathbf{x}$ es una solución exacta, entonces el error es cero, ya que $\|A\mathbf{x} = \mathbf{b}\| = \|\mathbf{0}\| = 0$. En general, mientras más grande sea el valor de $\|A\mathbf{x} = \mathbf{b}\|$, más deficiente será la aproximación de $\mathbf{x}$ a una solución del sistema.

> **Problema de mínimos cuadrados**. Dado un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m ecuaciones con n incógnitas, encontrar un vector $\mathbf{x}$, si es posible, que reduzca a $\|A\mathbf{x} = \mathbf{b}\|$ con respecto al producto interior euclidiano sobre R^m. El vector se denomina ***solución por mínimos cuadrados*** de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

OBSERVACIÓN. Para comprender el origen de la expresión *mínimos cuadrados*, sea $\mathbf{e} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$, que se puede considerar como un vector de error que se obtiene de la aproximación $\mathbf{x}$. Si $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$, entonces una solución por mínimos cuadrados minimiza a $\|\mathbf{e}\| = (e_1^2+e_2^2+\ldots+e_m^2)^{1/2}$ y por tanto, también minimiza a $\|\mathbf{e}\|^2 = e_1^2+e_2^2+\ldots+e_m^2$, de donde proviene la expresión *mínimos cuadrados*.

Para resolver el problema de mínimos cuadrados, sea W el espacio columna de A. Para toda matriz $n \times 1$, el producto $A\mathbf{x}$ es una combinación lineal de los vectores columna de A. Así, cuando $\mathbf{x}$ varía sobre R^n, el vector $A\mathbf{x}$ varía sobre todas las combinaciones lineales posibles de los vectores columna de A; es decir, $A\mathbf{x}$ varía sobre todo el espacio columna W. Geométricamente, resolver el problema de mínimos cuadrados equivale a encontrar un vector $\mathbf{x}$ en R^n tal que $A\mathbf{x}$ sea el vector en W más próximo a $\mathbf{b}$ (figura 2).

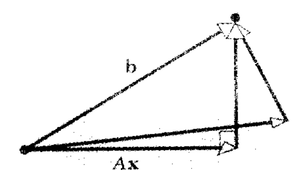


Figura 2

> Una solución por mínimos cuadrados $\mathbf{x}$ produce el vector $A\mathbf{x}$ en W más próximo a $\mathbf{b}$.

Por el teorema de la mejor aproximación (teorema 6.4.1) se concluye que el vector en W más próximo a $\mathbf{b}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre W. Así, para

que un vector $\mathbf{x}$ sea una solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, este vector debe satisfacer

$$A\mathbf{x} = \text{proy}_W \mathbf{b} \tag{2}$$

Se podría intentar determinar soluciones por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ calculando primero el vector $\text{proy}_W \mathbf{b}$ y luego resolviendo (2); sin embargo, existe un método mejor: Por el teorema de proyección (teorema 6.3.4) y la fórmula (5) de la sección 6.3 se concluye que

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - \text{proy}_W \mathbf{b}$$

es ortogonal a W. Pero W es el espacio columna de A, de modo que por el teorema 6.2.6 se concluye que $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ está en el espacio nulo de A^T. Por consiguiente, una solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ debe satisfacer

$$A^T\mathbf{x}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = 0$$

o, de manera equivalente,

$$A^TA\text{x} = A^T\mathbf{b} \tag{3}$$

Esta expresión se denomina ***sistema normal*** asociado con $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y las ecuaciones individuales se denominan ***ecuaciones normales*** asociadas con $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Así, el problema de hallar una solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se ha reducido al problema de encontrar una solución exacta del sistema normal asociado.

Nótense las siguientes observaciones sobre el sistema normal:

- En el sistema normal hay n ecuaciones con n incógnitas (comprobar).
- El sistema normal es consistente, ya que se satisface con una solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- El sistema normal puede tener infinidad de soluciones, en cuyo caso todas éstas son soluciones por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Con base en estas observaciones y la fórmula (2) se tiene el siguiente teorema.

Teorema 6.4.2. *Para cualquier sistema lineal* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *el sistema normal asociado*

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

es consistente y todas las soluciones del sistema normal son soluciones por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Además, si* W *es el espacio columna de* A *y* $\mathbf{x}$ *es cualquier solución por mínimos cuadrados de* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *entonces la proyección ortogonal de* $\mathbf{b}$ *sobre* W *es*

$$proy_W \mathbf{b} = A\mathbf{x}$$

UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES POR MÍNIMOS CUADRADOS

Antes de analizar algunos ejemplos numéricos, se establecerán condiciones que garantizan que un sistema lineal tiene sólo una solución por mínimos cuadrados. Se necesitará el siguiente teorema.

Teorema 6.4.3. *Si A es una matriz $m \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

c) A tiene vectores columna linealmente independientes.
d) A^TA es invertible.

Demostración. Se demostrará que $a \Rightarrow b$ y $b \Rightarrow a$.

$a \Rightarrow b$: Supóngase que los vectores columna de A son linealmente independientes. La matriz A^TA es de tamaño $n \times n$, de modo que, para demostrar que esta matriz es invertible, se debe probar que el sistema lineal $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial. Pero si $\mathbf{x}$ es cualquier solución de este sistema, entonces $A\mathbf{x}$ está en el espacio nulo de A^T y también está en el espacio columna de A. Por el teorema 6.2.6 los espacios son complementos ortogonales, de modo que el inciso b) del teorema 6.2.5 indica que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pero A tiene vectores columna linealmente independientes, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ por el teorema 5.6.8.

b $\Rightarrow$ a: Supóngase que A^TA es invertible. Para demostrar que A tiene vectores columna linealmente independientes, por el teorema 5.6.8. basta probar que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial. Pero si $\mathbf{x}$ es cualquier solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ debido a la invertibilidad de A^TA. □

El siguiente teorema es una consecuencia directa de los teoremas 6.4.2 y 6.4.3. Se omiten los detalles.

Teorema 6.4.4. (*Unicidad de las soluciones por mínimos cuadrados*). *Si A es una matriz $m \times n$ con vectores columna linealmente independientes, entonces para toda matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$ el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una sola solución por mínimos cuadrados. Esta solución está dada por*

$$x = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} \tag{4}$$

Además, si W es el espacio columna de A, entonces la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre W es

$$proy_W \mathbf{b} = A\mathbf{x} = A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} \tag{5}$$

OBSERVACIÓN. Las fórmulas (4) y (5) poseen varias aplicaciones teóricas, pero no son eficaces para efectuar cálculos numéricos. Las soluciones por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se calculan mejor usando eliminación gaussiana o eliminación de Gauss-Jordan para resolver las ecuaciones normales; la proyección orto-

gonal de **b** sobre el espacio columna de A se obtiene calculando $A\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x}$ es la solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ejemplo 1 Encontrar la solución por mínimos cuadrados del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ definido por

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

y encontrar la proyección ortogonal de **b** sobre el espacio columna de A.

Solución. Aquí,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que A tiene vectores columna linealmente independientes, de modo que de antemano se sabe que existe una solución por mínimos cuadrados única.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

de modo que en este caso el sistema normal $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ es

$$\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema se obtiene la solución por mínimos cuadrados

$$x_1 = \tfrac{17}{95}, \qquad x_2 = \tfrac{143}{285} \quad \Delta$$

Por (5), la proyección ortogonal de **b** sobre el espacio columna de A es

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{95} \\ \frac{143}{285} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{92}{285} \\ \frac{439}{285} \\ \frac{94}{57} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2 Encontrar la proyección ortogonal del vector $\mathbf{u} = (-3, -3, 8, 9)$ sobre el subespacio de R^4 generado por los vectores

$$\mathbf{u}_1 = (3, 1, 0, 1), \qquad \mathbf{u}_2 = (1, 2, 1, 1), \qquad \mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2, -1)$$

Solución. Para resolver este problema se aplica primero el proceso de Gram-Schmidt con el fin de convertir $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en una base ortonormal y luego se aplica el método usado en el ejemplo 6 de la sección 6.3. Sin embargo, el siguiente método es mejor.

El subespacio W de R^4 generado por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ es el espacio columna de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces, si $\mathbf{u}$ se expresa como un vector columna, es posible determinar la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre W encontrando una solución por mínimos cuadrados del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ y, luego, calculando $\text{proy}_W \mathbf{u} = A\mathbf{x}$ a partir de la solución por mínimos cuadrados. Los cálculos son como sigue: El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ es

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

En este caso, el sistema normal $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{u}$ es

$$\begin{bmatrix} 11 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema se obtiene que la solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(comprobar), de modo que

$$\text{proy}_W \mathbf{u} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o bien, en notación horizontal (lo cual es consistente con el planteamiento original del problema), $\text{proy}_W \mathbf{u} = (-2, 3, 4, 0)$. Δ

OPERADORES PROYECCIÓN ORTOGONAL

En la sección 4.2 se analizaron algunos operadores proyección ortogonal básicos sobre R^2 y R^3 (tablas 4 y 5). El concepto de operador proyección ortogonal se puede extender a espacios generales con producto interior como se muestra enseguida.

Definición. Si W es un subespacio de R^m, entonces la transformación $P{:}R^m \to W$ que aplica cada vector $\mathbf{x}$ en R^m en su proyección ortogonal $\text{proy}_W \mathbf{x}$ en W se denomina ***proyección ortogonal de R^m sobre W***.

Se deja como ejercicio demostrar que las proyecciones ortogonales son operadores lineales. Por la fórmula (5) se concluye que la matriz estándar para la proyección ortogonal de R^m sobre W es

$$[P] = A(A^TA)^{-1}A^T \tag{6}$$

donde A se obtiene usando cualquier base para W como sus vectores columna.

Ejemplo 3 En la tabla 5 de la sección 4.2 se demostró que la matriz estándar para la proyección ortogonal de R^3 sobre el plano xy es

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Para darse cuenta de que lo anterior es consistente con la fórmula (6), considérense los vectores unitarios a lo largo de los ejes x y y positivos como base para el plano xy, de modo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se deja para el lector comprobar que A^TA es la matriz identidad 2×2; así, (6) se simplifica a

$$[P] = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lo cual concuerda con (7). Δ

Ejemplo 4 Hallar la matriz estándar para la proyección ortogonal P de R^2 sobre la recta l que pasa por el origen y forma un ángulo θ con el eje x positivo.

Solución. La recta l es un subespacio unidimensional de R^2. Como se ilustra en la figura 3, se puede tomar $\mathbf{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ como una base para este subespacio, de modo que

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

Se deja para el lector comprobar que A^TA es la matriz identidad 1×1; así, (6) se simplifica a

$$[P] = AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} [\cos\theta \quad \operatorname{sen}\theta] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad \Delta$$

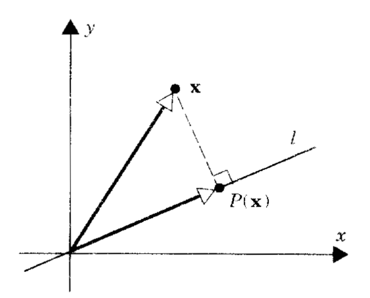


Figura 3

RESUMEN El teorema 6.4.3 permite agregar un resultado adicional al teorema 6.2.7.

> **Teorema 6.4.5.** *Si A es una matriz $n \times n$, y si $T_A: R^n \to R^n$ es la multiplicación por A, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*
>
> *a)* A *es invertible.*
> *b)* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *sólo tiene la solución trivial.*
> *c)* *La forma escalonada reducida de* A *es* I_n.
> *d)* A *puede escribirse como un producto de matrices elementales.*
> *e)* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *es consistente para toda matriz* $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
> *f)* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tiene exactamente una solución para toda matriz* $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
> *g)* $\det(A) \neq 0$.

h) *El rango de T_A es R^n.*
i) *T_A es uno a uno.*
j) *Los vectores columna de A son linealmente independientes.*
k) *Los vectores renglón de A son linealmente independientes.*
l) *Los vectores columna de A generan a R^n.*
m) *Los vectores renglón de A generan a R^n.*
n) *Los vectores columna de A forman una base para R^n.*
o) *Los vectores renglón de A forman una base para R^n.*
p) *El rango de A es n.*
q) *La nulidad de A es 0.*
r) *El complemento ortogonal del espacio nulo de A es R^n.*
s) *El complemento ortogonal del espacio renglón de A es $\{\mathbf{0}\}$.*
t) *A^TA es invertible.*

Este teorema relaciona los temas más importantes estudiados hasta el momento.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.4

1. Hallar el sistema normal asociado con el sistema lineal dado.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. En cada inciso, encontrar $\det(A^TA)$ y aplicando el teorema 6.4.3, determinar si A tiene vectores columna linealmente independientes.

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

3. Encontrar la solución por mínimos cuadrados del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y hallar la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre el espacio columna de A.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

4. Determinar la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre el subespacio de R^3 generado por los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.
a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$
b) $\mathbf{u} = (1, -6, 1)$; $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 4)$

5. Encontrar la proyección ortogonal de **u** sobre el subespacio de R^4 generado por los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

a) $\mathbf{u} = (6, 3, 9, 6)$; $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, -1, 0, -1)$

b) $\mathbf{u} = (-2, 0, 2, 4)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, -1, -2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, -1, 1, 3)$

6. Hallar la proyección ortogonal de $\mathbf{u} = (5, 6, 7, 2)$ sobre el espacio solución de sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

7. Usando la fórmula (6) y el método del ejemplo 3, encontrar la matriz estándar de la proyección ortogonal $P{:}R^2 \to R^2$ sobre

a) el eje x. b) el eje y.

[***Nota.*** Comparar los resultados con la tabla 4 de la sección 4.2.]

8. Por medio de la fórmula (6) y el método del ejemplo 3, determinar la matriz estándar de la proyección ortogonal $P{:}R^3 \to R^3$ sobre

a) el plano xz. b) el plano yz.

[***Nota.*** Comparar los resultados con la tabla 5 de la sección 4.2.]

9. Sea W el plano con ecuación $5x - 3y + z = 0$.

a) Encontrar una base para W.

b) Con la fórmula (6), encontrar la matriz estándar para la proyección ortogonal sobre W.

c) Usar la matriz obtenida en el inciso b) para determinar la proyección ortogonal de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sobre W.

d) Encontrar la distancia entre el punto $P_0(1, -2, 4)$ y el plano W, y comprobar el resultado mediante el teorema 3.5.2.

10. Sea W la recta con ecuaciones paramétricas

$$x = 2t, \quad y = -t, \quad z = 4t \qquad (-\infty < t < \infty)$$

a) Encontrar una base para W.

b) Por medio de la fórmula (6), encontrar la matriz estándar para la proyección ortogonal sobre W.

c) Usar la matriz obtenida en el inciso b) para encontrar la proyección ortogonal de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sobre W.

d) Hallar la distancia entre el punto $P_0(2, 1, -3)$ y la recta W.

11. Para los sistemas lineales del ejercicio 3, comprobar que el *vector de error* $A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ que resulta de la solución por mínimos cuadrados $\bar{\mathbf{x}}$ es ortogonal al espacio columna de A.

12. Demostrar: Si A tiene vectores columna linealmente independientes y si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, entonces la solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y la solución exacta de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son iguales.

13. Demostrar: Si A tiene vectores columna linealmente independientes y si $\mathbf{b}$ es ortogonal al espacio columna de A, entonces la solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

14. Sea $P:R^m \to W$ la proyección ortogonal de R^m sobre un subespacio W.
a) Demostrar que $[P]^2 = [P]$.
b) ¿Qué indica el resultado del inciso a) con respecto a la composición P o P?
c) Demostrar que $[P]$ es simétrica.
d) Comprobar que las matrices en las tablas 4 y 5 de la sección 4.2 tienen las propiedades indicadas en los incisos a) y c).

15. Sea A una matriz $m \times n$ con vectores renglón linealmente independientes. Encontrar una matriz estándar para la proyección ortogonal de R^n sobre el espacio renglón de A. [***Sugerencia.*** Empezar con la fórmula (6).]

6.5 MATRICES ORTOGONALES; CAMBIO DE BASE

Una base que es adecuada para un problema puede no ser para otro, de modo que en el estudio de los espacios vectoriales un proceso común es cambiar de una base a otra. Debido a que una base es la generalización a espacios vectoriales de un sistema de coordenadas, el cambio de base es semejante a cambiar de ejes de coordenadas en R^2 y R^3. En esta sección se estudiarán varios problemas relacionados con el cambio de base. También se obtendrán propiedades de las matrices cuadradas que tienen vectores columna ortonormales. Estas matrices surgen en diversos contextos, incluyendo problemas en los que hay un cambio de una base ortonormal a otra.

MATRICES ORTOGONALES

Las matrices cuyas inversas se pueden obtener por transposiciones son tan importantes que existe una terminología asociada con ellas.

Definición. Una matriz cuadrada A con la propiedad

$$A^{-1} = A^T$$

se denomina ***matriz ortogonal.***

Por la definición anterior se concluye que *una matriz cuadrada A es ortogonal si y sólo si*

$$AA^T = A^TA = I \tag{1}$$

De hecho, por el teorema 1.6.3 se concluye que una matriz cuadrada A es ortogonal si $AA^T = I$, o bien, $A^TA = I$.

Ejemplo 1 La matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

es ortogonal, ya que

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Ejemplo 2 Recordar que en la tabla 6 de la sección 4.2, la matriz estándar para la rotación de R^2 en sentido contrario a las manecillas del reloj por un ángulo θ, es

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Esta matriz es ortogonal para todas las elecciones de θ , ya que

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De hecho, es fácil comprobar que todas las "matrices de reflexión" en las tablas 2 y 3 y todas las "matrices de rotación" en las tablas 6 y 7 de la sección 4.2 son matrices ortogonales. Δ

Obsérvese que para las matrices ortogonales en los ejemplos 1 y 2, tanto los vectores renglón como los vectores columna forman conjuntos ortonormales con respecto al producto interior euclidiano (comprobar). Este hecho no es fortuito; es una consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 6.5.1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para una matriz A $n \times n$.*

a) *A es ortogonal.*
b) *Los vectores renglón de A forman un conjunto ortonormal en R^n con el producto interior euclidiano.*
c) *Los vectores columna de A forman un conjunto ortonormal en R^n con el producto interior euclidiano.*

Demostración. Se probará la equivalencia de *a*) y *b*), y la equivalencia de *a*) y *c*) se deja como ejercicio para el lector.

a $\Leftrightarrow$ b: El elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna del producto matricial AA^T es el producto punto del i-ésimo vector renglón de A y el j-

ésimo vector columna de A^T. Pero, excepto por la notación, el j-ésimo vector columna de A^T es el j-ésimo vector renglón de A. Luego, si los vectores renglón de A son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$, entonces el producto matricial AA^T se puede expresar como

$$AA^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

Por tanto, $AA^T = I$ si y sólo si

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \cdots = \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n = 1$$

y

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0 \text{ cuando } i \neq j$$

que son verdaderas si y sólo si $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ es un conjunto ortonormal en R^n. □

OBSERVACIÓN. En vista del teorema 6.5.1 parece más apropiado denominar *matrices ortonormales* a las matrices ortogonales. Sin embargo, no se hará así por respeto a la tradición histórica.

ALGUNAS PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS MATRICES ORTOGONALES

En el siguiente teorema se enumeran algunas propiedades básicas adicionales de las matrices ortogonales. Las demostraciones son directas y se dejan para el lector.

Teorema 6.5.2.
a) *La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal.*
b) *Un producto de matrices ortogonales es ortogonal.*
c) *Si A es ortogonal, entonces $\det(A) = 1$ o $\det(A) = -1$.*

Ejemplo 3 La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

es ortogonal, ya que sus vectores renglón (y columna) forman conjuntos ortonormales en R^2. Se deja para el lector verificar que $\det(A) = 1$. Intercambiando los renglones se obtiene una matriz ortogonal para la cual $\det(A) = -1$. Δ

MATRICES ORTOGONALES COMO OPERADORES LINEALES

En el ejemplo 2 se vio que las matrices estándar para los operadores reflexión y rotación básicos sobre R^2 y R^3 son ortogonales. El siguiente teorema ayudará a explicar este hecho

Teorema 6.5.3. *Si A es una matriz $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *A es ortogonal.*
b) $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ *para todo* $\mathbf{x}$ *en* R^n.
c) $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ *para todo* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *en* R^n.

Demostración. Se probará la serie de implicaciones $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$.

$a \Rightarrow b$: Supóngase que A es ortogonal, de modo que $A^TA = I$. Entonces por la fórmula (8) de la sección 4.1,

$$\|A\mathbf{x}\| = (A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x})^{1/2} = (\mathbf{x} \cdot A^TA\mathbf{x})^{1/2} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \|\mathbf{x}\|$$

$b \Rightarrow c$: Supóngase que $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ en R^n. Por el teorema 4.1.6 se tiene

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} &= \tfrac{1}{4}\|A\mathbf{x} + A\mathbf{y}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}\|^2 = \tfrac{1}{4}\|A(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - \tfrac{1}{4}\|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

$c \Rightarrow a$: Supóngase que $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ para todo $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en R^n. Entonces por la fórmula (8) de la sección 4.1 se tiene

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A^TA\mathbf{y}$$

que se puede volver a escribir como

$$\mathbf{x} \cdot (A^TA\mathbf{y} - \mathbf{y}) = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{x} \cdot (A^TA - I)\mathbf{y} = 0$$

Como la expresión anterior es verdadera para todo $\mathbf{x}$ en R^n, en particular se cumple si

$$\mathbf{x} = (A^TA - I)\mathbf{y}$$

de modo que

$$(A^TA - I)\mathbf{y} \cdot (A^TA - I)\mathbf{y} = 0$$

a partir de lo cual se puede concluir que

$$(A^TA - I)\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{2}$$

(¿por qué?). Así, (2) es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que se cumple para todo $\mathbf{y}$ en R^n. Pero esto significa que la matriz coeficientes debe ser cero (¿por qué?), de modo que $A^TA = I$ y, en consecuencia, A es ortogonal. □

Si $T{:}R^n \to R^n$ es la multiplicación por una matriz ortogonal A, entonces T se denomina ***operador ortogonal*** sobre R^n. Por los incisos *a)* y *b)* del teorema precedente se concluye que los operadores ortogonales sobre R^n son precisamente

los operadores que no modifican las longitudes de todos los vectores. Como las reflexiones y las rotaciones de R^2 y R^3 tienen esta propiedad, este hecho explica la observación en el ejemplo 2 de que las matrices estándar para las reflexiones y rotaciones básicas de R^2 y R^3 son ortogonales.

MATRICES DE COORDENADAS

Recordar por el teorema 5.4.1 que si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V, entonces todo vector $\mathbf{v}$ en V se puede expresar de manera única como una combinación lineal de los vectores básicos, por ejemplo,

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

Los escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son las coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a S, y el vector

$$(\mathbf{v})_S = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

es el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a S. En esta sección será conveniente enumerar las coordenadas como elementos de una matriz $n \times 1$. Así, la matriz

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

se define como la ***matriz de coordenadas*** de $\mathbf{v}$ con respecto a S.

CAMBIO DE BASE

En las aplicaciones es común trabajar con más de un sistema de coordenadas, y suele ser necesario conocer la relación entre las coordenadas de un punto o vector fijo y los diversos sistemas de coordenadas. Como el concepto de base es la generalización de un sistema de coordenadas a espacios vectoriales, se llega a considerar el siguiente problema.

> ***Problema del cambio de base.*** Si la base de un espacio vectorial se cambia de cierta base inicial B a una base nueva B', ¿cómo está relacionada la matriz de coordenadas inicial $[\mathbf{v}]_B$ de un vector $\mathbf{v}$ con la nueva matriz de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$?

Por sencillez, este problema se resolverá para espacios bidimensionales. La solución para espacios n dimensionales es semejante y se deja al lector. Sean

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \qquad \text{y} \qquad B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'\}$$

las bases inicial y nueva, respectivamente. Serán necesarias las matrices de coordenadas para los nuevos vectores básicos con respecto a la base inicial. Supóngase que las matrices son

$$[\mathbf{u}_1']_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [\mathbf{u}_2']_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \tag{3}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1' &= a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2' &= c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora, sea $\mathbf{v}$ cualquier vector en V y sea

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

la nueva matriz de coordenadas, de modo que

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1' + k_2\mathbf{u}_2' \tag{6}$$

Para determinar las coordenadas iniciales de $\mathbf{v}$ es necesario expresar $\mathbf{v}$ en términos de la base inicial B. Esto se logra al sustituir (4) en (6). Así se obtiene

$$\mathbf{v} = k_1(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) + k_2(c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2)$$

o

$$\mathbf{v} = (k_1a + k_2c)\mathbf{u}_1 + (k_1b + k_2d)\mathbf{u}_2$$

Entonces, la matriz de coordenadas inicial para $\mathbf{v}$ es

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix}$$

que se puede escribir como

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

o bien, por (5),

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}[\mathbf{v}]_{B'}$$

Esta ecuación establece que la matriz de coordenadas inicial $[\mathbf{v}]_B$ se obtiene al multiplicar la nueva matriz de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ por la izquierda por la matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Las columnas de esta matriz son las coordenadas de los nuevos vectores básicos con respecto a la base inicial [véase (3)]. Así, se tiene la siguiente solución para el problema del cambio de base.

Solución del problema del cambio de base. Si se cambia la base para un espacio vectorial V de una base inicial $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ a una base nueva $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ entonces la matriz de coordenadas inicial $[\mathbf{v}]_B$ de un vector $[\mathbf{v}]$ está relacionada con la nueva matriz de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ del mismo vector $\mathbf{v}$ por medio de la ecuación

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'} \tag{7}$$

donde las columnas de P son las matrices de coordenadas de los nuevos vectores básicos con respecto a la base inicial; es decir, los vectores columna de P son

$$[\mathbf{u}'_1]_B, [\mathbf{u}'_2]_B, \ldots, [\mathbf{u}'_n]_B$$

MATRICES DE TRANSICIÓN

La matriz P se denomina ***matriz de transición*** de B' a B y se puede expresar en términos de sus vectores columna como

$$P = \left[[\mathbf{u}'_1]_B \;\vdots\; [\mathbf{u}'_2]_B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; [\mathbf{u}'_n]_B \right] \tag{8}$$

Ejemplo 4 Considerar las bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ para R^2, donde

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0); \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1); \quad \mathbf{u}'(1, 1); \quad \mathbf{u}' = (2, 1)$$

a) Encontrar la matriz de transición de B' a B.
b) Por medio de (7), hallar $[\mathbf{v}]_B$ si

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Solución de a). Primero es necesario encontrar las matrices de coordenadas de los nuevos vectores básicos $\mathbf{u}'_1$ y $\mathbf{u}'_2$ con respecto a la base inicial B. Por inspección,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}'_2 &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

de modo que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz de transición de B' a B es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución de b). Mediante (7) y la matriz de transición determinada en el inciso *a*),

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como comprobación, debe ser posible recuperar el vector $\mathbf{v}$ a partir de $[\mathbf{v}]_B$ o de $[\mathbf{v}]_{B'}$. Se al lector demostrar que $-3\mathbf{u}_1' + 5\mathbf{u}_2' = \mathbf{u}_1' + 2\mathbf{u}_2' = \mathbf{v} = (7, 2)$. Δ

Ejemplo 5 Considerar los vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{u}_1' = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2' = (2, 1)$. En el ejemplo 4 se encontró la matriz de transición de la base $B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'\}$ para R^2 a la base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Sin embargo, también se podría pedir la matriz de transición de B *a* B'. Para obtener esta matriz, simplemente se cambia el punto de vista y se considera a B' como la base inicial y a B como la base nueva. Como de costumbre, las columnas de la matriz de transición son las coordenadas de los nuevos vectores básicos con respecto a la base inicial.

Igualando las componentes correspondientes y resolviendo el sistema lineal resultante, el lector debe poder demostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= -\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_2' \\ \mathbf{u}_2 &= 2\mathbf{u}_1' - \mathbf{u}_2' \end{aligned}$$

de modo que

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz de transición de B *a* B' es

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Si se multiplican entre sí la matriz de transición de B' *a* B obtenida en el ejemplo 4 y la matriz de transición de B *a* B' obtenida en el ejemplo 5, se encuentra

$$PQ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

lo cual muestra que $Q = P^{-1}$. El siguiente teorema demuestra que este hecho no es fortuito.

Teorema 6.5.4. *Si P es la matriz de transición de una base B' a una base B, entonces:*

a) P es invertible.
b) P^{-1} es la matriz de transición de B a B'.

Demostración. Sea Q la matriz de transición de B a B'. Se probará que $PQ = I$ y entonces se concluirá que $Q = P^{-1}$ para completar la demostración.

Suponer que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y que

$$PQ = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Por (7)

$$[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'}$$

y

$$[\mathbf{x}]_{B'} = Q[\mathbf{x}]_B$$

para todo $\mathbf{x}$ en V. Multiplicando la ecuación inferior por P por la izquierda y sustituyendo la ecuación superior se obtiene

$$[\mathbf{x}]_B = PQ[\mathbf{x}]_B \tag{9}$$

para todo $\mathbf{x}$ en V. Con $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1$ en (9) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

De manera semejante, la sustitución sucesiva de $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ en (9) da

$$\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $PQ = I$.

En resumen, si P es la matriz de transición de una base B' a una base B, entonces para todo vector $\mathbf{v}$ se cumplen las siguientes relaciones:

$$\boxed{[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'}} \tag{10}$$

$$\boxed{[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{v}]_B} \tag{11}$$

CAMBIO DE BASE ORTONORMAL

El siguiente teorema muestra que en un espacio con producto interior, la matriz de transición de una base ortonormal a otra es ortogonal.

> **Teorema 6.5.5.** *Si P es la matriz de transición de una base ortonormal a otra base ortonormal para un espacio con producto interior, entonces P es una matriz ortogonal; es decir,*
>
> $$P^{-1} = P^T$$

Demostración. Suponer que V es un espacio n dimensional con producto interior y que P es la matriz de transición de una base ortonormal B' a una base ortonormal B. Para demostrar que P es ortogonal se aplicará el teorema 6.5.3*b* y se probará que $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo vector $\mathbf{x}$ en R^n.

Recordar por el teorema 6.3.2*a* que para cualquier base ortonormal de V, la norma de cualquier vector $\mathbf{u}$ en V es igual a la norma de su vector de coordenadas en R^n con respecto al producto interior euclidiano. Así, para cualquier vector $\mathbf{u}$ en V se tiene

$$\|\mathbf{u}\| = \|[\,\mathbf{u}\,]_{B'}\| = \|[\,\mathbf{u}\,]_B\|$$

o bien, por (10),

$$\|\mathbf{u}\| = \|[\,\mathbf{u}\,]_{B'}\| = \|P[\,\mathbf{u}\,]_{B'}\| \tag{12}$$

donde la primera norma es con respecto al producto interior sobre V y las normas segunda y tercera son con respecto al producto interior euclidiano sobre R^n.

Ahora, sea $\mathbf{x}$ cualquier vector en R^n, y sea $\mathbf{u}$ el vector en V cuya matriz de coordenadas con respecto a la base B' es $\mathbf{x}$; es decir, $[\mathbf{u}]_{B'} = \mathbf{x}$. Así, por (12),

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{x}\| = \|P\mathbf{x}\|$$

con lo que se demuestra que P es ortogonal □

ROTACIÓN DE EJES COORDENADOS

Ejemplo 6 (***Aplicación a la rotación de ejes de coordenados.***) En muchos problemas se proporciona un sistema de coordenadas rectangulares xy, y al mover este sistema en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del origen por un ángulo se obtiene un nuevo sistema de coordenadas rectangulares $x'y'$. Cuando se hace lo anterior, cada punto Q en el plano posee dos conjuntos de coordenadas: las coordenadas (x, y) con respecto al sistema xy y las coordenadas (x', y') con respecto al sistema $x'y'$ (figura 1*a*).

Al introducir los vectores unitarios $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ a lo largo de los ejes x y y positivos y los vectores unitarios $\mathbf{u}'_1$ y $\mathbf{u}'_2$ a lo largo de los ejes x' y y' positivos, esta rotación se puede considerar como un cambio de una base inicial $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ a una base nueva $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ (figura 1*b*). Así, las nuevas coordenadas (x', y') y las coordenadas anteriores (x, y) de un punto Q están relacionadas por medio de

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{13}$$

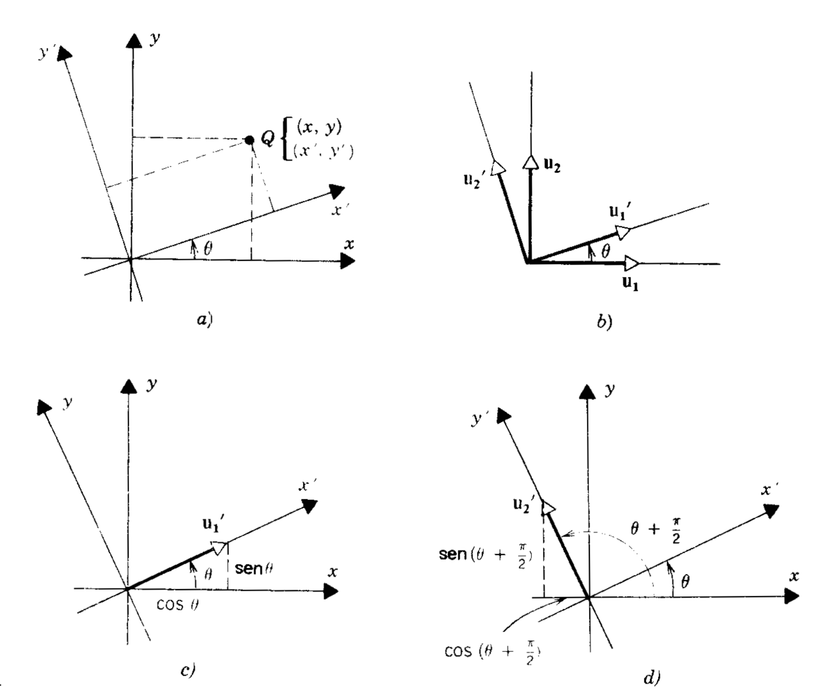


Figura 1

donde P es la matriz de transición de B' a B. Para encontrar P es necesario determinar las matrices de coordenadas de los nuevos vectores básicos $\mathbf{u}_1'$ y $\mathbf{u}_2'$ con respecto a la base inicial. Como se indica en la figura 1*c*, las componentes de $\mathbf{u}_1'$ en la base inicial son cos θ y sen θ, de modo que

$$[\mathbf{u}_1']_B = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

De manera semejante, por la figura 1*d*, se observa que las componentes de $\mathbf{u}_2'$ en la base inicial son $\cos(\theta+\pi/2) = -\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta+\pi/2) = \cos\theta$, de modo que

$$[\mathbf{u}_2']_B = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Así, la matriz de transición de B' a B es

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Observar que P es una matriz ortogonal, como se esperaba, ya que B' y B son bases ortonormales. Así,

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

de modo que (13) produce

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{14}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Por ejemplo, si los ejes se hacen girar $\theta = \pi/4$, entonces como

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

la ecuación (14) se convierte en

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por tanto, si las coordenadas iniciales de un punto Q son $(x, y) = (2, -1)$, entonces

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

de modo que las nuevas coordenadas de Q son $(x', y') = (1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$. Δ

OBSERVACIÓN. Nótese que la matriz de coeficientes en (14) es igual a la matriz estándar para el operador lineal que hace girar los vectores en R^2 por un ángulo $-\theta$ (tabla 6 de la sección 4.2). Este hecho era de esperarse, ya que la rotación de los ejes de coordenadas por un ángulo θ con los vectores de R^2 fijos tiene el mismo efecto que hacen girar los vectores por un ángulo $-\theta$ con los ejes fijos.

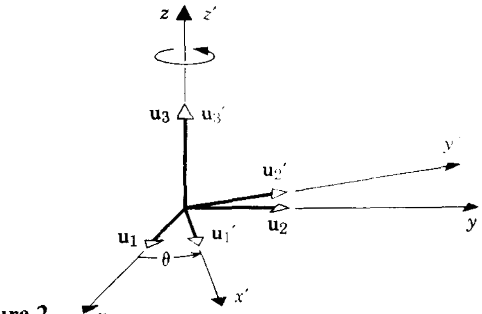


Figura 2

Ejemplo 7 (***Aplicación a la rotación de los ejes de coordenadas en el espacio tridimensional.***) Suponer que un sistema de coordenadas rectangulares xyz se hace girar alrededor de su eje z en sentido contrario a las manecillas del reloj (mirando sobre el eje z positivo) por un ángulo θ (figura 2). Si se introducen los vectores unitarios $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ a lo largo de los ejes x, y y z positivos, y los vectores unitarios $\mathbf{u}_1'$, $\mathbf{u}_2'$ y $\mathbf{u}_3'$ a lo largo de los ejes x', y' y z' positivos, la rotación se puede considerar como el cambio de la base anterior $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ a la base nueva $B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \mathbf{u}_3'\}$. En vista del ejemplo 6 debe ser obvio que

$$[\mathbf{u}_1']_B = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{u}_2']_B = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además, como $\mathbf{u}_3'$ se alarga 1 unidad sobre el eje z' positivo,

$$[\mathbf{u}_3']_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz de transición de B' a B es

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de transición de B a B' es

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(comprobar). Así, las nuevas coordenadas (x', y', z') de un punto Q se pueden calcular a partir de sus coordenadas anteriores (x, y, z) por medio de

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Delta$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.5

1. Demostrar que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal,

a) calculando A^TA.

b) usando el inciso *b*) del teorema 6.5.1.

c) usando el inciso *c*) del teorema 6.5.1.

2. Encontrar la inversa de la matriz del ejercicio 1.

3. Determinar cuáles de las siguientes matrices son ortogonales. Para las que sí sean, encontrar la inversa.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

4. Comprobar que las matrices de rotación y las matrices de reflexión en las tablas 2 y 3 de la sección 4.2 son ortogonales.

5. Hallar la matriz de coordenadas de **w** con respecto a la base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ para R^2.

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$; $\mathbf{w} = (3, -7)$ b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 8)$; $\mathbf{w} = (1, 1)$

c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2)$; $\mathbf{w} = (a, b)$

6. Encontrar la matriz de coordenadas de **v** con respecto a la base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

7. determinar la matriz de coordenadas de **p** con respecto a $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$.

a) $\mathbf{p} = 4 - 3x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1$, $\mathbf{p}_2 = x$, $\mathbf{p}_3 = x^2$

b) $\mathbf{p} = 2 - x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1 + x$, $\mathbf{p}_2 = 1 + x^2$, $\mathbf{p}_3 = x + x^2$

8. Encontrar la matriz de coordenadas para A con respecto a $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Considerar las matrices de coordenadas

$$[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [B]_S = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) Hallar $\mathbf{w}$ si S es la base del ejercicio 6(a).
b) Encontrar $\mathbf{q}$ si S es la base del ejercicio 7(a).
c) Determinar B si S es la base del ejercicio 8.

10. Considerar las bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para R^2, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) Hallar la matriz de transición de B' a B.
b) Encontrar la matriz de transición de B a B'.
c) Determinar la matriz de coordenadas $[\mathbf{w}]_B$, donde

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

y usando (11), calcular $\mathbf{w}_{B'}$.
d) Comprobar las respuestas mediante el cálculo directo de $[\mathbf{w}]_{B'}$.

11. Repetir las instrucciones del ejercicio 10 con

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

12. Considerar las bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ para R^3, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar la matriz de transición de B' a B.
b) Determinar la matriz de coordenadas $[\mathbf{w}]_B$, donde

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

y usando (11), calcular $[\mathbf{w}]_{B'}$.
c) Comprobar las respuestas mediante el cálculo directo de $[\mathbf{w}]_{B'}$.

13. Repetir las instrucciones del ejercicio 12 con el mismo vector $\mathbf{w}$, pero con

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

14. Considerar las bases $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ para P_1, en donde

$$\mathbf{p}_1 = 6 + 3x, \quad \mathbf{p}_2 = 10 + 2x, \quad \mathbf{q}_1 = 2, \quad \mathbf{q}_2 = 3 + 2x$$

a) Hallar la matriz de transición de B' a B.
b) Encontrar la matriz de transición de B a B'.
c) Calcular la matriz de coordenadas $[\mathbf{p}]_B$, donde $\mathbf{p} = -4 + x$, y usando (11), calcular $[\mathbf{p}]_{B'}$.
d) Comprobar las respuestas calculando directamente $[\mathbf{p}]_{B'}$.

15. Sea V el espacio generado por $\mathbf{f}_1 = \operatorname{sen} x$ y $\mathbf{f}_2 = \cos x$.
a) Demostrar que $\mathbf{g}_1 = 2 \operatorname{sen} x + \cos x$ y $\mathbf{g}_2 = 3 \cos x$ forman una base para V.
b) Determinar la matriz de transición de $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ a $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.
c) Encontrar la matriz de transición de B a B'.
d) Calcular la matriz de coordenadas $[\mathbf{h}]_B$, donde $\mathbf{h} = 2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$, y usando (11), calcular $[\mathbf{h}]_{B'}$.
e) Comprobar las respuestas calculando directamente $[\mathbf{h}]_{B'}$.

16. Sea un sistema de coordenadas rectangulares $x'y'$ obtenido al girar un sistema de coordenadas rectangulares xy en sentido contrario a las manecillas del reloj por un ángulo $\theta = 3\pi/4$.
a) Determinar las coordenadas $x'y'$ del punto cuyas coordenadas xy son $(-2, 6)$.
b) Encontrar las coordenadas xy del punto cuyas coordenadas $x'y'$ son $(5, 2)$.

17. Repetir el ejercicio 16 con $\theta = \pi/3$.

18. Sea un sistema de coordenadas rectangulares $x'y'z'$ obtenido al girar un sistema de coordenadas rectangulares xyz en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del eje z (mirando sobre el eje z) por un ángulo $\theta = \pi/4$.
a) Encontrar las coordenadas $x'y'z'$ del punto cuyas coordenadas xyz son $(-1, 2, 5)$.
b) Determinar las coordenadas xyz del punto cuyas coordenadas $x'y'z'$ son $(1, 6, -3)$.

19. Repetir el ejercicio 18 para una rotación de $\theta = \pi/3$ en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del eje y (mirando a lo largo del eje y positivo hacia el origen).

20. Repetir el ejercicio 18 para una rotación de $\theta = 3\pi/4$ en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del eje x (mirando a lo largo del eje x positivo hacia el origen).

21. a) Un sistema de coordenadas rectangulares $x'y'z'$ se obtiene al girar un sistema de coordenadas xyz en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del eje y por un ángulo θ (mirando a lo largo del eje y positivo hacia el origen). Encontrar una matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

donde (x, y, z) y (x', y', z') son las coordenadas del mismo punto en los sistemas xyz y $x'y'z'$, respectivamente.
b) Repetir el inciso a) para una rotación alrededor del eje x.

22. Un sistema de coordenadas rectangulares $x''y''z''$ se obtiene al girar primero un sistema de coordenadas xyz en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del eje z por un ángulo de 60° (mirando a lo largo del eje z positivo hacia el origen) para obtener un sistema de coordenadas $x'y'z'$, y luego al girar el sistema de coordenadas $x'y'z'$ en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del eje y por un ángulo de 45° (mirando a lo largo del eje y positivo hacia el origen). Encontrar una matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

donde (x, y, z) y (x'', y'', z'') son las coordenadas xyz y $x''y''z''$ y del mismo punto, respectivamente.

23. ¿Qué condiciones deben cumplir a y b para que la matriz

$$\begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{bmatrix}$$

sea ortogonal?

24. Demostrar que una matriz ortogonal A tiene una de las dos formas posibles:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$. [***Sugerencia.*** Empezar con una matriz general $A = (a_{ij})$ 2×2, y aplicar el hecho de que los vectores columna forman un conjunto ortogonal en R^2.]

25. a) Aplicar el resultado del ejercicio 24 para demostrar que la multiplicación por una matriz ortogonal 2×2 es una rotación o una rotación seguida de una reflexión alrededor del eje x.
b) Demostrar que la multiplicación por A es una rotación si $\det(A) = 1$ y una rotación seguida de una reflexión si $\det(A) = -1$.

26. Usar el resultado del ejercicio 25 para determinar si la multiplicación por A es una rotación o una rotación seguida de una reflexión. En cada caso, encontrar el ángulo de rotación.

a) $A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

27. El resultado del ejercicio 25 tiene un análogo para matrices ortogonales 3×3: se puede demostrar que la multiplicación por una matriz ortogonal A 3×3 es una rotación alrededor de algún eje fijo si $\det(A) = 1$ y que es una rotación alrededor de algún eje fijo seguida de una reflexión con respecto a algún plano de coordenadas si $\det(A) = -1$. Determinar si la multiplicación por A es una rotación o es una rotación seguida de una reflexión.

a) $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$

28. Con el resultado del ejercicio 27 y el inciso *b*) del teorema 6.5.2, demostrar que una composición de rotaciones siempre se puede efectuar mediante una simple rotación con respecto a algún eje idóneo.

29. Demostrar la equivalencia de las proposiciones *a*) y *c*) del teorema 6.5.1.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Sea R^4 con el producto interior euclidiano.
   a) Obtener un vector en R^4 que sea ortogonal a $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$ y a $\mathbf{u}_4 = (0, 0, 0, 1)$ y forme ángulos iguales con $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0)$ y $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0)$.
   b) Encontrar un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de longitud 1 que sea ortogonal a los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_4$ del inciso a) y tal que el coseno del ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}_2$ sea el doble del coseno del ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}_3$.

2. Demostrar que si $\mathbf{x}$ es un vector diferente de cero en R^n, entonces la matriz $n \times n$

$$A = I_n - \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}\mathbf{x}^T$$

es ortogonal y simétrica.

3. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Demostrar que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es una solución del sistema si y sólo si el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es ortogonal a todo vector renglón de A con el producto interior euclidiano sobre R^n.

4. Aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, entonces

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

5. Demostrar que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores en un espacio con producto interior y c es cualquier escalar, entonces

$$\|c\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = c^2\|\mathbf{x}\|^2 + 2c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

6. Sea R^3 con el producto interior euclidiano. Encontrar dos vectores de longitud 1 que sean ortogonales a todos y cada uno de los vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (-2, -1, 2)$ y $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 1)$.

7. Encontrar un producto interior euclidiano ponderado sobre R^n tal que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$
$$\mathbf{v}_2 = (0, \sqrt{2}, 0, \ldots, 0)$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 0, \sqrt{3}, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_n = (0, 0, 0, \ldots, \sqrt{n})$$

formen un conjunto ortonormal.

8. ¿Existe algún producto interior euclidiano ponderado sobre R^2 para el que los vectores $(1, 2)$ y $(3, -1)$ formen un conjunto ortonormal? Justificar la respuesta.

9. Demostrar: Si Q es una matriz ortogonal, entonces cada elemento de Q es igual a su cofactor si $\det(Q) = 1$ y es el negativo de su cofactor si $\det(Q) = -1$.

10. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en un espacio V con producto interior, entonces $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se pueden considerar como los lados de un "triángulo" en V (figura 1). Demostrar que la ley de los cosenos se cumple para cualquiera de estos triángulos; es decir, $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

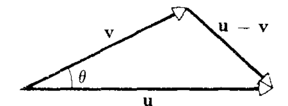


Figura 1

11. a) En R^3, los vectores $(k, 0, 0)$, $(0, k, 0)$ y $(0, 0, k)$ forman las aristas de un cubo con diagonal (k, k, k) (figura 4 de la sección 3.3). De manera semejante, en R^n, los vectores

$$(k, 0, 0, \ldots, 0), \quad (0, k, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, 0, 0, \ldots, k)$$

se pueden considerar como las aristas de un "cubo" con diagonal $(k, k, \ldots, k)$. Demostrar que cada una de las aristas anteriores forma un ángulo igual a θ con la diagonal, donde $\cos\theta = 1/\sqrt{n}$.

b) ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo.)*** ¿Qué sucede con el ángulo θ en el inciso a) cuando la dimensión de R^n tiende a infinito?

12. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en un espacio con producto interior.
a) Demostrar que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ si y sólo si $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son ortogonales.
b) Proporcionar una interpretación geométrica del resultado anterior en R^2 con el producto interior euclidiano.

13. Sea $\mathbf{u}$ un vector en un espacio V con producto interior, y sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base ortonormal para V. Demostrar que si α_i es el ángulo entre $\mathbf{u} + \mathbf{v}_i$, entonces

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cdots + \cos^2\alpha_n = 1$$

14. Demostrar: Si $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_1$ y $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2$ son dos productos interiores sobre un espacio vectorial V, entonces la cantidad $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_1 + \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2$ también es un producto interior.

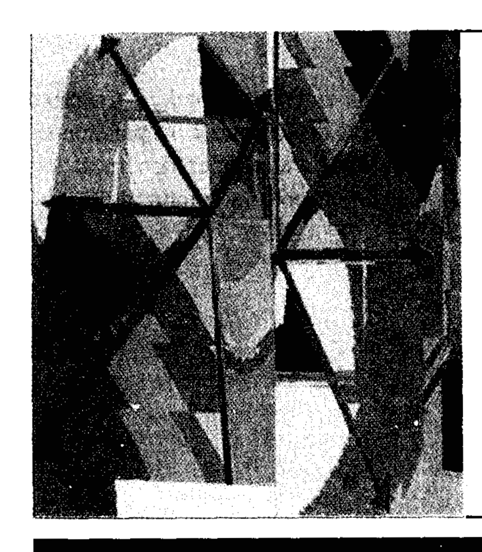
15. Demostrar que el producto interior sobre R^n generado por cualquier matriz ortogonal es el producto interior euclidiano.

16. Encontrar a, b y c tales que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ b & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ c & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Son únicos los valores de a, b y c? Explicar la respuesta.

17. Demostrar el inciso c) del teorema 6.2.5.



CAPÍTULO 7

EIGENVALORES, EIGENVECTORES

7.1 EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

Si A es una matriz $n \times n$ y $\mathbf{x}$ es un vector en R^n, entonces no hay ninguna relación geométrica general entre el vector $\mathbf{x}$ y el vector $A\mathbf{x}$ (figura 1a). Sin embargo, a menudo existen ciertos vectores $\mathbf{x}$ diferentes de cero tales que $\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x}$ son múltiplos escalares entre sí (figura 1b). Estos vectores surgen de manera natural en el estudio de vibraciones, sistemas eléctricos, genética, reacciones químicas, mecánica cuántica, esfuerzo mecánico, economía y geometría. En esta sección se mostrará cómo encontrar estos vectores y, en secciones posteriores, se abordarán algunas de sus aplicaciones.

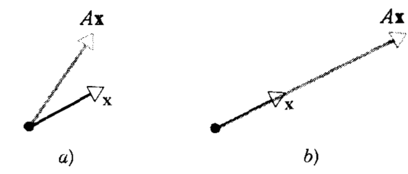


Figura 1

REPASO DE EIGENVECTORES Y EIGENVALORES

Se empezará con un repaso de algunos conceptos mencionados en las secciones 2.3. y 4.3.

> **Definición.** Si A es una matriz $n \times n$, entonces un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero en R^n se denomina ***eigenvector*** de A si $A\mathbf{x}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{x}$; es decir,
>
> $$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$
>
> para algún escalar λ. El escalar λ se denomina ***eigenvalor*** de A, y se dice que $\mathbf{x}$ es un eigenvector de A ***correspondiente*** a λ.

En R^2 y R^3, la multiplicación por A mapea cada eigenvector $\mathbf{x}$ de A (en caso de haber alguno) sobre la misma recta que pasa por el origen que $\mathbf{x}$. Dependiendo del signo y la magnitud del eigenvalor λ correspondiente a $\mathbf{x}$, el operador lineal $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ hace que $\mathbf{x}$ se comprima o alargue por un factor λ, con un cambio de dirección en caso de que sea λ negativo (figura 2).

Figura 2

x λx λx x x λx x λx

$0 \leq \lambda \leq 1$ $\lambda \geq 1$ $-1 \leq \lambda \leq 0$ $\lambda \leq -1$

Ejemplo 1 El vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un eigenvector de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

correspondiente al eigenvalor $\lambda = 3$, ya que

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x} \quad \Delta$$

Para encontrar los eigenvalores de una matriz A $n \times n$, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ se vuelve a escribir como

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

o bien, de manera equivalente,

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Para que λ sea un eigenvalor, debe existir una solución diferente de cero para esta ecuación. Sin embargo, por el teorema 6.2.7, la ecuación (1) tiene una solución diferente de cero si y sólo si

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0}$$

Esta expresión se denomina ***ecuación característica*** de A; los escalares que satisfacen esta ecuación son los eigenvalores de A. Al desarrollar $\det(\lambda I - A)$ se obtiene un polinomio en λ, denominado ***polinomio característico*** de A.

Se puede demostrar (ejercicio 15) que si A es una matriz $n \times n$, entonces el polinomio característico de A es de grado n y el coeficiente de λ^n es 1; es decir, el polinomio característico de una matriz $n \times n$ es de la forma

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Por el teorema fundamental del álgebra, la ecuación característica

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

tiene cuando mucho n soluciones distintas, por lo que una matriz $n \times n$ tiene a lo sumo n eigenvalores distintos.

Sería conveniente que el lector revise el ejemplo 6 de la sección 2.3, donde se encontraron los eigenvalores de una matriz 2×2 resolviendo la ecuación característica. En el siguiente ejemplo se usa una matriz 3×3.

Ejemplo 2 Encontrar los eigenvalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución. El polinomio característico de A es

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Por consiguiente, los eigenvalores de A deben satisfacer la ecuación cúbica

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \tag{2}$$

Para resolver esta ecuación se empezará buscando soluciones enteras. Esta tarea se puede simplificar bastante aprovechando el hecho de que todas las soluciones enteras (en caso de que haya) de una ecuación polinomial con coeficientes enteros

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

deben ser divisores del término constante, c_n. Así, las únicas soluciones enteras posibles de (2) son los divisores de -4, es decir, ± 1, ± 2, ± 4. Sustituyendo sucesivamente estos valores en (2) se observa que $\lambda = 4$ es una solución entera. En consecuencia, $\lambda - 4$ debe ser un factor del miembro izquierdo de (2). Dividiendo $\lambda - 4$ entre $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$ se observa que (2) se puede volver a escribir como

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Así, las otras soluciones de (2) satisfacen la ecuación de segundo grado que se

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

puede resolver aplicando la fórmula cuadrática. Así, los eigenvalores de A son

$$\lambda = 4, \qquad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \qquad \text{y} \qquad \lambda = 2 - \sqrt{3} \quad \Delta$$

EIGENVALORES DE MATRICES TRIANGULARES

Ejemplo 3 Encontrar los eigenvalores de la matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Solución. Recordando que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal (teorema 2.2.2), se obtiene

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix}$$
$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})$$

Así, la ecuación característica es

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

y los eigenvalores son

$$\lambda = a_{11}, \qquad \lambda = a_{22}, \qquad \lambda = a_{33}, \qquad \lambda = a_{44}$$

que son precisamente los elementos de la diagonal de A. Δ

El siguiente teorema general debe ser evidente a partir de los cálculos efectuados en el ejemplo precedente.

Teorema 7.1.1. *Si A es una matriz triangular (triangular superior, triangular inferior o diagonal) $n \times n$, entonces los eigenvalores de A son los elementos de la diagonal principal de A.*

Ejemplo 4 Por inspección, los eigenvalores de la matriz triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

son $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{2}{3}$, y $\lambda = -\frac{1}{4}$. Δ

OBSERVACIÓN. En problemas reales, la matriz A a menudo es tan grande que el cálculo de la ecuación característica no es práctico. Como resultado, para obtener eigenvalores se aplican varios métodos de aproximación.

EIGENVALORES COMPLEJOS

Es posible que la ecuación característica de una matriz con elementos reales tenga soluciones complejas. Por ejemplo, el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

es

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

de modo que la ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$, cuyas soluciones son los números imaginarios $\lambda = i$ y $\lambda = -i$. Así, es forzoso considerar eigenvalores complejos, inclusive para matrices reales. Esto, a su vez, conduce a considerar la posibilidad de espacios vectoriales complejos; es decir, espacios vectoriales en que se permite que los escalares asuman valores complejos. Estos espacios vectoriales se analizarán en el capítulo 10. Por ahora se permitirán eigenvalores complejos, pero el análisis de eigenvectores se limitará a matrices con eigenvalores reales.

El siguiente teorema resume el análisis realizado hasta el momento.

Teorema 7.1.2. *Si A es una matriz $n \times n$ y λ es un número real, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

a) *λ es un eigenvalor de A:*
b) *El sistema de ecuaciones $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene soluciones no triviales.*
c) *En R^n existe un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.*
d) *λ es una solución de la ecuación característica $\det(\lambda I - A) = 0$.*

DETERMINACIÓN DE BASES PARA EIGENESPACIOS

Ahora que ya se sabe cómo obtener los eigenvalores, se abordará el problema de determinar eigenvectores. Los eigenvectores de A correspondientes a un eigenvalor son los vectores $\mathbf{x}$ diferentes de cero que satisfacen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. De manera equivalente, los eigenvectores correspondientes a λ son los vectores diferentes de cero en el espacio solución de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Este espacio solución se denomina ***eigenespacio*** de A correspondiente a λ.

Ejemplo 5 Encontrar bases para los eigenespacios de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución. La ecuación característica de A es $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$ o bien, en forma factorizada, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ (comprobar); así los eigenvalores de A son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$, de modo que existen dos eigenespacios de A.

Por definición,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector de A correspondiente a λ si y sólo si $\mathbf{x}$ es una solución no trivial de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$; es decir, de

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Si $\lambda = 2$, entonces (3) se convierte en

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema se obtiene (comprobar)

$$x_1 = -s, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = s$$

Así, los eigenvectores de A correspondientes a $\lambda = 2$ son los vectores diferentes de cero de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes, estos vectores forman una base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 2$.

Si $\lambda = 1$, entonces (3) se convierte en

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema se obtiene (comprobar)

$$x_1 = -2s, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = s$$

Así, los eigenvectores correspondientes a $\lambda = 1$ son los vectores diferentes de cero de la forma

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 1$. Δ

EIGENVALORES DE LAS POTENCIAS DE UN MATRIZ

Una vez que se han determinado los eigenvalores y los eigenvectores de una matriz A, es fácil encontrar los eigenvalores y los eigenvectores de cualquier potencia entera positiva de A; por ejemplo, si λ es un eigenvalor de A y $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente, entonces

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$$

lo cual demuestra que λ^2 es un eigenvalor de A^2 y que $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente. En general, se tiene el siguiente resultado

Teorema 7.1.3. *Si k es un entero positivo, λ es un eigenvalor de una matriz A y $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente, entonces λ^k es un eigenvalor de A^k y $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente.*

Ejemplo 6 En el ejemplo 5 se demostró que los eigenvalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

son $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$, de modo que por el teorema 7.1.3 tanto $\lambda = 2^7 = 128$ como $\lambda = 1^7 = 1$ son eigenvalores de A^7. También se demostró que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

son eigenvectores de A correspondientes al eigenvalor $\lambda = 2$, de modo que por el teorema 7.1.3 también son eigenvectores de A^7 correspondientes a $\lambda = 2^7 = 128$. De manera semejante, el eigenvector

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de A correspondiente al eigenvalor $\lambda = 1$ también es un eigenvector de A^7 correspondiente a $\lambda = 1^7 = 1$. Δ

EIGENVALORES E INVERTIBILIDAD

El siguiente teorema establece una relación entre los eigenvalores y la invertibilidad de una matriz.

Teorema 7.1.4. *Una matriz cuadrada A es invertible sí y sólo si $\lambda = 0$ no es un eigenvalor de A.*

Demostración. Supóngase que A es una matriz $n \times n$ y obsérvese primero que $\lambda = 0$ es una solución de la ecuación característica

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

si y sólo si el término constante c_n es cero. Así, basta demostrar que A es invertible si y sólo si $c_n \neq 0$. Pero

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

o bien, haciendo $\lambda = 0$,

$$\det(-A) = c_n \qquad \text{o} \qquad (-1)^n \det(A) = c_n$$

Por la última ecuación se concluye que $\det(A) = 0$ si y sólo si $c_n = 0$, y esto a su vez significa que A es invertible si y sólo si $c_n \neq 0$. ☐

Ejemplo 7 La matriz A del ejemplo 5 es invertible, ya que tiene eigenvalores $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$, ninguno de los cuales es cero. Se deja que el lector verifique esta conclusión demostrando que $\det(A) \neq 0$. Δ

RESUMEN El teorema 7.1.4 permite agregar otro resultado al teorema 6.4.5.

Teorema 7.1.5. *Si A es una matriz $n \times n$, y si $T_A{:}R^n \to R^n$ es la multiplicación por A, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *A es invertible.*
b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.*
c) *La forma escalonada reducida de A es I_n.*
d) *A se puede escribir como un producto de matrices elementales.*
e) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.*
f) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.*
g) *$\det(A) \neq 0$.*
h) *El rango de T_A es R^n.*
i) *T_A es uno a uno.*
j) *Los vectores columna de A son linealmente independientes.*
k) *Los vectores renglón de A son linealmente independientes.*
l) *Los vectores columna de A generan a R^n.*
m) *Los vectores renglón de A generan a R^n.*
n) *Los vectores columna de A forman una base para R^n.*
o) *Los vectores renglón de A forman una base para R^n.*
p) *El rango de A es n.*
q) *La nulidad de A es 0.*
r) *El complemento ortogonal del espacio nulo de A es R^n.*
s) *El complemento ortogonal del espacio renglón de A es $\{\mathbf{0}\}$.*
t) *A^TA es invertible.*
u) *$\lambda = 0$ no es un eigenvalor de A.*

Este teorema relaciona los temas más importantes estudiados hasta el momento.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.1

1. Encontrar las ecuaciones características de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Encontrar los eigenvalores de las matrices del ejercicio 1.

3. Encontrar bases para los eigenespacios de las matrices del ejercicio 1.

4. Determinar las ecuaciones características de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

5. Obtener los eigenvalores de las matrices del ejercicio 4.

6. Hallar las bases de los eigenespacios de las matrices del ejercicio 4.

7. Encontrar las ecuaciones características de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

8. Determinar los eigenvalores de las matrices del ejercicio 7.

9. Encontrar las bases de los eigenespacios de las matrices del ejercicio 7.

10. Por inspección, hallar los eigenvalores de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

11. Encontrar los eigenvalores de A^9 para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Encontrar los eigenvalores y bases para los eigenespacios de A^{25} para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

13. Sea A una matriz 2×2. La recta que pasa por el origen de R^2 es ***invariante*** bajo A si $A\mathbf{x}$ está sobre la recta cuando $\mathbf{x}$ también lo está. Encontrar las ecuaciones de las rectas en R^2, en caso de haberlas, que son invariantes bajo la matriz dada.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

14. Encontrar $\det(A)$ dado que A tiene a $p(\lambda)$ como su polinomio característico.

a) $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 5$ b) $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + 7$

[***Sugerencia.*** Véase la demostración del teorema 7.1.4.]

15. Sea A una matriz $n \times n$.

a) Demostrar que el polinomio característico de A es de grado n.

b) Demostrar que el coeficiente de λ^n en el polinomio característico es 1.

16. Demostrar que la ecuación característica de una matriz A 2×2 se puede expresar como $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, donde tr($A$) es la traza de A.

17. Usando el resultado del ejercicio 16, demostrar que si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces las soluciones de la ecuación característica de A son

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left[(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\,\right]$$

Usando el resultado anterior, demostrar que A

a) tiene dos eigenvalores reales distintos si $(a - d)^2 + 4bc > 0$.
b) tiene un eigenvalor real si $(a - d)^2 + 4bc = 0$.
c) no tiene eigenvalores reales si $(a - d)^2 + 4bc < 0$.

18. Sea A la matriz del ejercicio 17. Demostrar que si $(a - d)^2 + 4bc > 0$ y $b \neq 0$, entonces los eigenvectores de A correspondientes a los eigenvalores

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\left[(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\,\right] \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\left[(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\,\right]$$

son

$$\begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

19. Demostrar: Si a, b, c y d son enteros tales que $a + b = c + d$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores enteros, a saber, $\lambda_1 = a + b$ y $\lambda_2 = a - c$. [***Sugerencia.*** Véase el ejercicio 17.]

20. Demostrar: Si λ es un eigenvalor de una matriz invertible A y $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente, entonces $1/\lambda$ es un eigenvalor de A^{-1} y $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente.

21. Demostrar: Si λ es un eigenvalor de A, $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente y s es un escalar, entonces $\lambda - s$ es un eigenvalor de $A - sI$ y $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente.

22. Encontrar los eigenvalores y bases para los eigenespacios de

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Luego, usando los ejercicios 20 y 21, encontrar los eigenvalores y bases para los eigenespacios de

a) A^{-1}. b) $A - 3I$. c) $A + 2I$.

23. a) Demostrar que si A es una matriz cuadrada, entonces A y A^T tienen los mismos eigenvalores. [***Sugerencia.*** Considerar la ecuación característica $\det(\lambda I - A) = 0$.]
b) Demostrar que A y A^T no necesariamente tienen los mismos eigenespacios. [***Sugerencia.*** Usando el resultado del ejercicio 18, encontrar una matriz 2×2 para la cual A y A^T tengan eigenespacios diferentes.]

7.2 DIAGONALIZACIÓN

En esta sección se verá cómo encontrar un base para R^n integrada por eigenvectores de una matriz dada A $n \times n$. Las bases se pueden usar para estudiar las propiedades geométricas de A y para simplificar varios cálculos numéricos donde aparece A. Estas bases también revisten importancia física en una amplia gama de aplicaciones, algunas de las cuales serán consideradas después en este texto.

EL PROBLEMA DE LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

El objetivo principal de esta sección es mostrar que los dos problemas siguientes, que a simple vista parecen muy diferentes, en realidad son equivalentes.

Problema del eigenvector. Dada una matriz A $n \times n$, ¿existe una base para R^n integrada por eigenvectores de A?

Problema de diagonalización (Forma matricial). Dada una matriz A $n \times n$, ¿existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal?

El segundo problema sugiere la siguiente terminología.

Definición. Se dice que una matriz cuadrada A es ***diagonalizable*** si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal; se dice que la matriz P ***diagonaliza*** a A.

El siguiente teorema muestra que el problema del eigenvector y el problema de diagonalización son equivalentes.

Teorema 7.2.1. *Si A es una matriz $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) A es diagonalizable.
b) A tiene n eigenvectores linealmente independientes.

Demostración de a $\Rightarrow$ b): Como se supone que A es diagonalizable, entonces existe una matriz invertible

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, por ejemplo, $P^{-1}AP = D$, donde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Por la fórmula $P^{-1}AP = D$ se deduce que $AP = PD$; es decir,

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Si ahora $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ denotan los vectores columna de P, entonces por (1) las columnas sucesivas de AP son $\lambda_1\mathbf{p}_1, \lambda_2\mathbf{p}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{p}_n$. Sin embargo, por la fórmula (3) de la sección 1.3, las columnas sucesivas de AP son $A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n$. Así, se debe tener

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \qquad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n \tag{2}$$

Como P es invertible, no todos sus vectores columna son cero; así, por (2) se concluye que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son eigenvalores de A, y que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ son los eigenvectores correspondientes. Como P es invertible, por el teorema 7.1.5 se concluye que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ son linealmente independientes. Por tanto, A tiene n eigenvectores linealmente independientes.

$b \Rightarrow a$: Supóngase que A tiene n eigenvectores linealmente independientes, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, con los eigenvalores correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, y sea

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz cuyos vectores columna son $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$. Por la fórmula (3) de la sección 1.3, los vectores columna del producto AP son

$$A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n$$

Pero

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n$$

de modo que

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \end{aligned} \tag{3}$$

donde D es la matriz diagonal que tiene los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sobre la diagonal principal. Como los vectores columna de P son linealmente independientes, P es invertible; así, (3) se puede volver a escribir como $P^{-1}AP = D$; es decir, A es diagonalizable. ☐

PROCEDIMIENTO PARA DIAGONALIZAR UNA MATRIZ

El teorema precedente garantiza que una matriz A $n \times n$ con n eigenvectores linealmente independientes es diagonalizable, y la demostración proporciona el siguiente método para diagonalizar a A.

Paso 1. Encontrar n eigenvectores linealmente independientes de A, por ejemplo, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$.
Paso 2. Formar la matriz P con $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ como sus vectores columna.
Paso 3. Entonces, la matriz $P^{-1}AP$ será diagonal con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ como sus elementos diagonales sucesivos, donde λ_i es el eigenvalor correspondiente a $\mathbf{p}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Para efectuar el paso 1 de este procedimiento, primero es necesario determinar si una matriz dada A $n \times n$ tiene n eigenvectores linealmente independientes, y luego se requiere un método para encontrarlos. Ambos problemas se pueden manejar a la vez determinando las bases de los eigenespacios de A. Después, en esta sección se mostrará que los vectores básicos, como conjunto combinado, son linealmente independientes, de modo que si en total hay n vectores así, entonces A es diagonalizable y los n vectores básicos se pueden usar como los vectores columna de la matriz de diagonalización P. Si hay menos de n vectores básicos, entonces la matriz A no es diagonalizable.

Ejemplo 1 Encontrar una matriz P que diagonalice a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución. En el ejemplo 5 de la sección precedente, se encontró que la ecuación característica de A es

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

y se determinaron las siguientes bases para los eigenespacios:

$$\lambda = 2: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1: \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En total hay tres vectores básicos, de modo que la matriz A es diagonalizable y

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza a A. Como comprobación, el lector debe verificar que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

No existe ningún orden de preferencia para el orden de las columnas de P. Como el i-ésimo elemento de la diagonal de $P^{-1}AP$ es un eigenvalor para el i-ésimo vector columna de P, al cambiar el orden de las columnas de P simplemente se cambia el orden de los eigenvalores sobre la diagonal de $P^{-1}AP$. Entonces, si en el ejemplo 1 se hubiera escrito

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 1 se hubiera obtenido

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2 Encontrar una matriz P que diagonalice a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución. El polinomio característico de A es

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 3 & -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

de modo que la ecuación característica es

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Así, los eigenvalores de A son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$. Se deja para el lector demostrar que bases para los eigenespacios son

$$\lambda = 1: \qquad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2: \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como A es una matriz 3×3 y en total sólo hay dos vectores básicos, entonces A no es diagonalizable.

Otra solución. Si sólo se quiere determinar si una matriz es diagonalizable y no importa determinar realmente una matriz de diagonalización P, entonces no es necesario calcular las bases de los eigenespacios; basta encontrar las dimensiones de los eigenespacios. Para este ejemplo, el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 1$ es el espacio solución del sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes tiene rango 2 (comprobar). Así, la nulidad de esta matriz es 1 y, por el teorema 5.6.4, el espacio solución es unidimensional.

El eigenespacio correspondiente a $\lambda = 2$ es el espacio solución del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz de coeficientes también tiene rango 2 y nulidad 1 (comprobar), de modo que el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 2$ también es unidimensional. Como los eigenespacios producen un total de dos vectores básicos, la matriz A no es diagonalizable. Δ

En el ejemplo 1 se establece la hipótesis de que los vectores columna de P, que están integrados por vectores básicos de los distintos eigenespacios de A, son linealmente independientes. En el siguiente teorema se aborda esta cuestión.

Teorema 7.2.2. *Si* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *son eigenvectores de* A *correspondientes a eigenvalores distintos* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *entonces* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ los eigenvectores de A correspondientes a eigenvalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Se supondrá que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente dependientes y se llegará a una contradicción. Entonces la conclusión será que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes.

Como por definición un eigenvector es diferente de cero, $\{\mathbf{v}_1\}$es linealmente independiente. Sea r el mayor entero tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ sea linealmente independiente. Como se está suponiendo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente dependiente, r satisface $1 \leq r < k$. Además, por la definición de r, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r+1}\}$ es linealmente dependiente. Así, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$, no todos iguales a cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Multiplicando por A ambos miembros de (4) y usando

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{v}_{r+1} = \lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}$$

se obtiene

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \tag{5}$$

Multiplicando por λ_{r+1} ambos miembros de (4) y restando de (5) la ecuación resultante, se obtiene

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente, esta ecuación indica que

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \cdots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

y como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}$ son distintos, se concluye que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0 \tag{6}$$

Sustituyendo estos valores en (4) se obtiene

$$c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}$$

Como el eigenvector $\mathbf{v}_{r+1}$ es diferente de cero, se concluye que

$$c_{r+1} = 0 \tag{7}$$

Las ecuaciones (6) y (7) contradicen el hecho de que no todos los $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$, son cero; esto completa la demostración. □

OBSERVACIÓN. El teorema 7.2.2 es un caso especial de un resultado más general: Supóngase que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son eigenvalores distintos y que en cada uno de los eigenespacios correspondientes se elige un conjunto linealmente independiente. Si después estos vectores se unen en un solo conjunto, el resultado aún es un conjunto linealmente independiente. Por ejemplo, si se eligen tres vectores linealmente independientes de un eigenespacio y dos vectores linealmente independientes de otro, entonces los cinco vectores forman un conjunto linealmente independiente. Se omite la demostración.

Como una consecuencia del teorema 7.2.2 se obtiene el siguiente resultado importante.

Teorema 7.2.3. *Si una matriz A $n \times n$ tiene n eigenvalores distintos, entonces A es diagonalizable.*

Demostración. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces por el teorema 7.2.2 se tiene que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes. Así, A es diagonalizable debido al teorema 7.2.1. □

Ejemplo 3 En el ejemplo 2 de la sección precedente se vio que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

tiene tres eigenvalores distintos, $\lambda = 4$, $\lambda = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda = 2 - \sqrt{3}$. Por consiguiente, A es diagonalizable. Además,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

para alguna matriz invertible P. Si se desea, la matriz P puede determinarse usando el método del ejemplo 1 de esta sección. Δ

Ejemplo 4 Por el teorema 7.1.1, los eigenvalores de una matriz triangular son los elementos de su diagonal principal. Así, una matriz triangular con elementos distintos en la diagonal principal es diagonalizable. Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonalizable. Δ

MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA Y MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA

El teorema 7.2.3 no determina completamente el problema de diagonalización, ya que es posible que una matriz A $n \times n$ sea diagonalizable sin tener n eigenvalores distintos. En el ejemplo 1 se vio esto, donde la matriz dada 3×3 tenía sólo dos eigenvalores distintos, a pesar de lo cual era diagonalizable. Lo que realmente importa para que una matriz sea diagonalizable son las dimensiones de los eigenespacios: la suma de estas dimensiones debe ser cuando mucho n a fin de que una matriz $n \times n$ sea diagonalizable. Los ejemplos 1 y 2 ilustran este hecho, las matrices de estos ejemplos tienen la misma ecuación característica y los mismos eigenvalores, pero la matriz del ejemplo 1 es diagonalizable porque la suma de las dimensiones de los eigenespacios es 3, y la matriz del ejemplo 2 no es diagonalizable porque la suma de las dimensiones de los eigenespacios sólo es igual a 2.

La profundización en el estudio de las condiciones para diagonalización se deja para cursos más avanzados, aunque se mencionará un teorema importante que dará una comprensión más completa de las condiciones. Se puede demostrar que si λ_0 es un eigenvalor de A, entonces la dimensión del eigenespacio que corresponde a λ_0 no puede exceder el número de veces que $\lambda - \lambda_0$ aparece como factor en el polinomio característico de A. Así, en los ejemplos 1 y 2 el polinomio característico es

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Por tanto, el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 1$ es cuando mucho (y, por tanto, exactamente) unidimensional y el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 2$ es a lo sumo bidimensional. En el ejemplo 1, el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 2$ en realidad es de dimensión 2, lo cual da por resultado condiciones para la diagonalización, pero en el ejemplo 2 el eigenespacio sólo es de dimensión 1, lo cual indica que no hay condiciones para la diagonalización.

Existe una terminología que relaciona las ideas anteriores. Si λ_0 es un eigenvalor de una matriz A $n \times n$, entonces la dimensión del eigenespacio corres-

pondiente a λ_0 se denomina ***multiplicidad geométrica*** de λ_0, y el número de veces que $\lambda - \lambda_0$ aparece como factor en el polinomio característico de A se denomina ***multiplicidad algebraica*** de A. El siguiente teorema, que se enuncia sin demostración, resume el análisis precedente.

Teorema 7.2.4. *Si A es una matriz cuadrada, entonces:*

a) *Para todo eigenvalor de A la multiplicidad geométrica es menor o igual que la multiplicidad algebraica.*

b) *A es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad algebraica para todo eigenvalor.*

CÁLCULO DE LAS POTENCIAS DE UNA MATRIZ

En matemáticas aplicadas se presentan muchos problemas en los que es necesario calcular potencias grandes de una matriz cuadrada. Esta sección concluirá mostrando cómo se puede usar la diagonalización para simplificar los cálculos.

Si A es una matriz $n \times n$ y P es una matriz invertible, entonces

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$$

De manera más general, para cualquier entero positivo k

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP \tag{8}$$

Por la ecuación (8) se concluye que si A es diagonalizable y $P^{-1}AP = D$ es una matriz diagonal, entonces

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k \tag{9}$$

Despejando A^k de esta ecuación se obtiene

$$\boxed{A^k = PD^kP^{-1}} \tag{10}$$

La última ecuación expresa la k-ésima potencia de A en términos de la k-ésima potencia de la matriz diagonal D. Pero calcular D^k es fácil; por ejemplo, si

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5 Usando (10), encontrar A^{13}, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución. En el ejemplo 1 se mostró que la matriz A es diagonalizada por

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y que

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, por (10),

$$A^{13} = PD^{13}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

OBSERVACIÓN. Con el método del ejemplo precedente casi todo el trabajo consiste en diagonalizar A. Una vez hecho ésto, se puede usar para calcular cualquier potencia de A. Así, para calcular A^{1000} basta cambiar el exponente de 13 a 1000 en la expresión (11).

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.2

1. Sea A una matriz 6×6 con ecuación característica $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3 = 0$. ¿Cuáles son las dimensiones posibles para los eigenespacios de A?

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar los eigenvalores de A.
b) Para cada eigenvalor λ, determinar el rango de la matriz $\lambda I - A$.
c) ¿Es diagonalizable A? Justificar la respuesta.

En los ejercicios del 3 al 7, usando el método del ejercicio 2, determinar si la matriz es diagonalizable.

3. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 8 al 11, hallar una matriz P que diagonalice a A, y determinar $P^{-1}AP$.

8. $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ **9.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ **10.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **11.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 12 al 17, determinar si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encontrar una matriz P que diagonalice a A, y determinar $P^{-1}AP$.

12. $A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$ **13.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **16.** $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

18. Con el método del ejercicio 5, calcular A^{10}, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

19. Usar el método del ejercicio 5 para calcular A^{11}, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

20. En cada inciso, calcular la potencia indicada de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) A^{1000} b) A^{-1000} c) A^{2301} d) A^{-2301}

21. Encontrar A^n si n es un entero positivo y

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

22. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Demostrar las siguientes proposiciones:
a) A es diagonalizable si $(a - d)^2 + 4bc > 0$.
b) A no es diagonalizable si $(a - d)^2 + 4bc < 0$.
[***Sugerencia.*** Véanse los ejercicios 17 y 18 de la sección 7.1.]

23. En el caso en que la matriz A del ejercicio 22 es diagonalizable, encontrar una matriz P que diagonalice a A.

24. Demostrar que si A es una matriz diagonalizable, entonces el rango de A es el número de eigenvalores diferentes de cero de A.

25. Demostrar: Si A es invertible y diagonalizable, entonces A^{-1} es diagonalizable y una matriz P que diagonalice a A también diagonaliza a A^{-1}.

7.3 DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

En esta sección se abordará el problema de determinar una base ortonormal para R^n con el producto interior euclidiano, integrada por eigenvectores de una matriz dada A $n \times n$. El trabajo ya realizado sobre matrices simétricas y matrices ortogonales desempeñará un papel importante aquí.

PROBLEMA DE LA DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL DE UNA MATRIZ

El primer objetivo de esta sección es demostrar que los dos problemas siguientes son equivalentes.

> ***Problema del eigenvector ortonormal.*** Cada una matriz A de $n \times n$, ¿existe una base ortonormal para R^n con el producto interior euclidiano integrada por eigenvectores de A?

> ***Problema de la diagonalización ortogonal (forma matricial).*** Dada una matriz A $n \times n$, ¿existe una matriz ortogonal P tal que la matriz $P^{-1}AP = P^TAP$ es diagonal? En caso de que exista la matriz, entonces se dice que A es ***diagonalizable ortogonalmente***, y se dice que P ***diagonaliza ortogonalmente*** a A.

Para el segundo problema es necesario considerar dos preguntas:

- ¿Qué matrices son diagonalizables ortogonalmente?
- ¿Cómo encontrar una matriz ortogonal a fin de efectuar la diagonalización?

Con respecto a la primera pregunta, se observa que no hay ninguna posibilidad de diagonalizar ortogonalmente una matriz A a menos de que A sea simétrica (es decir, $A = A^T$). Para darse cuenta de este hecho, supóngase que

$$P^TAP = D \tag{1}$$

donde P es una matriz ortogonal y D es una matriz diagonal. Como P es ortogonal, $PP^T = P^TP = I$, de modo que (1) se puede escribir como

$$A = PDP^T \tag{2}$$

Como D es una matriz diagonal, se tiene $D = D^T$, de modo que al transponer ambos miembros de (2) se obtiene

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^TD^TP^T = PDP^T = A$$

así que A debe ser simétrica.

CONDICIONES PARA DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

El siguiente teorema muestra que toda matriz simétrica es, de hecho, diagonalizable ortogonalmente. En este teorema, y durante el resto de esta sección, *ortogonal* significará ortogonal con respecto al producto interior euclidiano sobre R^n.

Teorema 7.3.1. *Si A es una* matriz $n \times n$, *entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *A es diagonalizable ortogonalmente.*
b) *A tiene un conjunto ortonormal de n eigenvectores.*
c) *A es simétrica.*

Demostración de a $\Rightarrow$ *b*: Como A es diagonalizable ortogonalmente, existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Como se vio en la demostración del teorema 7.2.1, los n vectores columna de P son eigenvectores de A. Puesto que P es ortogonal, estos vectores columna son ortonormales (véase el teorema 6.5.1), de modo que A tiene n eigenvectores ortonormales.

$b \Rightarrow a$ Supóngase que A tiene un conjunto ortonormal de n eigenvectores $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$. Como se vio en la demostración del teorema 7.2.1, la matriz P con estos eigenvectores como columnas diagonaliza a A. Debido a que estos eigenvectores son ortonormales, P es ortogonal y, por tanto, diagonaliza ortogonalmente a A.

$a \Rightarrow c$) En la demostración de $a \Rightarrow b$ se probó que una matriz A $n \times n$ diagonalizable ortogonalmente es diagonalizada ortogonalmente por una matriz P $n \times n$ cuyas columnas forman un conjunto ortonormal de eigenvectores de A. Sea D la matriz diagonal

$$D = P^{-1}AP$$

Así,

$$A = PDP^{-1}$$

o bien, ya que P es ortogonal,

$$A = PDP^T$$

Por consiguiente,

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^TP^T = PDP^T = A$$

lo cual demuestra que A es simétrica.

$c \Rightarrow a$) La demostración de esta parte rebasa el alcance de este texto, por lo que se omitirá. □

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS MATRICES SIMÉTRICAS

El siguiente objetivo es establecer un procedimiento para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica, pero antes de hacerlo se requiere un teorema crucial sobre eigenvalores y eigenvectores de matrices simétricas.

> **Teorema 7.3.2.** *Si A es una matriz simétrica, entonces:*
>
> *a*) *Todos los eigenvalores de A son números reales.*
> *b*) *Eigenvectores de eigenespacios diferentes son ortogonales.*

Demostración de a). La demostración del inciso *a*), que requiere resultados sobre espacios vectoriales complejos, se analizará en la sección 10.6.

Demostración de b). Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ eigenvectores correspondientes a eigenvalores distintos λ_1 y λ_2 de la matriz A. Se quiere demostrar que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. La demostración de este hecho requiere empezar con la expresión $A\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$. Por la fórmula (8) de la sección 4.1 y la simetría de A se concluye que

$$A\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A^T\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A\mathbf{v}_2 \qquad (3)$$

Pero $\mathbf{v}_1$ es un eigenvector de A correspondiente a λ_1 y $\mathbf{v}_2$ es un eigenvector de A correspondiente a λ_2, de modo que (3) produce la relación

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \lambda_2\mathbf{v}_2$$

que se puede volver a escribir como

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = 0 \tag{4}$$

Pero $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, ya que se supone que λ_1 y λ_2 son distintos. Así, por (4) se concluye que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. □

OBSERVACIÓN. El lector debe recordar que hasta el momento se ha supuesto que todas las matrices tienen elementos reales. De hecho, en el capítulo 10 se verá que el inciso *a*) del teorema 7.3.2 es falso para matrices con elementos complejos.

DIAGONALIZACION DE MATRICES SIMÉTRICAS

Como una consecuencia del teorema precedente se obtiene el siguiente procedimiento para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica.

Paso 1.	Encontrar una base para cada eigenespacio de A.
Paso 2.	Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a cada una de estas bases a fin de obtener una base ortonormal para cada eigenespacio.
Paso 3.	Formar la matriz P cuyas columnas son los vectores básicos obtenidos en el paso 2; esta matriz diagonaliza ortogonalmente a A.

La justificación de este procedimiento debe ser evidente: El teorema 7.3.2 asegura que los eigenvectores de eigenespacios *diferentes* son ortogonales, mientras que la aplicación del proceso de Gram-Schmidt asegura que los eigenvectores obtenidos del *mismo* eigenespacio son ortonormales. Así, *todo* el conjunto de eigenvectores obtenidos con este procedimiento es ortonormal.

Ejemplo 1 Encontrar una matriz ortogonal P que diagonalice a

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución. La ecuación característica de A es

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$$

Así, los eigenvalores de A son $\lambda = 2$ y $\lambda = 8$. Por el método usado en el ejemplo 5 de la sección 7.1, se puede demostrar que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 2$. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ se obtienen los siguientes eigenvectores ortonormales (comprobar):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

El eigenespacio correspondiente a $\lambda = 8$ tiene a

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como base. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a $\{\mathbf{u}_3\}$ se obtiene

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Finalmente, usando a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ como vectores columna se obtiene

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

que diagonaliza ortogonalmente a A. (Como comprobación, el lector debe verificar que P^TAP es una matriz diagonal.) Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.3

1. Encontrar la ecuación característica de la matriz simétrica dada, y luego por inspección determinar las dimensiones de los eigenespacios.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 2 al 9, encontrar una matriz P que diagonalice ortogonalmente a A, y determinar $P^{-1}AP$.

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 3. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$ 4. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ 5. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **7.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **9.** $A = \begin{bmatrix} -7 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 7 \end{bmatrix}$

10. Suponiendo que $b \neq 0$, encontrar una matriz que diagonalice ortogonalmente a

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

11. Demostrar que si A es cualquier matriz $m \times n$, entonces A^TA tiene un conjunto ortonormal de n eigenvectores.

12. a) Demostrar que si $\mathbf{v}$ es cualquier matriz $n \times 1$ e I es la matriz identidad $n \times n$, entonces $I - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ es diagonalizable ortogonalmente.

b) Encontrar una matriz P que diagonalice ortogonalmente a $I - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ si

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13. Usando el resultado del ejercicio 17 en la sección 7.1, demostrar el teorema 7.3.2*a* para matrices simétricas 2×2.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. a) Demostrar que si $0 < \theta < \pi$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

no tiene eigenvalores y en consecuencia no tiene eigenvectores.

b) Proporcionar una explicación geométrica del resultado del inciso a).

2. Encontrar los eigenvalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k^3 & -3k^2 & 3k \end{bmatrix}$$

3. a) Demostrar que si D es una matriz diagonal con elementos no negativos en la diagonal principal, entonces existe una matriz S tal que $S^2 = D$.

b) Demostrar que si A es una matriz diagonalizable con eigenvalores no negativos, entonces existe una matriz S tal que $S^2 = A$.

c) Encontrar una matriz S tal que $S^2 = A$ si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

4. a) Demostrar: Si A es una matriz cuadrada, entonces A y A^T tienen los mismos eigenvalores.
   b) Demostrar que A y A^T no necesariamente tienen los mismos eigenvectores. [***Sugerencia***. Usando el ejercicio 18 de la sección 7.1, encontrar una matriz A 2×2 tal que A y A^T tengan eigenvectores diferentes.]

5. Demostrar: Si A es una matriz cuadrada y $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ es el polinomio característico de A, entonces el coeficiente de λ^{n-1} en $p(\lambda)$ es el negativo de la traza de A.

6. Demostrar: Si $b \neq 0$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

no es diagonalizable.

7. En álgebra lineal avanzada se demuestra el ***teorema de Cayley-Hamilton***, que establece que una matriz cuadrada A satisface su ecuación característica; es decir, si

$$c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

es la ecuación característica de A, entonces

$$c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0.$$

Comprobar este resultado para

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

En las ejercicios 8, 9 y 10, usar el teorema de Cayley-Hamilton enunciado en el ejercicio 7.

8. Usando el ejercicio 16 de la sección 7.1, demostrar el teorema de Cayley-Hamilton para matrices 2×2.

9. El teorema de Cayley-Hamilton proporciona un método eficiente para calcular potencias de una matriz. Por ejemplo, si A es una matriz 2×2 con ecuación característica

$$c_0 + c_1\lambda + \lambda^2 = 0$$

entonces $c_0 I + c_1 A + A^2 = 0$, de modo que

$$A^2 = -c_1 A - c_0 I$$

Multiplicando todo por A se obtiene $A^3 = -c_1A^2 - c_0A$, que expresa A^3 en términos de A^2 y A, y multiplicando todo por A^2 se obtiene $A^4 = -c_1A^3 - c_0A^2$, que expresa A^4 en términos de A^3 y A^2. Continuando de esta manera es posible calcular potencias consecutivas de A expresándolas simplemente en términos de potencias inferiores. Usando este procedimiento, calcular

$$A^2, \quad A^3, \quad A^4, \quad \text{y} \quad A^5$$

para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Usando el método del ejercicio precedente, calcular A^3 y A^4 para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Encontrar los eigenvalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

12. a) En el ejercicio 15 de la sección 7.1 se demostró que si A es una matriz $n \times n$, entonces el coeficiente de λ^n en el polinomio característico de A es 1. (Un polinomio con esta propiedad se denomina ***mónico***.) Demostrar que la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene polinomio característico $p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$. Esto demuestra que todo polinomio mónico es el polinomio característico de alguna matriz. La matriz de este ejemplo se denomina ***matriz acompañante*** de $p(\lambda)$. ***Sugerencia.*** Evaluar todos los determinantes del problema sumando un múltiplo del segundo renglón al primer renglón a fin de introducir un cero en la parte superior de la primera columna, y luego desarrollar por cofactores a lo largo de la primera columna.

b) Encontrar una matriz con polinomio característico $p(\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 3\lambda^3 + \lambda^4$.

13. Una matriz cuadrada A se denomina ***nilpotente*** si $A^n = 0$ para algún entero positivo n. ¿Qué puede afirmar el lector sobre los eigenvalores de una matriz nilpotente?

14. Demostrar: Si A es una matriz $n \times n$ y n es impar, entonces A tiene por lo menos un eigenvalor real.

15. Encontrar una matriz A de 3×3 que tenga los eigenvalores $\lambda = 0$, 1 y -1 con eigenvectores correspondientes

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

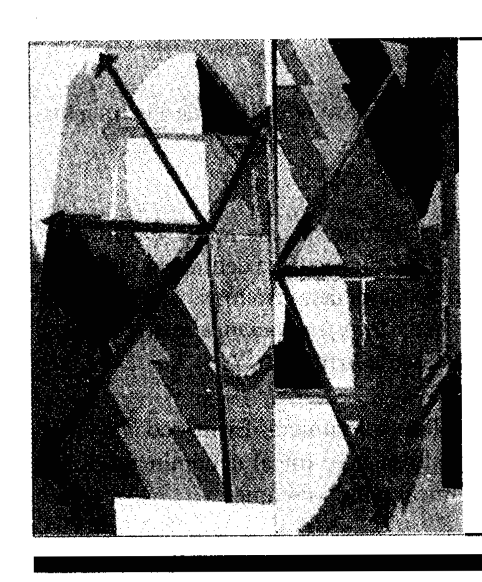
respectivamente.

16. Supóngase que una matriz A 4×4 tiene los eigenvalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ y $\lambda_4 = -3$.

a) Usando el ejercicio 14 de la sección 7.1, encontrar $\det(A)$.

b) Usando el ejercicio 5 de esta sección, determinar $\mathrm{tr}(A)$.

17. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^3 = A$. ¿Qué puede afirmar el lector sobre los eigenvalores de A?



CAPÍTULO 8

TRANSFORMACIONES LINEALES

8.1 TRANSFORMACIONES LINEALES GENERALES

En las secciones 4.2 y 4.3 se estudiaron transformaciones lineales de R^n a R^m. En esta sección se definirán y estudiarán transformaciones lineales de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W. Los resultados tienen aplicaciones importantes en física, ingeniería y varias ramas de las matemáticas.

DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

Recuérdese que una transformación lineal de R^n a R^m se definió como una función

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

en la cual las ecuaciones que relacionan a $w_1, w_2, \ldots, w_m$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son lineales. Luego se demostró que la transformación $T:R^n \to R^m$ es lineal si y sólo si las siguientes relaciones se cumplen para todos los vectores **u** y **v** en R^n y cualquier escalar c (véase el teorema 4.3.2):

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$
$$T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$$

Definición. Si $T:V \to W$ es una función de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W, entonces T se llama ***transformación lineal*** de V a W si para todos los vectores **u** y **v** de V y todos los escalares c se cumple que

a) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
b) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

En el caso especial donde $V = W$, la transformación lineal $T:V \to V$ se denomina ***operador lineal*** sobre V.

Estas propiedades se usarán como punto de partida para el estudio de las transformaciones lineales generales.

EJEMPLOS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Ejemplo 1 Debido a que la definición anterior de transformación lineal se basa en el teorema 4.3.2, las transformaciones lineales de R^n a R^m, según se definieron en la sección 4.2, también son transformaciones lineales bajo esta definición más general. A las transformaciones lineales de R^n a R^m se les llamará ***transformaciones matriciales***, ya que se pueden efectuar por medio de multiplicación de matrices. Δ

Ejemplo 2 Sean V y W dos espacios vectoriales cualesquiera. El mapeo $T:V \rightarrow W$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v}$ en V es una transformación lineal denominada ***transformación cero***. Para darse cuenta que T es lineal, obsérvese que

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \text{y} \quad T(k\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Por consiguiente,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \qquad \text{y} \qquad T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u}) \quad \Delta$$

Ejemplo 3 Sea V cualquier espacio vectorial. El mapeo $I:V \rightarrow V$ definido por $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ se llama ***operador identidad*** sobre V. La comprobación de que I es lineal se deja como ejercicio. Δ

Ejemplo 4 Sea V cualquier espacio vectorial y k cualquier escalar fijo. Se deja como ejercicio comprobar que la función $T:V \rightarrow V$ definida por

$$T(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$$

es un operador lineal sobre V. Este operador lineal se conoce como ***dilatación*** de V con factor k si $k > 1$, y como ***contracción*** de V con factor k si $0 < k < 1$. Geométricamente, la dilatación "estira" a cada vector de V por un factor k, y la contracción de V "comprime" a cada vector de V por un factor k (figura 1). Δ

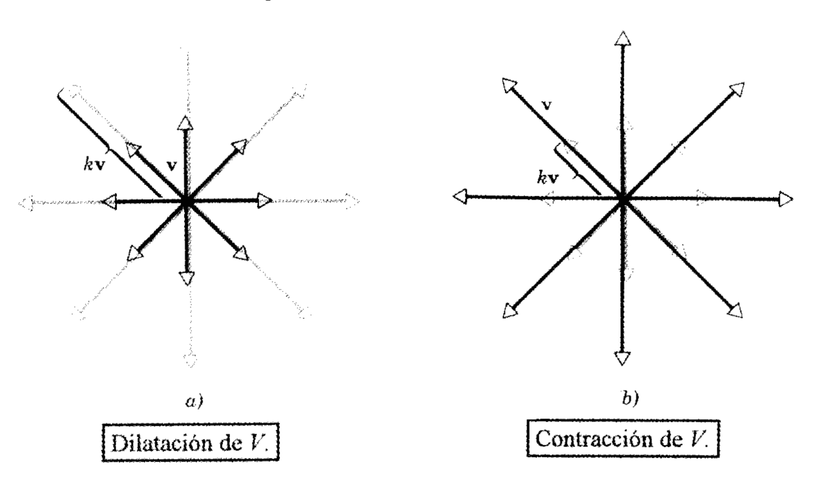


Figura 1

Ejemplo 5 En la sección 6.4 se definió la proyección ortogonal de R^m sobre un subespacio W. [Véase la fórmula (6) y la definición precedente a ésta en dicha sección.] Las proyecciones ortogonales también se pueden definir en espacios generales con producto interior como sigue: Supóngase que W es un subespacio de dimensión finita de un espacio V con producto interior; entonces la ***proyección ortogonal de V sobre W*** es la transformación definida por

$$T(\mathbf{v}) = \text{proy}_W\, \mathbf{v}$$

(figura 2). Por el teorema 6.3.5 se deduce que si

$$S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$$

es cualquier base ortonormal para W, entonces $T(\mathbf{v})$ está definido por la fórmula

$$T(\mathbf{v}) = \text{proy}_W\, \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r$$

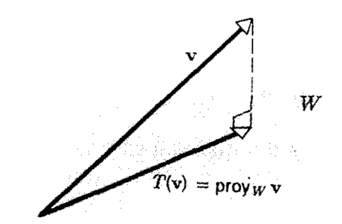


Figura 2 Proyección ortogonal de V sobre W.

La demostración de que T es una transformación lineal es consecuencia de las propiedades del producto interior. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r \\ &\quad + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

De manera semejante, $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$. Δ

Ejemplo 6 Como un caso especial del ejemplo anterior, sea $V = R^3$ con el producto interior euclidiano. Los vectores $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 0)$ forman una base ortonormal del plano xy. Por tanto, si $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es cualquier vector en R^3, entonces la proyección ortogonal de R^3 sobre el plano xy está dada por

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \\ &= (x, y, 0) \end{aligned}$$

(Véase la figura 3.) Δ

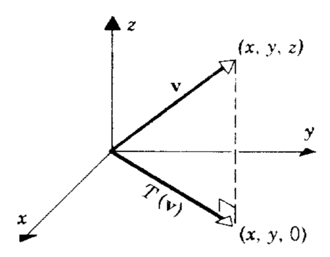


Figura 3 Proyección ortogonal de R^3 sobre el plano xy.

Ejemplo 7 Sea $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base de un espacio vectorial V de dimensión n, y sea

$$(\mathbf{v})_S = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

el vector de coordenadas con respecto a S de un vector $\mathbf{v}$ en V; así

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_n\mathbf{w}_n$$

Se define $T: V \to R^n$ como la función que mapea $\mathbf{v}$ en su vector de coordenadas con respecto a S; es decir,

$$T(\mathbf{v}) = (\mathbf{v})_S = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

La función T es una transformación lineal. Para darse cuenta de que así es, supóngase que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en V y que

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 + \cdots + d_n\mathbf{w}_n$$

Así,

$$(\mathbf{u})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$(\mathbf{v})_S = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

Pero

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{w}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (c_n + d_n)\mathbf{w}_n$$
$$k\mathbf{u} = (kc_1)\mathbf{w}_1 + (kc_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (kc_n)\mathbf{w}_n$$

de modo que

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n)$$
$$(k\mathbf{u})_S = (kc_1, kc_2, \ldots, kc_n)$$

Por consiguiente,

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})_S = (\mathbf{u})_S + (\mathbf{v})_S \qquad \text{y} \qquad (k\mathbf{u})_S = k(\mathbf{u})_S$$

Al expresar estas ecuaciones en términos de T, se obtiene

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \qquad \text{y} \qquad T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$$

lo cual demuestra que T es una transformación lineal. Δ

OBSERVACIÓN. Los cálculos del ejemplo anterior también se pudieron haber realizado usando matrices de coordenadas en lugar de vectores de coordenadas; es decir,

$$[\mathbf{u}+\mathbf{v}]_S = [\mathbf{u}]_S + [\mathbf{v}]_S$$

y

$$[k\mathbf{u}]_S = k[\mathbf{u}]_S$$

Ejemplo 8 Sea $\mathbf{p} = p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ un polinomio en P_n, y $T{:}P_n \to P_{n+1}$ la función definida por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x) = c_0x + c_1x^2 + \cdots + c_nx^{n+1}$$

La función T es una transformación lineal, ya que para cualquier escalar k y polinomios cualesquiera $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ en P_n se tiene

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2) &= T(p_1(x)+p_2(x)) = x(p_1(x)+p_2(x)) \\ &= xp_1(x) + xp_2(x) = T(\mathbf{p}_1) + T(\mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

y

$$T(k\mathbf{p}) = T(kp(x)) = x(kp(x)) = k(xp(x)) = kT(\mathbf{p}) \quad \Delta$$

Ejemplo 9 Sea $\mathbf{p} = p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ un polinomio en P_n, y sean a y b escalares cualesquiera. Se deja como ejercicio demostrar que la función T definida por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = p(ax+b) = c_0 + c_1(ax+b) + \cdots + c_n(ax+b)^n$$

es un operador lineal. Por ejemplo, si $ax+b = 3x-5$, entonces $T{:}P_2 \to P_2$ sería el operador lineal definido por la fórmula

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(3x-5) + c_2(3x-5)^2 \quad \Delta$$

Ejemplo 10 Sea V un espacio con producto interior y sea $\mathbf{v}_0$ cualquier vector fijo en V. Sea $T:V \to R$ la transformación que mapea un vector $\mathbf{v}$ en su producto interior con $\mathbf{v}_0$; es decir,

$$T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$$

Por las propiedades de producto interior,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

y

$$T(k\mathbf{u}) = \langle k\mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = kT(\mathbf{u})$$

de modo que T es una transformación lineal. Δ

Ejemplo 11 ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea $V = C^1(-\infty, \infty)$ el espacio vectorial de funciones con primeras derivadas continuas sobre $(-\infty, \infty)$, y sea $W = F(-\infty, \infty)$ el espacio vectorial de todas las funciones con valores reales definidas sobre $(-\infty, \infty)$. Sea $D:V \to W$ la transformación que mapea una función $\mathbf{f} = f(x)$ en su derivada; es decir,

$$D(\mathbf{f}) = f'(x)$$

Por las propiedades de derivación se tiene que

$$D(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) + D(\mathbf{g})$$

y

$$D(k\mathbf{f}) = kD(\mathbf{f})$$

Así, D es una transformación lineal. Δ

Ejemplo 12 ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea $V = C(-\infty, \infty)$ el espacio vectorial de funciones continuas sobre $(-\infty, \infty)$, y sea $W = C^1(-\infty, \infty)$ el espacio vectorial de funciones con primeras derivadas continuas sobre $(-\infty, \infty)$. Sea $J:V \to W$ la transformación que mapea $\mathbf{f} = f(x)$ en la integral

$$\int_0^x f(t)\, dt$$

Por ejemplo, si $\mathbf{f} = x^2$ entonces

$$J(\mathbf{f}) = \int_0^x t^2\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^x = \frac{x^3}{3}$$

Por las propiedades de la integración se tiene que

$$J(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \int_0^x (f(t)+g(t))\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt = J(\mathbf{f}) + J(\mathbf{g})$$

$$J(c\mathbf{f}) = \int_0^x cf(t)\,dt = c\int_0^x f(t)\,dt = cJ(\mathbf{f})$$

de modo que J es una transformación lineal. Δ

Ejemplo 13 Sea $T{:}M_{nn} \to R$ la transformación que mapea una matriz $n \times n$ en su determinante; es decir

$$T(A) = \det(A)$$

Esta transformación no satisface ninguna de las propiedades necesarias para ser una transformación lineal. Así, en el ejemplo 1 de la sección 2.3 se vio que

$$\det(A_1 + A_2) \neq \det(A_1) + \det(A_2)$$

en general. Además, $\det(cA) = c^n\det(A)$, de modo que

$$\det(cA) \neq c\det(A)$$

en general. Por tanto, T *no* es una transformación lineal. Δ

PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Si $T{:}V \to W$ es una transformación lineal, entonces para vectores cualesquiera $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en V y escalares cualesquiera c_1 y c_2 se tiene que

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = T(c_1\mathbf{v}_1) + T(c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$$

y de manera más general, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son vectores en V y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son escalares, entonces

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n) \qquad (1)$$

La fórmula (1) algunas veces se describe diciendo que *las transformaciones lineales conservan las combinaciones lineales.*

En el siguiente teorema se enumeran tres propiedades básicas comunes a todas las transformaciones lineales.

Teorema 8.1.1. *Si $T{:}V \to W$ es una transformación lineal, entonces*

a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ *para todo* $\mathbf{v}$ *en* V.
c) $T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$ *para todo* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$ *en* V.

Demostración. Sea $\mathbf{v}$ cualquier vector en V. Como $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, se tiene

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

lo cual demuestra el inciso *a*). También,

$$T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$$

lo cual demuestra el inciso *b*). Finalmente, $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$; así

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) &= T(\mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{v}) + (-1)T(\mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

lo cual demuestra el inciso *c*). □

En palabras, el inciso *a*) del teorema anterior establece que una transformación lineal mapea $\mathbf{0}$ en $\mathbf{0}$. Esta propiedad es útil para identificar transformaciones que *no* son lineales. Por ejemplo, si $\mathbf{x}_0$ es un vector fijo diferente de cero en R^2, entonces la transformación

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$$

tiene el efecto geométrico de trasladar cada punto $\mathbf{x}$ en una dirección paralela a $\mathbf{x}_0$ por una distancia $\|\mathbf{x}_0\|$ (figura 4). Esta no es una transformación lineal, ya que $T(\mathbf{0}) = x_0$, de modo que T no mapea $\mathbf{0}$ en $\mathbf{0}$.

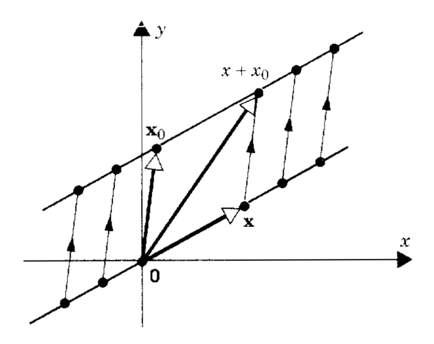


Figura 4 $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ traslada cada punto $\mathbf{x}$ a lo largo de una recta paralela a $\mathbf{x}_0$ una distancia $\|\mathbf{x}_0\|$.

DETERMINACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES A PARTIR DE LAS IMÁGENES DE LOS VECTORES BÁSICOS

El teorema 4.3.3 demuestra que si T es una transformación matricial, entonces es posible obtener la matriz estándar de T a partir de las imágenes de los vectores estándar básicos. Mencionado de otra manera, *una transformación matricial está completamente determinada por las imágenes de los vectores estándar básicos.* Este es un caso especial de un resultado más general: Si $T:V \rightarrow W$ es una transformación lineal, y si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es cualquier base de V, entonces la imagen $T(\mathbf{v})$ de cualquier vector $\mathbf{v}$ en V se puede calcular con las imágenes

$$T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$$

de los vectores básicos. Esto se hace al expresar primero a $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de los vectores básicos, por ejemplo,

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

y luego usar la fórmula (1) para escribir

$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

Expresado en palabras, *una transformación lineal está completamente determinada por las imágenes de vectores básicos cualesquiera.*

Ejemplo 14 Considerar la base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ para R^3, donde $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$; y sea $T:R^3 \rightarrow R^2$ la transformación lineal tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \qquad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \qquad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

Obtener una fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$; luego, usar esta fórmula para calcular $T(2, -3, 5)$.

Solución. Primero, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ se expresa como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$. Si se escribe

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0)$$

entonces la igualación de las componentes correspondientes produce

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_1 + c_2 &= x_2 \\ c_1 &= x_3 \end{aligned}$$

con lo cual da $c_1 = x_1$, $c_2 = x_2 - x_3$, $c_2 = x_1 - x_2$, de modo que

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_3(1, 1, 1) + (x_2 - x_3)(1, 1, 0) + (x_1 - x_2)(1, 0, 0) \\ &= x_3\mathbf{v}_1 + (x_2 - x_3)\mathbf{v}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= x_3T(\mathbf{v}_1) + (x_2 - x_3)T(\mathbf{v}_2) + (x_1 - x_2)T(\mathbf{v}_3) \\ &= x_3(1, 0) + (x_2 - x_3)(2, -1) + (x_1 - x_2)(4, 3) \\ &= (4x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3) \end{aligned}$$

A partir de esta fórmula se obtiene

$$T(2, -3, 5) = (9, 23) \quad \Delta$$

COMPOSICIONES DE TRANSFORMACIONES LINEALES

En la sección 4.2 se definió la composición de transformaciones matriciales. La siguiente definición amplía el concepto a transformaciones lineales generales.

> **Definición.** Si $T_1{:}U \to V$ y $T_2{:}V \to W$ son transformaciones lineales, ***la composición de T_2 con T_1*** denotada por $T_2 \circ T_1$ (que se lee como "T_1 seguida de T_2"), es la función definida por la fórmula
>
> $$\boxed{(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u}))} \tag{2}$$
>
> donde **u** es un vector en U.

OBSERVACIÓN. Nótese que esta definición requiere que el dominio de T_2 (el cual es V) contenga al recorrido de T_1; este hecho es esencial para que la expresión $T_2(T_1(\mathbf{u}))$ tenga sentido (figura 5). El lector debe comparar (2) con la fórmula (18) de la sección 4.2.

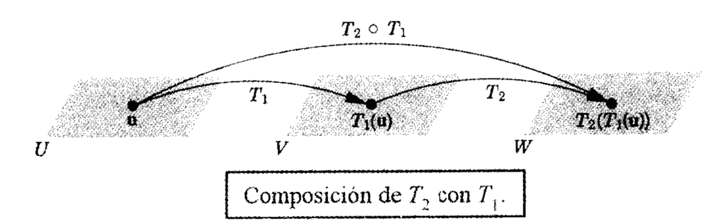


Figura 5 Composición de T_2 con T_1.

El siguiente resultado muestra que la composición de dos transformaciones lineales es una transformación lineal.

> **Teorema 8.1.2.** *Si $T_1{:}U \to V$ y $T_2{:}V \to W$ son transformaciones lineales, entonces $(T_2 \circ T_1){:}U \to W$ también es una transformación lineal.*

Demostración. Si **u** y **v** son vectores en U y c es un escalar, entonces por (2) y la linealidad de T_1 y T_2 se deduce que

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T_2(T_1(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = T_2(T_1(\mathbf{u}) + T_1(\mathbf{v})) \\ &= T_2(T_1(\mathbf{u})) + T_2(T_1(\mathbf{v})) \\ &= (T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) + (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(c\mathbf{u}) &= T_2(T_1(c\mathbf{u})) = T_2(cT_1(\mathbf{u})) \\ &= cT_2(T_1(\mathbf{u})) = c(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u})\end{aligned}$$

Así, $T_2 \circ T_1$ satisface los dos requisitos de una transformación lineal. □

Ejemplo 15 Sean $T_1{:}P_1 \to P_2$ y $T_2{:}P_2 \to P_2$ las transformaciones lineales definidas por las fórmulas

$$T_1(p(x)) = xp(x) \qquad \text{y} \qquad T_2(p(x)) = p(2x + 4)$$

Entonces la composición $(T_2 \circ T_1){:}P_1 \to P_2$ está definida por la fórmula

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (2x + 4)p(2x + 4)$$

En particular, si $p(x) = c_0 + c_1x$, entonces

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(p(x)) &= (T_2 \circ T_1)(c_0 + c_1x) = (2x + 4)(c_0 + c_1(2x + 4)) \\ &= c_0(2x + 4) + c_1(2x + 4)^2 \quad \Delta\end{aligned}$$

Ejemplo 16 Si $T{:}V \to V$ es cualquier operador lineal y si $I{:}V \to V$ es el operador identidad (ejemplo 3), entonces para todos los vectores $\mathbf{v}$ en V se tiene

$$\begin{aligned}(T \circ I)(\mathbf{v}) &= T(I(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v}) \\ (I \circ T)(\mathbf{v}) &= I(T(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v})\end{aligned}$$

En consecuencia, $T_1 \circ I$ e $I \circ T_1$ son iguales a T; es decir,

$$\boxed{\begin{aligned}T \circ I &= T \\ I \circ T &= T\end{aligned}} \quad \Delta \tag{3}$$

Esta sección concluye haciendo notar que las composiciones se pueden definir para más de dos transformaciones lineales. Por ejemplo, si

$$T_1 : U \to V, \qquad T_2 : V \to W, \qquad \text{y} \qquad T_3 : W \to Y$$

son transformaciones lineales, entonces la composición $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ se define como

$$\boxed{(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_3(T_2(T_1(\mathbf{u})))} \tag{4}$$

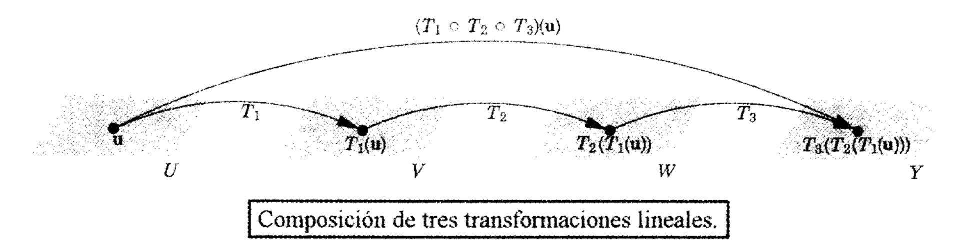


Figura 6 Composición de tres transformaciones lineales.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.1

1. Con la definición de operador lineal proporcionada en esta sección, demostrar que la función $T:R^2 \to R^2$ definida por la fórmula $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$ es un operador lineal.

2. Por medio de la definición de transformación lineal que se dio en esta sección, demostrar que la función $T:R^3 \to R^2$ expresada por la fórmula $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$ es una transformación lineal.

En los ejercicios del 3 al 10, determinar si la función es una transformación lineal. Justificar las respuestas.

3. $T:V \to R$, donde V es un espacio con producto interior y $T(\mathbf{u}) = ||\mathbf{u}||$.

4. $T:R^3 \to R^3$, donde $\mathbf{v}_0$ es un vector fijo en R^3 y $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_0$.

5. $T:M_{22} \to M_{23}$, donde B es una matriz fija 2×3 y $T(A) = AB$.

6. $T:M_{mn} \to R$, donde $T(A) = \text{tr}(A)$.

7. $T:M_{mn} \to M_{nm}$, donde $F(A) = A^T$.

8. $T:M_{22} \to R$, donde

a) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a - 4b + c - d$ b) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$

9. $T:P_2 \to P_2$, donde

a) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$
b) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2$

10. $T:F(-\infty, \infty) \to F(-\infty, \infty)$, donde

a) $T(f(x)) = 1 + f(x)$ b) $T(f(x)) = f(x + 1)$

11. Demostrar que la función T en el ejemplo 9 es un operador lineal.

12. Considérese la base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para R^2, donde $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$, y sea $T{:}R^2 \to R^2$ el operador lineal tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, -2) \qquad \text{y} \qquad T(\mathbf{v}_2) = (-4, 1)$$

Obtener una fórmula para $T(x_1, x_2)$ y usarla para encontrar $T(5, -3)$.

13. Considérese la base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para R^2, donde $\mathbf{v}_1 = (-2, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 3)$, y sea $T{:}R^2 \to R^3$ la transformación lineal tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (-1, 2, 0) \qquad \text{y} \qquad T(\mathbf{v}_2) = (0, -3, 5)$$

Encontrar una fórmula para $T(x_1, x_2)$ y usarla para calcular $T(2, -3)$.

14. Considérese la base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ para R^3, donde $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$ y sea $T{:}R^3 \to R^3$ el operador lineal tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (2, -1, 4), \qquad T(\mathbf{v}_2) = (3, 0, 1), \qquad T(\mathbf{v}_3) = (-1, 5, 1)$$

Obtener una fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ y usarla para calcular $T(2, 4, -1)$.

15. Considérese la base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ para R^3, donde $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ y sea $T{:}R^3 \to R^2$ la transformación lineal tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \qquad T(\mathbf{v}_2) = (-1, 1), \qquad T(\mathbf{v}_3) = (0, 1)$$

hallar una fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ y usarla para evaluar $T(7, 13, 7)$.

16. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ vectores en un espacio vectorial V y $T{:}V \to R^3$ una transformación lineal para la que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, -1, 2), \qquad T(\mathbf{v}_2) = (0, 3, 2), \qquad T(\mathbf{v}_3) = (-3, 1, 2)$$

Encontrar $T(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3)$.

17. Calcular el dominio y el codominio de $T_2 \circ T_1$, y encontrar $(T_2 \circ T_1)(x, y)$.

a) $T_1(x, y) = (2x, 3y)$, $T_2(x, y) = (x - y, x + y)$
b) $T_1(x, y) = (x - 3y, 0)$, $T_2(x, y) = (4x - 5y, 3x - 6y)$
c) $T_1(x, y) = (2x, -3y, x + y)$, $T_2(x, y, z) = (x - y, y + z)$
d) $T_1(x, y) = (x - y, y + z, x - z)$, $T_2(x, y, z) = (0, x + y + z)$

18. Obtener el dominio y el codominio de $T_3 \circ T_2 \circ T_1$, y hallar $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(x, y, z)$.

a) $T_1(x, y) = (-2y, 3x, x - 2y)$, $T_2(x, y, z) = (y, z, x)$, $T_3(x, y, z) = (x + z, y - z)$
b) $T_1(x, y) = (x + y, y, -x)$, $T_2(x, y, z) = (0, x + y + z, 3y)$,
$T_3(x, y, z) = (3x + 2y, 4z - x - 3y)$

19. Sean $T_1{:}M_{22} \to R$ y $T_2{:}M_{22} \to M_{22}$ las transformaciones lineales definidas por $T_1(A) = \text{tr}(A)$ y $T_2(A) = A^T$.

a) Encontrar $(T_1 \circ T_2)(A)$, donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

b) ¿Puede el lector obtener $(T_2 \circ T_1)(A)$? Explicar la respuesta.

20. Sean $T_1{:}P_n \to P_n$ y $T_2{:}P_n \to P_n$ los operadores lineales definidos por $T_1(p(x)) = p(x - 1)$ y $T_2(p(x)) = p(x + 1)$. Encontrar $(T_1 \circ T_2)(p(x))$ y $(T_2 \circ T_1)(p(x))$.

21. Sea $T_1{:}V \to V$ la dilatación $T_1(\mathbf{v}) = 4\mathbf{v}$. Encontrar un operador lineal $T_2{:}V \to V$ tal que $T_1 \circ T_2 = I$ y $T_2 \circ T_1 = I$.

22. Suponer que las transformaciones lineales $T_1{:}P_2 \to P_2$ y $T_2{:}P_3 \to P_3$ están definidas por las fórmulas $T_1(p(x)) = p(x + 1)$ y $T_2(p(x)) = xp(x)$. Encontrar $(T_2 \circ T_1)(a_0 + a_1x + a_2x^2)$.

23. Sea $q_0(x)$ un polinomio fijo de grado m, y la función T con dominio P_n definida por la fórmula $T(p(x)) = p(q_0(x))$.
a) Demostrar que T es una transformación lineal. b) ¿Cuál es el codominio de T?

24. Con la definición de $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ dada por la fórmula (4), demostrar que
a) $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ es una transformación lineal.
b) $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$
c) $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$

25. Sea $T{:}R^3 \to R^3$ la proyección ortogonal de R^3 sobre el plano xy. Demostrar que $T \circ T = T$.

26. a) Sean $T{:}V \to W$ una transformación lineal y k un escalar. La función $(kT){:}V \to W$ se define como $(kT)(\mathbf{v}) = k(T(\mathbf{v}))$. Demostrar que kT es una transformación lineal.
b) Encontrar $(3T)(x_1, x_2)$ si $T{:}R^2 \to R^2$ está expresada por la fórmula $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_1)$.

27. a) Sean $T_1{:}V \to W$ y $T_2{:}V \to W$ transformaciones lineales. Las funciones $(T_1 + T_2){:}V \to W$ y $(T_1 - T_2){:}V \to W$ se definen como

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{v})$$
$$(T_1 - T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{v}) - T_2(\mathbf{v})$$

Demostrar que $T_1 + T_2$ y $T_1 - T_2$ son transformaciones lineales.
b) Encontrar $(T_1 + T_2)(x, y)$ y $(T_1 - T_2)(x, y)$ si $T_1{:}R^2 \to R^2$ y $T_2{:}R^2 \to R^2$ están definidas por las fórmulas $T_1(x, y) = (2y, 3x)$ y $T_2(x, y) = (y, x)$.

28. a) Demostrar que si a_1, a_2, b_1 y b_2 son escalares cualesquiera, entonces la fórmula

$$F(x, y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$$

define un operador lineal sobre R^2.
b) ¿La fórmula $F(x, y) = (a_1x^2 + b_1y^2, a_2x^2 + b_2y^2)$ define un operador lineal sobre R^2? Explicar la respuesta.

29. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sean

$$D(\mathbf{f}) = f'(x) \qquad \text{y} \qquad J(\mathbf{f}) = \int_0^x f(t)\,dt$$

las transformaciones lineales de los ejemplos 11 y 12. Encontrar $(J \circ D)(\mathbf{f})$ para

a) $\mathbf{f}(x) = x^2 + 3x + 2$ b) $\mathbf{f}(x) = \operatorname{sen} x$ c) $\mathbf{f}(x) = x$

30. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial V y sea $T:V \to W$ una transformación lineal. Demostrar que si $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = \cdots = T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$, entonces T es la transformación cero.

31. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial V y sea $T:V \to V$ un operador lineal. Demostrar que si $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_n$, entonces T es la transformación identidad sobre V.

8.2 NÚCLEO Y RECORRIDO

En esta sección se ampliarán algunas propiedades básicas de las transformaciones lineales que generalizan propiedades, ya obtenidas en el texto, de las transformaciones matriciales.

NÚCLEO Y RECORRIDO

Recuérdese que si A es una matriz $m \times n$, entonces el espacio nulo de A consta de todos los vectores $\mathbf{x}$ en R^n tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y, por el teorema 5.5.1, el espacio columna de A consiste en todos los vectores $\mathbf{b}$ en R^m para los cuales existe por lo menos un vector $\mathbf{x}$ en R^n tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Desde el punto de vista de las transformaciones matriciales, el espacio nulo de A consta de todos los vectores $\mathbf{x}$ en R^n que la multiplicación por A aplica o mapea en $\mathbf{0}$, y el espacio columna consta de todos los vectores en R^m que son imágenes de por lo menos un vector en R^n bajo la multiplicación por A. La siguiente definición amplía estas ideas a transformaciones lineales generales.

Definición. Si $T:V \to W$ es una transformación lineal, entonces el conjunto de vectores en V que T mapea o transforma en $\mathbf{0}$ se denomina ***núcleo*** (kernel o espacio nulo) de T, y se denota por $\ker(T)$. El conjunto de todos los vectores en W que son imágenes bajo T de por lo menos un vector en V se denomina ***recorrido*** de T y se denota por $R(T)$.

Ejemplo 1 Si $T_A:R^n \to R^m$ es la multiplicación por la matriz A $m \times n$, entonces por el análisis que precede a la definición anterior, el núcleo de T_A es el espacio nulo de A y el recorrido de T_A es el espacio columna de A. Δ

Ejemplo 2 Sea $T:V \to W$ la transformación cero (ejemplo 2 de la sección 8.1). Como T mapea *todo* vector de V en $\mathbf{0}$, se concluye que $\ker(T) = V$. Además, como $\mathbf{0}$ es la *única* imagen bajo T de los vectores en V, se tiene que $R(T) = \{\mathbf{0}\}$. Δ

Ejemplo 3 Sea $I:V \to V$ el operador identidad (ejemplo 3 de la sección 8.1). Como $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todos los vectores de V, *todo* vector en V es la imagen de algún vector

(a saber, él mismo); así, $R(I) = V$. Como el *único* vector que I mapea en **0** es **0**, se concluye que $\ker(I) = \{\mathbf{0}\}$. Δ

Ejemplo 4 Sea $T:R^3 \to R^3$ la proyección ortogonal sobre el plano xy. El núcleo de T es el conjunto de puntos que T transforma en $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$; se trata de los puntos sobre el eje z (figura 1*a*). Como T mapea todo punto de R^3 en el plano xy, el recorrido de T debe ser algún subconjunto de este plano. Pero todo punto $(x_0, y_0, 0)$ en el plano xy es la imagen bajo T de algún punto; de hecho, es la imagen de todos los puntos sobre la recta vertical que pasa por $(x_0, y_0, 0)$ (figura 1*b*). Por tanto, $R(T)$ es todo el plano xy. Δ

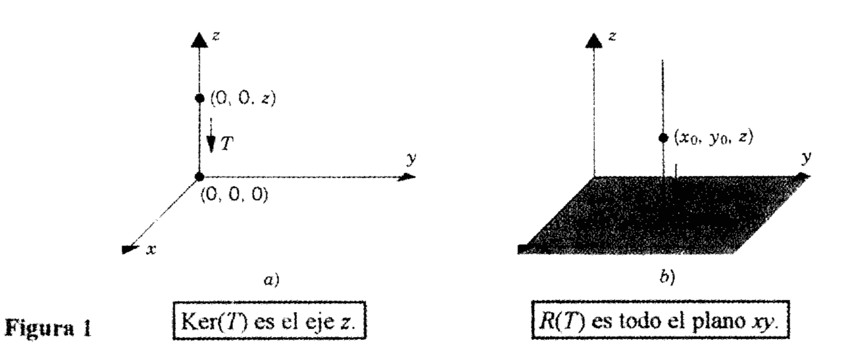


Figura 1

Ejemplo 5 Sea $T:R^2 \to R^2$ el operador lineal que hace girar a todo vector en el plano xy por un ángulo θ (figura 2). Como *todo* vector en el plano xy se puede obtener al girar algún vector por un ángulo θ (¿por qué?), se tiene que $R(T) = R^2$. Además, el único vector que gira en **0** es **0**, de modo que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Δ

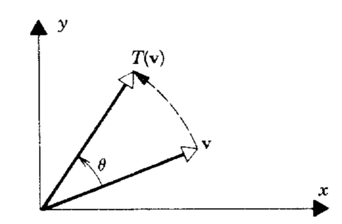


Figura 2

Ejemplo 6 (***Para quienes ya estudiaron Cálculo***). Sea $V = C^1(-\infty, \infty)$ el espacio vectorial de funciones con primeras derivadas continuas sobre $(-\infty, \infty)$, sea $W = F(-\infty, \infty)$ el espacio vectorial de las funciones con valores reales definidas sobre $(-\infty, \infty)$ y sea $D:V \quad W$ la transformación derivación $D(f) = f'(x)$. El núcleo de D es el conjunto de funciones en V cuya derivada es cero. Por Cálculo, se trata del conjunto de funciones constantes sobre $(-\infty, \infty)$. Δ

PROPIEDADES DEL NÚCLEO Y DEL RECORRIDO

En todos los ejemplos anteriores, ker(T) y $R(T)$ resultaron ser *subespacios*. En los ejemplos 2, 3 y 5 fueron el subespacio cero o todo el espacio vectorial. En el ejemplo 4 el núcleo era una recta que pasa por el origen y el recorrido era un plano que pasa por el origen; ambos son subespacios de R^3. Nada de lo anterior es fortuito; es una consecuencia del siguiente resultado general.

> **Teorema 8.2.1.** *Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces:*
>
> *a)* *El núcleo de T es un subespacio de V.*
> *b)* *El recorrido de T es un subespacio de W.*

Demostración de a). Para demostrar que ker(T) es un subespacio se debe probar que contiene por lo menos a un vector y es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. Por el inciso *a*) del teorema 8.1.1, el vector $\mathbf{0}$ está en ker(T), de modo que este conjunto contiene por lo menos un vector. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ vectores en ker(T) y sea k cualquier escalar. Entonces

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de modo que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ está en ker(T). También,

$$T(k\mathbf{v}_1) = kT(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de modo que $k\mathbf{v}_1$ está en ker(T).

Demostración de b). Como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, existe por lo menos un vector en $R(T)$. Sean $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ vectores en el recorrido de T y k cualquier escalar. Para demostrar esta parte es necesario probar que $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ y $k\mathbf{w}_1$ están en el recorrido de T; es decir, se deben encontrar vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en V tales que $T(\mathbf{a}) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ y $T(\mathbf{b}) = k\mathbf{w}_1$.

Como $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ están en el recorrido de T, en V existen vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ tales que $T(\mathbf{a}_1) = \mathbf{w}_1$ y $T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{w}_2$. Sean $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b} = k\mathbf{a}_1$. Entonces

$$T(\mathbf{a}) = T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = T(\mathbf{a}_1) + T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

y

$$T(\mathbf{b}) = T(k\mathbf{a}_1) = kT(\mathbf{a}_1) = k\mathbf{w}_1$$

con lo cual se completa la demostración. □

RANGO Y NULIDAD DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

En la sección 5.6, el rango de una matriz se definió como la dimensión de su espacio columna (o renglón) y la nulidad como la dimensión de su espacio nulo. La siguiente definición extiende estas definiciones a transformaciones lineales generales.

> **Definición.** Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces la dimensión del recorrido de T se llama ***rango de T*** y se denota por rango (T); la dimensión del núcleo se denomina ***nulidad de T*** y se denota por nulidad (T).

Si A es una matriz $m \times n$ y $T_A:R^n \to R^m$ es la multiplicación por A, entonces por el ejemplo 1 se sabe que ker(T) de T_A es el espacio nulo. de A y que el recorrido de T_A es el espacio columna de A. Por tanto, se tiene la siguiente relación entre el rango y la nulidad de una matriz y el rango y la nulidad de la transformación matricial correspondiente.

Teorema 8.2.2. *Si A es una matriz $m \times n$ y $T_A:R^n \to R^m$ es la multiplicación por A, entonces:*

a) *Nulidad* (T_A) = *Nulidad* (A).
b) *Rango* (T_A) = *Rango* (A).

Ejemplo 7 Sea $T_A:R^6 \to R^4$ la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Encontrar el rango y la nulidad de T_A.

Solución. En el ejemplo 1 de la sección 5.6 se demostró que rango (A) = 2 y nulidad (A) = 4. Así, por el teorema 8.2.2 se tiene rango (T_A) = 2 y nulidad (A) = 4. Δ

Ejemplo 8 Sea $T:R^3 \to R^3$ la proyección ortogonal sobre el plano xy. Por el ejemplo 4, el núcleo de T es el eje z, que es unidimensional, y el recorrido de T es el plano xy, que es bidimensional. Por lo tanto,

$$\text{nulidad}\,(T) = 1 \quad \text{y} \quad \text{rango}\,(T) = 2 \quad \Delta$$

TEOREMA DE LA DIMENSIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Recuérdese por el teorema de la dimensión para matrices (teorema 5.6.3) que si A es una matriz con n columnas, entonces

$$\text{rango}\,(A) + \text{nulidad}\,(A) = n$$

El siguiente teorema, cuya demostración se pospone hasta el final de la sección, extiende este resultado a transformaciones lineales generales.

Teorema 8.2.3. (***Teorema de la dimensión para transformaciones lineales***). *Si $T:V \to W$ es una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n a un espacio vectorial W, entonces*

$$\textit{rango}(T) + \textit{nulidad}(T) = n \qquad (1)$$

Expresado en palabras, este teorema establece que *para transformaciones lineales la suma del rango y la nulidad es igual a la dimensión del dominio.*

OBSERVACIÓN. Si A es una matriz $m \times n$ y $T_A{:}R^n \rightarrow R^m$ es la multiplicación por A, entonces el dominio de T_A es de dimensión n, de modo que en este caso el teorema 8.2.3 concuerda con el teorema 5.6.3.

Ejemplo 9 Sea $T{:}R^2 \rightarrow R^2$ el operador lineal que hace girar a cada vector del plano xy por un ángulo θ. En el ejemplo 5 se demostró que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ y que $R(T) = R^2$. Así,

$$\text{rango } (T) + \text{nulidad } (T) = 0 + 2 = 2$$

lo cual concuerda con el hecho de que el dominio de T es bidimensional. Δ

DEMOSTRACIÓN ADICIONAL

Demostración del teorema 8.2.3. Se debe demostrar que

$$\dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = n$$

La demostración se proporcionará para el caso en que $1 \leq \dim(\ker(T)) < n$. Los casos $\dim(\ker(T)) = 0$ y $\dim(\ker(T)) = n$ se dejan como ejercicios. Supóngase que $\dim(\ker(T)) = r$, y sea $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ una base para el núcleo. Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente, el teorema 5.4.6*b* establece que existen $n - r$ vectores, $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$, tales que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V. Para completar la demostración, se probará que los $n - r$ vectores en el conjunto $S = \{T(\mathbf{v}_{r+1}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ forman una base para el recorrido de T. Entonces se concluirá que

$$\dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = (n - r) + r = n$$

Primero se demostrará que S genera el recorrido de T. Si $\mathbf{b}$ es cualquier vector en el recorrido de T, entonces $\mathbf{b} = T(\mathbf{v})$ para algún vector $\mathbf{v}$ en V. Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para V, entonces el vector $\mathbf{v}$ se puede escribir como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

En virtud de que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ están en el núcleo de T, se tiene $T(\mathbf{v}_1) = \cdots = T(\mathbf{v}_r) = \mathbf{0}$, de modo que

$$\mathbf{b} = T(\mathbf{v}) = c_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

Así, S genera el recorrido de T.

Por último, se demostrará que S es un conjunto linealmente independiente y que, en consecuencia, forma una base para el recorrido de T. Supóngase que alguna combinación lineal de los vectores en S es cero; es decir,

$$k_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \cdots + k_nT(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \tag{2}$$

Se debe demostrar que $k_{r+1} = \cdots = k_n = \mathbf{0}$. Como T es lineal, (2) se puede escribir de nuevo como

$$T(k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

lo cual establece que $k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$ está en el núcleo de T. Por consiguiente, este vector se puede escribir como una combinación lineal de los vectores básicos $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, por ejemplo,

$$k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

Así,

$$k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r - k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} - \cdots - k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente, todas las k son cero; en particular, $k_{r+1} = \cdots = k_n = 0$, con lo que se completa la demostración. □

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.2

1. Sea $T:R^2 \to R^2$ el operador lineal definido por la expresión

$$T(x, y) = (2x - y, \ -8x + 4y)$$

¿Cuáles de los siguientes vectores están en $R(T)$?
a) $(1, -4)$. b) $(5, 0)$. c) $(-3, 12)$.

2. Sea $T:R^2 \to R^2$ el operador lineal del ejercicio 1. ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $\ker(T)$?
a) $(5, 10)$. b) $(3, 2)$. c) $(1, 1)$.

3. Sea $T:R^4 \to R^3$ la transformación lineal definida por la expresión

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4, 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4, 6x_1 - 9x_3 + 9x_4)$$

¿Cuáles de los siguientes vectores están en $R(T)$?
a) $(0, 0, 6)$. b) $(1, 3, 0)$. c) $(2, 4, 1)$.

4. Sea $T:R^4 \to R^3$ la transformación lineal del ejercicio 3. ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $\ker(T)$?
a) $(3, -8, 2, 0)$. b) $(0, 0, 0, 1)$. c) $(0, -4, 1, 0)$.

5. Sea $T:P_2 \to P_3$ la transformación lineal definida por $T(p(x)) = xp(x)$. ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $\ker(T)$?
a) x^3. b) 0. c) $1 + x$.

6. Sea $T:P_2 \to P_3$ la transformación lineal del ejercicio 5. ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $R(T)$?
a) $x + x^2$. b) $1 + x$. c) $3 - x^2$.

7. Encontrar una base para el núcleo
a) del operador lineal del ejercicio 1.
b) de la transformación lineal del ejercicio 3.
c) de la transformación lineal del ejercicio 5.

8. Encontrar una base para el recorrido
a) del operador lineal el ejercicio 1. b) de la transformación lineal del ejercicio 3.
c) de la transformación lineal del ejercicio 5.

9. Comprobar la fórmula (1) del teorema de la dimensión para
a) el operador lineal del ejercicio 1. b) la transformación lineal del ejercicio 3.
c) la transformación lineal del ejercicio 5.

En los ejercicios del 10 al 13, sea T la multiplicación por la matriz A. Encontrar
a) una base para el recorrido de T. b) una base para el núcleo de T.
c) l rango y la nulidad de T. d) el rango y la nulidad de A.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ **11.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ **13.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

14. Describir el recorrido y el espacio nulo de la proyección ortogonal sobre
a) el plano xz.
b) el plano yz.
c) el plano cuya ecuación es $y = x$.

15. Sea V cualquier espacio vectorial y sea $T:V \to V$ definida por $T(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}$.
a) ¿Cuál es el núcleo de T? b) ¿Cuál es el recorrido de T?

16. En cada inciso, usando la información proporcionada para obtener la nulidad de T.
a) $T:R^5 \to R^7$ tiene rango 3. b) $T:P_4 \to P_3$ tiene rango 1.
c) El recorrido de $T:R^6 \to R^3$ es R^3. d) $T:M_{22} \to M_{22}$ tiene rango 3.

17. Sea A una matriz 7×6 tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial, y sea $T:R^6 \to R^7$ la multiplicación por A. Encontrar el rango y la nulidad de A.

18. Sea A una matriz 5×7 con rango 4.
a) ¿Cuál es la dimensión del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?
b) ¿Es consistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para todos los vectores $\mathbf{b}$ en R^5? Explicar la respuesta.

19. Sea $T:R^3 \to V$ una transformación lineal de R^3 a cualquier espacio vectorial. Demostrar que el núcleo de T es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, sólo el origen o todo R^3.

20. Sea $T:V \to R^3$ una transformación lineal de cualquier espacio vectorial a R^3. Demostrar que el recorrido de T es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen, sólo el origen o todo R^3.

21. Sea $T:R^3 \to R^3$ la multiplicación por

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que el núcleo de T es una recta que pasa por el origen y encontrar ecuaciones paramétricas de ésta.
b) Demostrar que el recorrido de T es un plano que pasa por el origen y encontrar una ecuación de éste.

22. Demostrar: Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para V y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son vectores en W, no necesariamente distintos, entonces existe una transformación lineal $T:V \to W$ tal que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.

23. Demostrar el teorema de la dimensión en los casos en que
a) $\dim(\ker(T)) = 0$. b) $\dim(\ker(T)) = n$.

24. Sea $T:V \to V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Demostrar que $R(T) = V$ si y sólo si $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

25. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea $D:P_3 \to P_2$ la transformación derivación $D(\mathbf{p}) = p'(x)$. Describir el núcleo de D.

26. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea $J:P_1 \to R$ la transformación integración $J(\mathbf{p}) = p(x)\,dx$. Describir el núcleo de J.

27. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea $D:V \to W$ la transformación derivación $D(\mathbf{p}) = f(x)$, donde $V = C^2(-\infty, \infty)$ y $W = F(-\infty, \infty)$. Describir el núcleo de D o D.

8.3 TRANSFORMACIONES LINEALES INVERSAS

En la sección 4.3 se analizaron las propiedades de las transformaciones lineales uno a uno de R^n a R^m. En esta sección se extenderán tales ideas a transformaciones lineales generales.

TRANSFORMACIONES LINEALES UNO A UNO

Recuérdese de la sección 4.3 que una transformación lineal de R^n a R^m se denomina *uno a uno o biunívoca* si mapea vectores distintos de R^n en vectores distintos de R^m. La siguiente definición generaliza esta idea.

Definición. Una transformación lineal $T: V \to W$ se llama ***uno a uno*** si T mapea vectores distintos de V en vectores distintos de W.

Ejemplo 1 Recuérdese por el teorema 4.3.1 que si A es una matriz $n \times n$ y $T_A: R^n \to R^n$ es la multiplicación por A, entonces T_A es uno a uno si y sólo si A es una matriz invertible. Δ

Ejemplo 2 Sea $T: P_n \to P_{n+1}$ la transformación lineal

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x)$$

analizada en el ejemplo 8 de la sección 8.1. Si

$$\mathbf{p} = p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \qquad \text{y} \qquad \mathbf{q} = q(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n$$

son polinomios distintos, entonces difieren en por lo menos un coeficiente. Así,

$$T(\mathbf{p}) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1} \qquad \text{y} \qquad T(\mathbf{q}) = d_0 x + d_1 x^2 + \cdots + d_n x^{n+1}$$

también difieren en por lo menos un coeficiente. Por tanto, T es uno a uno, ya que mapea polinomios distintos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en polinomios distintos $T(\mathbf{p})$ y $T(\mathbf{q})$. Δ

Ejemplo 3 ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea

$$D: C^1(-\infty, \infty) \to F(-\infty, \infty)$$

la transformación derivación analizada en el ejemplo 11 de la sección 8.1. Esta transformación lineal *no* es uno a uno, ya que mapea en la misma función a funciones que difieren por una constante. Por ejemplo,

$$D(x^2) = D(x^2 + 1) = 2x \quad \Delta$$

El siguiente teorema establece una relación entre una transformación lineal uno a uno y su núcleo.

Teorema 8.3.1. *Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *T es uno a uno.*
b) *El núcleo de T sólo contiene al vector cero; es decir, $ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.*
c) *Nulidad $(T) = 0$.*

Demostración. Se deja como ejercicio fácil demostrar la equivalencia de *b)* y *c)*; la demostración se completará probando la equivalencia de *a)* y *b)*.

$a \Rightarrow b$: Supóngase que T es uno a uno, y sea **v** cualquier vector en ker(T). Como **v** y **0**, están en ker(T), se tiene $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ y $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Pero esto indica que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ya que T es uno a uno; así, ker(T) sólo contiene al vector cero.

$b \Rightarrow a$: Supóngase que $\ker(T) = \mathbf{0}$ y que **v** y **w** son vectores distintos en V; es decir,

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} \neq \mathbf{0} \tag{1}$$

Para demostrar que T es uno a uno es necesario probar que $T(\mathbf{v})$ y $T(\mathbf{w})$ son vectores distintos. Pero si este no fuese el caso, entonces se tendría

$$T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$$
$$T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$$
$$T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

lo cual indica que $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ está en el núcleo de T. Como $\ker(T) = \mathbf{0}$, se tiene que

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

lo cual contradice (1). Así, $T(\mathbf{v})$ y $T(\mathbf{w})$ deben ser distintos. ▯

Ejemplo 4 En cada inciso, determinar si la transformación lineal es uno a uno, encontrando el núcleo o la nulidad y aplicando el teorema 8.3.1.

a) $T{:}R^2 \to R^2$ hace girar a cada vector por un ángulo θ.
b) $T{:}R^3 \to R^3$ es la proyección ortogonal sobre el plano xy.
c) $T{:}R^6 \to R^4$ es la multiplicación por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución de a). Del ejemplo 5 de la sección 8.2, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, así que T es uno a uno.

Solución de b). Del ejemplo 4 de la sección 8.2, ker(T) contiene vectores diferentes de cero, de modo que T no es uno a uno.

Solución de c). Del ejemplo 7 de la sección 8.2, nulidad $(T) = 4$, así que T no es uno a uno. Δ

En el caso especial en que T es un *operador lineal* sobre un espacio vectorial *de dimensión finita*, entonces se puede agregar otra proposición al teorema 8.3.1.

Teorema 8.3.2. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, y $T:V \to V$ es un operador lineal, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *T es uno a uno.*
b) *$ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.*
c) *Nulidad $(T) = 0$.*
d) *El recorrido de T es V; es decir, $R(T) = V$.*

Demostración. Se sabe que *a*), *b*) y *c*) son equivalentes, de modo que la demostración se puede completar probando la equivalencia de *c*) y *d*).
$c \Rightarrow d$. Supóngase que $\dim(V) = n$ y que nulidad $(T) = 0$. Por el teorema de la dimensión (teorema 8.2.3) se concluye que

$$\text{rango}(T) = n - \text{nulidad } (T) = n.$$

Por definición, rango(T) es la dimensión del recorrido de T, así que el recorrido de T tiene dimensión n. Ahora, por el teorema 5.4.7 se concluye que el recorrido de T es V, ya que los dos espacios tienen la misma dimensión.

$d \Rightarrow c$. Supóngase que $\dim(V) = n$ y que $R(T) = V$. Por estas relaciones se concluye que $\dim(R(T)) = n$, o bien, de manera equivalente, que rango $(T) = n$. entonces, por el teorema de la dimensión (teorema 8.2.3) se concluye que

$$\text{nulidad } (T) = n - \text{rango}(T) = n - n = 0.$$

Ejemplo 5 Sea $T_A:R^4 \to R^4$ la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Determinar si T_A es uno a uno.

Solución. Como se hizo notar en el ejemplo 1, el problema dado es equivalente a determinar si A es invertible. Pero $\det(A) = 0$, ya que los dos primeros renglones de A son proporcionales y, en consecuencia, A no es invertible. Por tanto, T_A no es uno a uno. Δ

TRANSFORMACIONES LINEALES INVERSAS

En la sección 4.3 se definió la *inversa* de un operador matricial uno a uno $T_A:R^n \to R^n$ como el operador matricial $T_{A^{-1}}:R^n \to R^n$, y se demostró que si $\mathbf{w}$ es la imagen de un vector $\mathbf{x}$ bajo T_A, entonces $T_{A^{-1}}$ mapea $\mathbf{w}$ de regreso en $\mathbf{x}$. A continuación, estas ideas se extenderán a transformaciones lineales generales.

Recuérdese que si $T:V \to W$ es una transformación lineal, entonces el recorrido de T, denotado por $R(T)$, es el subespacio de W que consta de todas las imágenes bajo T de los vectores en V. Si T es uno a uno, entonces cada vector **v** en V tiene una imagen única $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ en $R(T)$. Esta unicidad del vector imagen permite definir una nueva función, denominada ***inversa de T***, denotada por T^{-1}, que mapea **w** de regreso en **v** (figura 1).

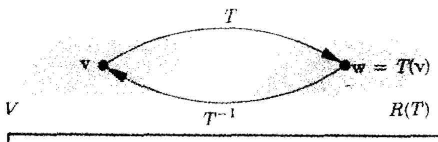


Figura 1 La inversa de T mapea $T(\mathbf{v})$ de regreso en **v**.

Se puede demostrar (ejercicio 19) que $T^{-1}: R(T) \to V$ es una transformación lineal. Además, por la definición de T^{-1} se concluye que

$$T^{-1}(T(\mathbf{v})) = T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \tag{2a}$$

$$T(T^{-1}(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \tag{2b}$$

de modo que T y T^{-1}, cuando se aplican consecutivamente en cualquier orden, cancelan entre sí el efecto que tienen.

OBSERVACIÓN. Es importante notar que si $T:V \to W$ es una transformación lineal uno a uno, entonces el dominio de T^{-1} es el *recorrido* de T. Éste puede ser o no todo W. Sin embargo, en el caso especial en que $T:V \to V$ es un operador lineal uno a uno, por el teorema 8.3.2 se concluye que $R(T) = V$, es decir, el dominio de T^{-1} es *todo* V.

Ejemplo 6 en el ejemplo 2 se demostró que la transformación lineal $T:P_n \to P_{n+1}$ definida por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x)$$

es uno a uno; así, T tiene inversa. Aquí, el recorrido de T *no* es todo P_{n+1}; en vez de ello, $R(T)$ es el subespacio de P_{n+1} que consta de los polinomios con término constante cero. Este hecho es evidente a partir de la fórmula para T:

$$T(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) = c_0x + c_1x^2 + \cdots + c_nx^{n+1}$$

Se concluye que $T^{-1}:R(T) \to P_n$ está definida por la fórmula

$$T^{-1}(c_0x + c_1x^2 + \cdots + c_nx^{n+1}) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

Por ejemplo, en el caso en que $n = 4$,

$$T^{-1}(2x - x^2 + 5x^3 + 3x^4) = 2 - x + 5x^2 + 3x^3 \quad \Delta$$

Ejemplo 7 Sea $T:R^3 \to R^3$ el operador lineal definido por la fórmula

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2,\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3,\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$

Determinar si T es uno a uno; en caso afirmativo, encontrar $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$.

Solución. Por el teorema 4.3.3, la matriz estándar para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(comprobar). Esta matriz es invertible y por la fórmula (1) de la sección 4.3, la matriz estándar para T^{-1} es

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Se concluye que

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = [T^{-1}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -11x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ -12x_1 + 7x_2 + 10x_3 \end{bmatrix}$$

Expresando este resultado en notación horizontal se obtiene

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ -11x_1 + 6x_2 + 9x_3,\ -12x_1 + 7x_2 + 10x_3) \quad \Delta$$

INVERSAS DE COMPOSICIONES

El siguiente teorema muestra que la composición de transformaciones lineales uno a uno es uno a uno, y relaciona la inversa de la composición con las inversas de las transformaciones lineales individuales.

> **Teorema 8.3.3.** *Si $T_1:U \to V$ y $T_2:V \to W$ son transformaciones lineales uno a uno, entonces:*
>
> *a)* $T_2 \circ T_1$ *es uno a uno.*
> *b)* $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

Demostración de a). Se quiere demostrar que $T_2 \circ T_1$ transforma vectores distintos de U en vectores distintos de W. Pero si **u** y **v** son vectores distintos de U, entonces $T_1(\mathbf{u})$ y $T_1(\mathbf{v})$ son vectores distintos de V ya que T_1 es uno a uno. Lo anterior y el hecho de que T_2 es uno a uno indican que

$$T_2(T_1(\mathbf{u})) \qquad \text{y} \qquad T_2(T_1(\mathbf{v}))$$

también son vectores distintos. Pero estas expresiones también se pueden escribir como

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) \qquad \text{y} \qquad (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v})$$

de modo que $T_2 \circ T_1$ transforma **u** y **v** en vectores distintos de W.

Demostración de (*b*). Quiere demostrarse que

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(\mathbf{w}) = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(\mathbf{w})$$

para todo vector **w** en el recorrido de $T_2 \circ T_1$. Para este propósito, sea

$$\mathbf{u} = (T_2 \circ T_1)^{-1}(\mathbf{w}) \tag{3}$$

de modo que la meta es demostrar que

$$\mathbf{u} = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(\mathbf{w})$$

Pero por (3) se concluye que

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$$

o bien, de manera equivalente,

$$T_2(T_1(\mathbf{u})) = \mathbf{w}$$

Ahora, aplicando T_2^{-1} a cada miembro de esta ecuación y luego T_1^{-1} a cada miembro del resultado, se obtiene (comprobar)

$$\mathbf{u} = T_1^{-1}(T_2^{-1}(\mathbf{w}))$$

o bien, de manera equivalente,

$$\mathbf{u} = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(\mathbf{w}) \quad \square$$

En otras palabras, el inciso b) del teorema 8.3.3 establece que *la inversa de una composición es la composición de las inversas en orden invertido*. Este resultado se puede extender a composiciones de tres o más transformaciones lineales; por ejemplo,

$$\boxed{(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1}} \tag{4}$$

En el caso especial en que T_A, T_B, *y* T_C, sean operadores matriciales sobre R^n, entonces la fórmula (4) se puede escribir como

$$(T_C \circ T_B \circ T_A)^{-1} = T_A^{-1} \circ T_B^{-1} \circ T_C^{-1}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\boxed{(T_{CBA})^{-1} = T_{A^{-1}B^{-1}C^{-1}}} \qquad (5)$$

En palabras, esta fórmula establece que *la matriz estándar para la inversa de una composición es el producto de las inversas de las matrices estándar de los operadores individuales en orden invertido.*

En los ejercicios se proporcionan algunos problemas en los que se usan las fórmulas (4) y (5).

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.3

1. En cada inciso, encontrar ker(T) y determinar si la transformación lineal T es uno a uno.
   a) $T: R^2 \to R^2$, donde $T(x, y) = (y, x)$
   b) $T: R^2 \to R^2$, donde $T(x, y) = (0, 2x + 3y)$
   c) $T: R^2 \to R^2$, donde $T(x, y) = (x + y, x - y)$
   d) $T: R^2 \to R^3$, donde $T(x, y) = (x, y, x + y)$
   e) $T: R^2 \to R^3$, donde $T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$
   f) $T: R^3 \to R^2$, donde $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$

2. En cada inciso, sea $T: R^2 \to R^2$ la multiplicación por A. Determinar si T tiene inversa; en caso afirmativo, hallar

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

   a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

3. En cada inciso, sea $T: R^3 \to R^3$ la multiplicación por A. Determinar si T tiene inversa; en caso afirmativo, encontrar

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$$

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

4. En cada inciso, determinar si la multiplicación por A es una transformación lineal uno a uno.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

5. Sea $T:R^2 \to R^2$ la proyección ortogonal sobre la recta $y = x$ (figura 2).
   a) Encontrar el núcleo de T.
   b) ¿Es T uno a uno? Justificar la conclusión.

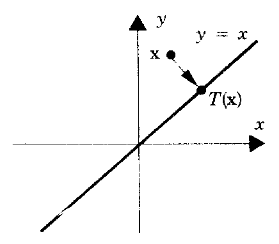


Figura 2

6. Sea $T:R^2 \to R^2$ el operador lineal $T(x, y) = (-x, y)$ que refleja cada punto con respecto al eje y (figura 3).
   a) Encontrar el núcleo de T.
   b) ¿Es T uno a uno? Justificar la conclusión.

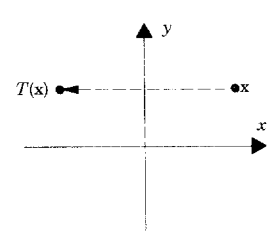


Figura 3

7. En cada inciso, usando la información dada determinar si T es uno a uno.
   a) $T:R^m \to R^m$; nulidad$(T) = 0$.   b) $T:R^n \to R^n$; rango $(T) = n - 1$.
   c) $T:R^m \to R^n$; $n < m$.   d) $T:R^n \to R^n$; $R(T) = R^n$.

8. En cada inciso determinar si la transformación lineal T es uno a uno.
   a) $T: P_2 \to P_3$, donde $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = x(a_0 + a_1x + a_2x^2)$
   b) $T: P_2 \to P_2$, donde $T(p(x)) = p(x + 1)$

9. Sea A una matriz cuadrada tal que $\det(A) = 0$ ¿La multiplicación por A es una transformación lineal? Justificar la conclusión.

10. En cada inciso determinar si el operador lineal $T:R^n \to R^n$ es uno a uno; en caso afirmativo, encontrar $T^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
    $T^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
    a) $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ b) $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1)$
    c) $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$

11. Sea $T:R^n \to R^n$ el operador lineal definido por la fórmula

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n)$$

   a) ¿En qué condiciones T tiene inversa?

b) Suponiendo que se cumplen las condiciones determinadas en el inciso a), encontrar una fórmula para $T^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

12. Sean $T_1{:}R^2 \to R^2$ y $T_2{:}R^2 \to R^2$ los operadores lineales definidos por las fórmulas

$$T_1(x, y) = (x + y, x - y) \qquad \text{y} \qquad T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y)$$

a) Demostrar que T_1 y T_2 son uno a uno.
b) Encontrar fórmulas para $T_1^{-1}(x, y)$, $T_2^{-1}(x, y)$ y $(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y)$.
c) Comprobar que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

13. Sean $T_1{:}P_2 \to P_3$ y $T_2{:}P_3 \to P_3$ las transformaciones lineales definidas por las fórmulas

$$T_1(p(x)) = xp(x) \qquad \text{y} \qquad T_2(p(x)) = p(x + 1)$$

a) Encontrar fórmulas para $T_1^{-1}(p(x))$, $T_2^{-1}(p(x))$ y $(T_2 \circ T_1)^{-1}(p(x))$.
b) Comprobar que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

14. Sean $T_A{:}R^3 \to R^3$, $T_B{:}R^3 \to R^3$ y $T_C{:}R^3 \to R^3$ las reflexiones con respecto al plano *xy*, al plano *xz* y al plano *yz*, respectivamente. Comprobar la fórmula (5) para estos operadores lineales.

15. Sea $T{:}P_1 \to R^2$ la función definida por la fórmula

$$T(p(x)) = (p(0), p(1))$$

a) Encontrar $T(1 - 2x)$.
b) Demostrar que T es una transformación lineal.
c) Demostrar que T es uno a uno.
d) Encontrar $T^{-1}(2, 3)$ y trazar su gráfica.

16. Demostrar: Si V y W son espacios vectoriales de dimensiones finitas tales que $\dim W < \dim V$, entonces no existe ninguna transformación lineal uno a uno $T{:}V \to W$.

17. En cada inciso, determinar si el operador lineal $T{:}M_{22} \to M_{22}$ es uno a uno. En caso afirmativo, encontrar

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

a) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ b) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ c) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

18. Sea $T{:}R^2 \to R^2$ el operador lineal definido por la fórmula $T(x, y) = (x + ky, -y)$. Demostrar que T es uno a uno para todo valor real de k y que $T^{-1} = T$.

19. Demostrar que si $T{:}V \to W$ es una transformación lineal uno a uno, entonces $T^{-1}{:}R(T) \to V$ es una transformación lineal.

20. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea $J{:}P_1 \to R$ la transformación integración $J(\mathbf{p}) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$. Determinar si J es uno a uno. Justificar la conclusión.

8.4 MATRICES DE TRANSFORMACIONES LINEALES GENERALES

En esta sección se demostrará que si V y W son espacios vectoriales de dimensiones finitas (no necesariamente R^n y R^m), entonces con un poco de ingenio cualquier transformación lineal $T{:}V \to W$ se puede considerar como una transformación matricial. La idea básica es trabajar con las matrices de coordenadas de los vectores, en vez de hacerlo con los vectores mismos.

MATRICES DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Supóngase que V es un espacio vectorial n dimensional y que W es un espacio vectorial m dimensional. Si se eligen bases B y B' para V y W, respectivamente, entonces para todo $\mathbf{x}$ en V la matriz coordenadas $[\mathbf{x}]_B$ es un vector en R^n y la matriz coordenadas $[T(\mathbf{x})]_{B'}$ es un vector en R^m (figura 1).

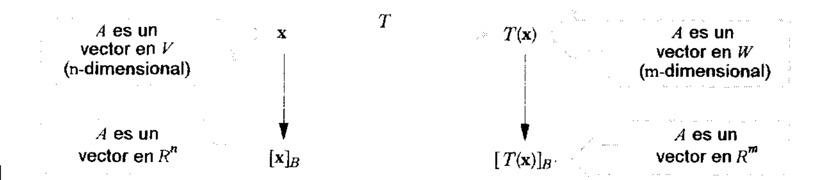


Figura 1

Si, como se ilustra en la figura 2, se completa el rectángulo sugerido en la figura 1, se obtiene una aplicación de R^n a R^m, que se puede demostrar es una transformación lineal. Si se deja que A sea la matriz estándar de esta transformación, entonces

$$A[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'} \tag{1}$$

La matriz A en (1) se denomina ***matriz para T con respecto a las bases B y B'***.

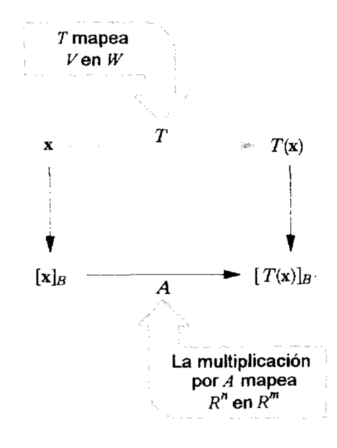


Figura 2

Después, en esta sección se darán algunos usos de la matriz A en (1), pero primero se mostrará cómo se puede calcular. Para este efecto, supóngase que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para el espacio n dimensional V, y que $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es una base para el espacio m dimensional W. Se trata de encontrar una matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tal que (1) se cumpla para todos los vectores $\mathbf{x}$ en V. En particular, se quiere que esta ecuación sea verdadera para los vectores básicos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$; es decir,

$$A[\mathbf{u}_1]_B = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}, \quad A[\mathbf{u}_2]_B = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}, \quad \ldots, \quad A[\mathbf{u}_n]_B = [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \tag{2}$$

Pero

$$[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad [\mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$A[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$A[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A[\mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo estos resultados en (2) se obtiene

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [\,T(\mathbf{u}_1)\,]_{B'}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [\,T(\mathbf{u}_2)\,]_{B'}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = [\,T(\mathbf{u}_n)\,]_{B'}$$

lo cual demuestra que las columnas consecutivas de A son las matrices de coordenadas de

$$T(\mathbf{u}_1),\ T(\mathbf{u}_2),\ \ldots,\ T(\mathbf{u}_n)$$

con respecto a la base B'. Así, la matriz para T con respecto a las bases B y B' es

$$A = \Big[\,[\,T(\mathbf{u}_1)\,]_{B'} \;\vdots\; [\,T(\mathbf{u}_2)\,]_{B'} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; [\,T(\mathbf{u}_n)\,]_{B'}\Big] \tag{3}$$

Esta matriz por lo común se denota con el símbolo

$$[\,T\,]_{B',B}$$

de modo que la expresión precedente también se puede escribir como

$$\boxed{[\,T\,]_{B',B} = \Big[\,[\,T(\mathbf{u}_1)\,]_{B'} \;\vdots\; [\,T(\mathbf{u}_2)\,]_{B'} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; [\,T(\mathbf{u}_n)\,]_{B'}\Big]} \tag{4}$$

y por (1) esta matriz tiene la propiedad

$$\boxed{[\,T\,]_{B',B}[\mathbf{x}]_B = [\,T(\mathbf{x})\,]_{B'}} \tag{4a}$$

OBSERVACIÓN. Nótese que en la notación $[T]_{B',B}$ el subíndice derecho es una base para el dominio de T y que el subíndice izquierdo es una base para el espacio imagen de T (figura 3).

Figura 3

$[T]_{B',B}$

Base del espacio imagen	Base del dominio

Además, obsérvese cómo el subíndice B parece "cancelarse" en la fórmula (4a) (figura 4).

$$[T]_{B',B}[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

Cancelación

Figura 4

MATRICES DE OPERADORES LINEALES

En el caso especial donde $V = W$ (de modo que $T:V \to V$ es un operador lineal), es común tomar $B = B'$ al construir una matriz para T. En este caso la matriz resultante se denomina ***matriz para T con respecto a la base B*** y se denota por $[T]_B$, en vez de $[T]_{B',B}$. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, entonces en este caso las fórmulas (4) y (4a) se convierten en

$$\boxed{[T]_B = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_B \;\vdots\; [T(\mathbf{u}_2)]_B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; [T(\mathbf{u}_n)]_B\right]} \tag{5}$$

y

$$\boxed{[T]_B[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_B} \tag{5a}$$

En términos informales, las expresiones (4a) y (5a) establecen que *la matriz para T multiplicada por la matriz de coordenadas para* $\mathbf{x}$ *es la matriz de coordenadas para* $T(\mathbf{x})$.

Ejemplo 1 Sea $T:P_1 \to P_2$ la transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = xp(x)$$

Encontrar la matriz para T con respecto a las bases estándar

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \qquad \text{y} \qquad B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

donde

$$\mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2 = x; \quad \mathbf{v}_1 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2$$

Solución. A partir de la fórmula dada para T se obtiene

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1) = (x)(1) = x$$
$$T(\mathbf{u}_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

Por inspección es posible determinar las matrices de coordenadas para $T(\mathbf{u}_1)$ y $T(\mathbf{u}_2)$ con respecto a B'; éstas son

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz para T con respecto a B y B' es

$$[T]_{B',B} = \Big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \;\vdots\; [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \Big] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Ejemplo 2 Sea $T{:}P_1 \to P_2$ la transformación lineal del ejemplo 1. Demostrar que la matriz

$$[T]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(obtenida en el ejemplo 1) satisface (4a) para todo vector $\mathbf{x} = a + bx$ en P_1.

Solución. Como $\mathbf{x} = p(x) = a + bx$, se tiene

$$T(\mathbf{x}) = xp(x) = ax + bx^2$$

Para las bases B y B' del ejemplo 1, por inspección se concluye que

$$[\mathbf{x}]_B = [ax + b]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$[T(\mathbf{x})]_{B'} = [ax + bx^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$[T]_{B',B}[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

de modo que (4a) se cumple. Δ

Ejemplo 3 Sea $T{:}R^2 \to R^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{bmatrix}$$

Encontrar la matriz para la transformación T con respecto a las bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ para R^2 y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ para R^3, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución. A partir de la fórmula para T,

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Expresando estos vectores como combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ se obtiene (comprobar)

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3, \quad T(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

Así,

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[T]_{B',B} = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Ejemplo 4 Sea $T: R^2 \to R^2$ el operador lineal definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

y sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ la base, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar $[T]_B$.
b) Comprobar que (5a) se cumple para todo vector $\mathbf{x}$ en R^2.

Solución de a). Por la fórmula dada para T,

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}_1, \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{u}_2$$

Por consiguiente,

$$[T(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [T(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

En consecuencia,

$$[T]_B = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_B \;\vdots\; [T(\mathbf{u}_2)]_B \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución de b). Si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

es cualquier vector en R^2, entonces por la fórmula dada para T

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Para encontrar $[\mathbf{x}]_B$ y $[T(\mathbf{x})]_B$, es necesario expresar (6) y (7) como combinaciones lineales de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Esto conduce a las ecuaciones vectoriales

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Igualando los elementos correspondientes se obtienen los sistemas lineales

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= x_1 \\ k_1 + 2k_2 &= x_2 \end{aligned} \tag{10}$$

y

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= x_1 + x_2 \\ c_1 + 2c_2 &= -2x_1 + 4x_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Resolviendo (10) para k_1 y k_2 se obtiene

$$k_1 = 2x_1 - x_2, \qquad k_2 = -x_1 + x_2$$

de modo que

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

y resolviendo (11) para c_1 y c_2 se obtiene

$$c_1 = 4x_1 - 2x_2, \qquad c_2 = -3x_1 + 3x_2$$

de modo que

$$[T(\mathbf{x})]_B = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

Así,

$$[T]_B[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_B$$

de modo que (5a) se cumple. Δ

MATRICES DE OPERADORES IDENTIDAD

Ejemplo 5 $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ es cualquier base para un espacio vectorial V de dimensión finita e $I: V \to V$ es el operador identidad sobre V, entonces

$$I(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, I(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2, \ldots, I(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$$

Por consiguiente,

$$[I(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [I(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad [I(\mathbf{u}_n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así,

$$[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

En consecuencia, la matriz de operador identidad con respecto a cualquier base es la matriz identidad de $n \times n$. Este resultado se pudo haber anticipado a partir de la fórmula (5a), ya que la fórmula produce

$$[I]_B[\mathbf{x}]_B = [I(\mathbf{x})]_B = [\mathbf{x}]_B$$

lo cual es consistente con el hecho de que $[I]_B = I$. Δ

Se deja como ejercicio demostrar el siguiente resultado.

Teorema 8.4.1. *Si $T{:}R^n \rightarrow R^m$ es una transformación lineal y si B y B' son las bases estándar para R^n y R^m, respectivamente, entonces*

$$[\,T\,]_{B',B} = [\,T\,] \tag{12}$$

Este teorema, establece que en el caso especial en que T transforma R^n en R^m, la matriz para T con respecto a las bases estándar es la matriz estándar para T. En este caso especial la fórmula (4a) de esta sección se reduce a

$$[\,T\,]\mathbf{x} = T(\mathbf{x})$$

POR QUÉ SON IMPORTANTES LAS MATRICES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Hay dos razones esenciales para estudiar matrices de transformaciones lineales generales, una teórica y otra bastante práctica:

- A menudo es posible contestar preguntas teóricas acerca de la estructura de transformaciones lineales generales sobre espacios vectoriales de dimensión finita estudiando simplemente las transformaciones lineales. estas cuestiones se consideran con más detalle en cursos más avanzados de álgebra lineal, aunque se abordarán en secciones ulteriores de este texto.
- Estas matrices hacen posible calcular imágenes de vectores usando multiplicación matricial. Los cálculos se pueden efectuar rápidamente en computadora.

A fin de enfocar la segunda idea, sea $T{:}V \rightarrow W$ una transformación lineal. Como se muestra en la figura 5, la matriz $[T]_{B',B}$ se puede usar para calcular $T(\mathbf{x})$ en tres pasos aplicando el siguiente procedimiento *indirecto*:

x
Cálculo directo
$T(\mathrm{x})$
(1)
(3)
Multiplicar por $[T]_{B',B}$
$[\mathrm{x}]_B$
$[T(\mathrm{x})]_{B'}$
(2)

Figura 5

1) Calcular la matriz coordenadas $[\mathbf{x}]_B$.
2) Multiplicar $\mathbf{x}_B$ por la izquierda por $[T]_{B',B}$ para obtener $[T(\mathrm{x})]_{B'}$.
3) Reconstruir $T(\mathrm{x})$ a partir de su matriz coordenadas $[T(\mathrm{x})]_{B'}$.

Ejemplo 6 Sea $T{:}P_2 \rightarrow P_2$ el operador lineal definido por

$$T(p(x)) = p(3x-5)$$

es decir, $T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(3x-5) + c_2(3x-5)^2$.

a) Encontrar T_B con respecto a la base $B = \{1, x, x^2\}$.
b) Aplicando el procedimiento indirecto, calcular $T(1 + 2x + 3x^2)$.
c) Comprobar el resultado del inciso b) calculando directamente $T(1 + 2x + 3x^2)$.

Solución de a). Por la fórmula para T,

$$T(1) = 1, \qquad T(x) = 3x - 5, \qquad T(x^2) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

de modo que

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución de b). La matriz de coordenadas con respecto a B para el vector $\mathbf{p} = 1 + 2x + 3x^2$ es

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Así, por (5a)

$$\begin{aligned} [T(1 + 2x + 3x^2)]_B &= [T(\mathbf{p})]_B = [T]_B[\mathbf{p}]_B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -84 \\ 27 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a partir de lo cual se concluye que

$$T(1 + 2x + 3x^2) = 66 - 84x + 27x^2$$

Solución de c). Por cálculo directo

$$\begin{aligned} T(1 + 2x + 3x^2) &= 1 + 2(3x - 5) + 3(3x - 5)^2 \\ &= 1 + 6x - 10 + 27x^2 - 90x + 75 \\ &= 66 - 84x + 27x^2 \end{aligned}$$

lo cual concuerda con el resultado del inciso b). Δ

MATRICES DE COMPOSICIONES Y TRANSFORMACIONES INVERSAS

A continuación se enunciarán dos teoremas que son generalizaciones de la fórmula (21) de la sección 4.2 y de la fórmula (1) de la sección 4.3. Se omiten las demostraciones.

Teorema 8.4.2. *Si $T_1{:}U \to V$ y $T_2{:}V \to W$ son transformaciones lineales y si B, B'' y B' son bases para U, V y W, respectivamente, entonces*

$$[\,T_2 \circ T_1\,]_{B',B} = [\,T_2\,]_{B',B''}[\,T_1\,]_{B'',B} \tag{13}$$

Teorema 8.4.3. *Si $T{:}V \to V$ es un operador lineal y si B es una base para V, entonces la siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *T es uno a uno.*
b) $[T]_B$ *es invertible.*

Además, cuando estas condiciones equivalentes se cumplen

$$[\,T^{-1}\,]_B = [\,T\,]_B^{-1} \tag{14}$$

OBSERVACIÓN. En la expresión (13), nótese cómo el subíndice interior B'' (la base para el espacio intermedio V) parece "cancelarse", quedando como subíndices sólo las bases para el dominio y el espacio imagen de la composición (figura 6).

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B''} \quad [T_1]_{B'',B}$$

Cancelación

Figura 6

Esta cancelación de subíndices interiores sugiere la siguiente extensión de la fórmula (13) a composiciones de tres transformaciones lineales (figura 7).

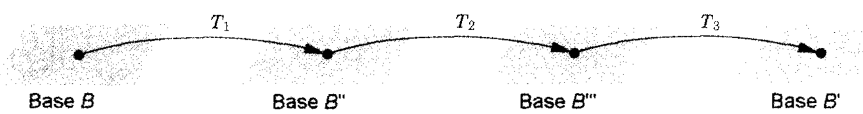


Figura 7

$$[\,T_3 \circ T_2 \circ T_1\,]_{B',B} = [\,T_3\,]_{B',B'''}[\,T_2\,]_{B''',B''}[\,T_1\,]_{B'',B} \tag{15}$$

El siguiente ejemplo ilustra el teorema 8.4.2.

Ejemplo 7 Sea $T_1{:}P_1 \to P_2$ la transformación lineal definida por

$$T_1(p(x)) = xp(x)$$

y sea $T_2{:}P_2 \to P_2$ el operador lineal definido por

$$T_2(p(x)) = p(3x - 5)$$

Entonces la composición $(T_2 \circ T_1){:}P_1 \to P_2$ está dada por

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (3x - 5)p(3x - 5)$$

Así, si $p(x) = c_0 + c_1x$, entonces

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(c_0 + c_1x) &= (3x - 5)(c_0 + c_1(3x - 5)) \\ &= c_0(3x - 5) + c_1(3x - 5)^2 \end{aligned} \tag{16}$$

En este ejemplo, P_1 desempeña el papel de U en el teorema 8.4.2 y P_2 desempeña los dos papeles de V y W; por tanto, en (13) se puede tomar $B' = B''$, de modo que la fórmula se simplifica a

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B'}[T_1]_{B',B} \tag{17}$$

Se elegirán $B = \{1, x\}$ como la base para P_1 y $B' = \{1, x, x^2\}$ como la base para P_2. En los ejemplos 1 y 6 se demostró que

$$[T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Así, por (17) se concluye que

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Como comprobación, $[T_2 \circ T_1]_{B',B}$ se calculará directamente a partir de la fórmula (4). Como $B = \{1, x\}$, por la fórmula (4) con $\mathbf{u}_1 = 1$ y $\mathbf{u}_2 = x$ se concluye que

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \Big[[(T_2 \circ T_1)(1)]_{B'} \;\vdots\; [(T_2 \circ T_1)(x)]_{B'} \Big] \tag{19}$$

Aplicando (16) se obtiene

$$(T_2 \circ T_1)(1) = 3x - 5 \quad \text{y} \quad (T_2 \circ T_1)(x) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

Como $B' = \{1, x, x^2\}$, a partir de ésto se concluye que

$$[(T_2 \circ T_1)(1)]_{B'} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [(T_2 \circ T_1)(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en (19) se obtiene

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

lo cual concuerda con (18). Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.4

1. Sea $T{:}P_2 \to P_3$ la transformación lineal definida por $T(p(x)) = x\,p(x)$.

a) Encontrar la matriz para T con respecto a las bases estándar

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \qquad \text{y} \qquad B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$$

donde

$$\mathbf{u}_1 = 1, \qquad \mathbf{u}_2 = x, \qquad \mathbf{u}_3 = x^2$$
$$\mathbf{v}_1 = 1, \qquad \mathbf{v}_2 = x, \qquad \mathbf{v}_3 = x^2, \qquad \mathbf{v}_4 = x^3$$

b) Comprobar que la matriz $[T]_{B',B}$ obtenida en el inciso a) satisface la fórmula (4a) para todo vector $\mathbf{x} = c_0 + c_1x + c_2x^2$ en P_2.

2. Sea $T{:}P_2 \to P_1$ la transformación lineal definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

a) Encontrar la matriz para T con respecto a las bases estándar $B = \{1, x, x^2\}$ y $B' = 1$, x para P_2 y P_1.

b) Comprobar que la matriz $[T]_{B',B}$ obtenida en el inciso a) satisface la fórmula (4a) para todo vector $\mathbf{x} = c_0 + c_1x + c_2x^2$ en P_2.

3. Sea $T{:}P_2 \to P_2$ el operador lineal definido por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2$$

a) Encontrar la matriz para T con respecto a la base estándar $B = \{1, x, x^2\}$ para P_2.

b) Comprobar que la matriz $[T]_B$ obtenida en el inciso a) satisface la fórmula (5a) para todo vector $\mathbf{x} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ en P_2.

4. Sea $T{:}R^2 \to R^2$ el operador lineal definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

y sea $B = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ la base para la cual

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar $[T]_B$.

b) Comprobar que la fórmula (5a) se cumple para todo vector $\mathbf{x}$ en R^2.

5. Sea $T:R^2 \to R^3$ definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar la matriz $[T]_{B',B}$ con respecto a las bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Comprobar que la fórmula (4a) se cumple para todo vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

en R^2.

6. Sea $T:R^3 \to R^3$ definido por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_1 - x_3)$.

a) Encontrar la matriz para T con respecto a la base $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \qquad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \qquad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$$

b) Comprobar que la fórmula (5a) se cumple para todo vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en R^3.

7. Sea $T:P_2 \to P_2$ el operador lineal definido por $T(p(x)) = p(2x + 1)$; es decir,

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(2x + 1) + c_2(2x + 1)^2$$

a) Encontrar $[T]_B$ con respecto a la base $B = \{1, x, x^2\}$.

b) Aplicar el procedimiento indirecto ilustrado en la figura 5 para calcular $T(2 - 3x + 4x^2)$.

c) Comprobar el resultado obtenido en el inciso b) calculando directamente $T(2 - 3x + 4x^2)$.

8. Sea $T:P_2 \to P_3$ la transformación lineal definida por $T(p(x)) = xp(x - 3)$; es decir,

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = x(c_0 + c_1(x - 3) + c_2(x - 3)^2)$$

a) Encontrar $[T]_{B',B}$ con respecto a las bases $B = \{1, x, x^2\}$ y $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$.

b) Aplicar el procedimiento indirecto ilustrado en la figura 5 para calcular $T(1 + x - x^2)$.

c) Comprobar el resultado obtenido en el inciso b) calculando directamente $T(1 + x - x^2)$.

9. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, y sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

la matriz para $T:R^2 \to R^2$ con respecto a la base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

a) Encontrar $[T(\mathbf{v}_1)]_B$ y $[T(\mathbf{v}_2)]_B$. b) Encontrar $[T(\mathbf{v}_1)]_B$ y $T(\mathbf{v}_2)$.

c) Encontrar una fórmula para $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

d) Aplicar la fórmula obtenida en el inciso c) para calcular $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

10. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de of $T: R^4 \to R^3$ con respecto a las bases

$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Encontrar $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{v}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{v}_3)]_{B'}$, y $[T(\mathbf{v}_4)]_{B'}$. b) Encontrar $T(\mathbf{v}_1)$, $T(\mathbf{v}_2)$, $T(\mathbf{v}_3)$, y $T(\mathbf{v}_4)$.

(c) Encontrar una fórmula para $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right)$. (d) Usar la fórmula obtenida en (*c*) para calcular $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

11. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ la matriz de of $T: P_2 \to P_2$ con respecto a la base

$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde $\mathbf{v}_1 = 3x + 3x^2$, $\mathbf{v}_2 = -1 + 3x + 2x^2$, $\mathbf{v}_3 = 3 + 7x + 2x^2$.

a) Encontrar $[T(\mathbf{v}_1)]_B$, $[T(\mathbf{v}_2)]_B$ y $[T(\mathbf{v}_3)]_B$. b) Obtener $T(\mathbf{v}_1)$, $T(\mathbf{v}_2)$ y $T(\mathbf{v}_3)$.

c) Hallar una fórmula para $T(a_0 + a_1x + a_2x^2)$.

d) Aplicar la fórmula obtenida en el inciso c) para calcular $T(1 + x^2)$.

12. Sea $T_1:P_1 \to P_2$ la transformación lineal definida por

$$T_1(p(x)) = xp(x)$$

y sea $T_2:P_2 \to P_2$ el operador lineal definido por

$$T_2(p(x)) = p(2x + 1)$$

Sean $B = \{1, x\}$ y $B' = \{1, x, x^2\}$ las bases estándar para P_1 y P_2.

a) Encontrar $[T_2 \circ T_1]_{B',B}$, $[T_2]_{B'}$, y $[T_1]_{B',B}$.

b) Escribir una fórmula que relacione las matrices del inciso a).

c) Comprobar que las matrices del inciso a) satisfacen la fórmula enunciada en el inciso b).

13. Sea $T_1 : P_1 \to P_2$ la transformación lineal definida por

$$T_1(c_0 + c_1x) = 2c_0 - 3c_1x$$

y sea $T_2 : P_2 \to P_3$ la transformación lineal definida por

$$T_1(c_0 + c_1x + c_2x^2) = 3c_0x + 3c_1x^2 + 3c_2x^3$$

Sean $B = \{1, x\}$, $B'' = \{1, x, x^2\}$ y $B''' = \{1, x, x^2, x^3\}$.

a) Encontrar $[T_2 \circ T_1]_{B',B}$, $[T_2]_{B',B''}$, y $[T_1]_{B'',B}$.

b) Escribir una fórmula que relacione las matrices del inciso a).

c) Comprobar que las matrices del inciso a) satisfacen la fórmula planteada en el inciso b).

14. Demostrar que si $T:V \to W$ es la transformación cero, entonces la matriz T con respecto a bases cualesquiera para V y W es una matriz cero.

15. Demostrar que si $T:V \to V$ es una contracción o una dilatación de V (ejemplo 4 de la sección 8.1), entonces la matriz para T con respecto a cualquier base para V es una matriz diagonal.

16. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base para un espacio vectorial V. Encontrar la matriz con respecto a B del operador lineal $T:V \to V$ definido por $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_4$, $T(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_1$.

17. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo)***. Sea $D:P_2 \to P_2$ el operador derivación $D(\mathbf{p}) = p'(x)$. En los incisos a) y b), encontrar la matriz D con respecto a la base $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$

a) $\mathbf{p}_1 = 1$, $\mathbf{p}_2 = x$, $\mathbf{p}_3 = x^2$ (b) $\mathbf{p}_1 = 2$, $\mathbf{p}_2 = 2 - 3x$, $\mathbf{p}_3 = 2 - 3x + 8x^2$

c) Usar la matriz del inciso a) para calcular $D(6 - 6x + 24x^2)$.

d) Repetir las instrucciones del inciso c) para la matriz del inciso b).

18. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo)***. En cada inciso, $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ es una base para un subespacio V del espacio vectorial de funciones con valores reales definidas sobre la recta real. Encontrar la matriz con respecto a B del operador derivación $D:V \to V$.

a) $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = \operatorname{sen} x$, $\mathbf{f}_3 = \cos x$ b) $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = e^x$, $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$

c) $\mathbf{f}_1 = e^{2x}$, $\mathbf{f}_2 = xe^{2x}$, $\mathbf{f}_3 = x^2e^{2x}$

19. Demostrar: Si B y B' son las bases estándar para R^n y R^m, respectivamente, entonces la matriz de la transformación lineal $T:R^n \to R^m$ con respecto a las bases B y B' es la matriz estándar para T.

8.5 SEMEJANZA

La matriz de un operador lineal $T{:}V \to V$ depende de la base elegida para V. Uno de los problemas fundamentales del álgebra lineal es elegir una base para V que simplifique la matriz para T; por ejemplo, diagonal o triangular. En esta sección se estudiará este problema.

ELECCIÓN DE BASES A FIN DE OBTENER MATRICES SIMPLES PARA OPERADORES LINEALES

Las bases estándar no necesariamente producen las matrices más simples para operadores lineales. Por ejemplo, considérense el operador lineal $T{:}R^2 \to R^2$ definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

y la base estándar $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ para R^2, donde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por el teorema 8.4.1, la matriz para T con respecto a esta base es la matriz estándar para T; es decir,

$$[T]_B = [T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)]$$

Por (1),

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

En comparación, en el ejemplo 4 de la sección 8.4 se demostró que si

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

entonces la matriz para T con respecto a la base $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es la matriz diagonal

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Esta matriz es más "simple" que (2) en el sentido de que las matrices diagonales poseen propiedades especiales que no tienen las matrices generales.

Uno de los temas principales en cursos más avanzados de álgebra lineal es determinar la "forma más simple posible" que se puede obtener para la matriz un operador lineal al elegir la base correcta. Algunas veces es posible obtener una

matriz diagonal (como se acaba de hacer, por ejemplo); otras veces es necesario establecer una matriz triangular o de alguna otra forma. En este texto sólo será posible mencionar la importancia de este tema importante.

El problema de determinar una base que produzca la matriz más simple posible para un operador lineal $T: V \to V$ se puede atacar encontrando primero una matriz para T con respecto a *cualquier* base; por ejemplo una base estándar, cuando sea posible, y luego cambiando la base de manera que se simplifique la matriz. Antes de proseguir con esta idea, será de utilidad repasar algunos conceptos sobre cambio de base.

Recuérdese por la fórmula (8) de la sección 6.5 que si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ son bases para un espacio vectorial V, entonces la *matriz de transición* de B' a B está definida por la fórmula

$$P = \left[[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B \mid \cdots \mid [\mathbf{u}'_n]_B \right] \tag{5}$$

Esta matriz posee la propiedad de que para todo vector $\mathbf{v}$ en V

$$P[\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{v}]_B \tag{6}$$

es decir, la multiplicación por P mapea la matriz coordenadas para $\mathbf{v}$ con respecto a B' en la matriz coordenadas para $\mathbf{v}$ con respecto a B [véase la fórmula (7)] en la sección 6.5] . En el teorema 6.5.4 se demostró que P es invertible y P^{-1} es la matriz de transición de B a B'.

RELACIÓN ENTRE LAS MATRICES DE TRANSICIÓN Y LOS OPERADORES IDENTIDAD

El siguiente teorema proporciona otro punto de vista útil sobre las matrices de transición; muestra que la matriz transición de una base B' a una base B se puede considerar como la matriz operador identidad.

> **Teorema 8.5.1.** *Si B y B' son bases para un espacio vectorial V de dimensión finita y si $I: V \to V$ es el operador identidad, entonces $[I]_{B,B'}$ es la matriz de transición de B' a B.*

Demostración. Supóngase que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ son bases para V. Usando el hecho de que $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$ en V, por la fórmula (4) de la sección 8.4, con B y B' *invertidas*, se concluye que

$$[I]_{B,B'} = \left[[I(\mathbf{u}'_1)]_B \mid [I(\mathbf{u}'_2)]_B \mid \cdots \mid [I(\mathbf{u}'_n)]_B \right]$$
$$= \left[[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B \mid \cdots \mid [\mathbf{u}'_n]_B \right]$$

Así, por (5), se tiene $[I]_{B,B'} = P$, lo cual demuestra que $[I]_{B,B'}$ es la matriz transición de B' a B. □

El resultado de este teorema se ilustra en la figura 1.

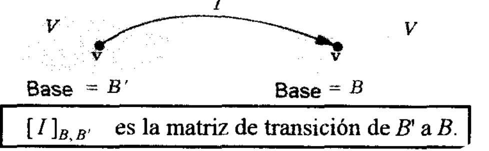


Figura 1 $[I]_{B,B'}$ es la matriz de transición de B' a B.

EFECTO DEL CAMBIO DE BASES SOBRE MATRICES DE OPERADORES LINEALES

Ahora ya es posible considerar el problema principal de esta sección.

> ***Problema.*** Si B y B' son dos bases para un espacio vectorial V de dimensión finita y si $T:V \to V$ es un operador lineal, ¿qué relación existe, si la hay, entre las matrices $[T]_B$ y $[T]_{B'}$?

Esta pregunta se puede contestar considerando la composición de los tres operadores lineales sobre V que se ilustra en la figura 2.

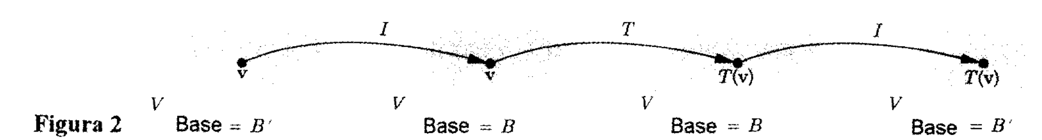


Figura 2

En esta figura, **v** primero es mapeado en sí mismo por el operador identidad, luego **v** es mapeado en $T(\mathbf{v})$ por T, luego $T(\mathbf{v})$ es mapeado en sí mismo por el operador identidad. Los cuatro espacios vectoriales de la composición son los mismos (a saber, V); sin embargo, las bases para los espacios varían. Como el vector inicial es **v** y el vector final es $T(\mathbf{v})$, la composición es la misma que T; es decir,

$$T = I \circ T \circ I \tag{7}$$

Si, como se ilustra en la figura 2, a los espacios vectoriales primero y último se asigna la base B' y a los dos espacios de enmedio se asigna la base B, entonces por (7) y la fórmula (15) de la sección 8.4 (con un ajuste apropiado en los nombres de las bases) se concluye que

$$[T]_{B',B'} = [I \circ T \circ I]_{B',B'} = [I]_{B',B}[T]_{B,B}[I]_{B,B'} \tag{8}$$

o bien, en notación más simple,

$$\boxed{[T]_{B'} = [I]_{B',B}[T]_B[I]_{B,B'}} \tag{9}$$

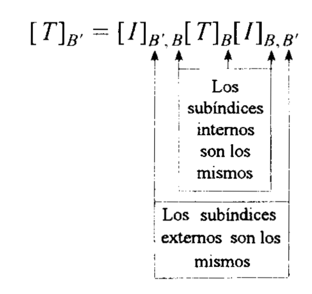
Pero por el teorema 8.5.1 se deduce que $[I]_{B,B'}$ es la matriz transición de B' a B y que, en consecuencia, $I_{B',B}$ es la matriz transición de B a B'. Luego, si se hace $P = [I]_{B,B'}$, entonces $P^{-1} = [I]_{B',B}$, de modo que (9) se puede escribir como

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$

En resumen, se tiene el siguiente teorema.

> **Teorema 8.5.2.** *Sea $T:V \to V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, y sean B y B' bases para V. Entonces*
>
> $$\boxed{[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P} \tag{10}$$
>
> *donde P es la matriz de transición de B' a B.*

Advertencia. Cuando se aplica el teorema 8.5.2 es fácil olvidar si P es la matriz transición de B a B' (incorrecto) o de B' a B (correcto). Puede ser útil escribir (10) en la forma (9), teniendo en mente que los tres subíndices "interiores" son los mismos, y que los dos subíndices exteriores son los mismos:



Una vez que se domina este patrón, basta recordar que $P = [I]_{B,B'}$ es la matriz transición de B' a B y que $P^{-1} = [I]_{B',B}$ es su inversa.

Ejemplo 1 Sea $T{:}R^2 \to R^2$ definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Encontrar la matriz T con respecto a la base estándar $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ para R^2, y luego aplicar el teorema 8.5.2 para encontrar la matriz T con respecto a la base $B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'\}$, donde

$$\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución. En esta sección ya se demostró ver (2) que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Para encontrar $[T]_{B'}$ a partir de (10) es necesario encontrar la matriz transición

$$P = [I]_{B,B'} = \left[[\mathbf{u}_1']_B \mid [\mathbf{u}_2']_B \right]$$

[ver (5)]. Por inspección,

$$\mathbf{u}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{u}_2' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

de modo que

$$[\mathbf{u}_1']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [\mathbf{u}_2']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz transición de B' a B es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El lector puede comprobar que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que por el teorema 8.5.2 la matriz T con respecto a la base B' es

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

lo que concuerda con (4). Δ

SEMEJANZA

La relación en la fórmula (10) es tan importante que existe terminología asociada con ella.

> **Definición.** Si A y B son matrices cuadradas, se dice que ***B es semejante a A*** si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$.

OBSERVACIÓN. Nótese que la ecuación $B = P^{-1}AP$ se puede volver a escribir como

$$A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$$

Haciendo $Q = P^{-1}$ se obtiene

$$A = Q^{-1}BQ$$

que establece que A es semejante a B; por tanto, B es semejante a A si y sólo si A es semejante a B; así, en general, simplemente se dirá que ***A y B son semejantes***.

INVARIANTES BAJO SEMEJANZA

Las matrices semejantes a menudo tienen propiedades en común; por ejemplo, si A y B son matrices semejantes, entonces A y B tienen el mismo determinante. Para darse cuenta de que así es, supóngase que

$$B = P^{-1}AP$$

Entonces

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$$
$$= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

Se hace la siguiente definición.

Definición. Se dice que una propiedad de las matrices cuadradas es ***invariante bajo semejanza*** si tal propiedad es compartida por dos matrices semejantes cualesquiera.

En los términos de esta definición, el determinante de una matriz cuadrada es un invariante bajo semejanza. En la tabla 1 se enumeran otros invariantes bajo semejanza importantes. La demostración de algunos de los resultados de la tabla 1 se proporciona en los ejercicios.

Por el teorema 8.5.2 se concluye que *dos matrices que representan al mismo operador lineal $T:V \to V$ con respecto a dos bases diferentes son semejantes*. Entonces, si B es una base para V y la matriz $[T]_B$ posee alguna propiedad que no varía bajo semejanza, entonces para toda base B' la matriz $[T]_{B'}$ tiene la misma propiedad. Por ejemplo, para dos bases cualesquiera B y B' se debe tener

$$\det([T]_B) = \det([T]_{B'})$$

Por esta ecuación se concluye que el valor del determinante depende de T, pero no de la base particular que se usa para obtener la matriz para T. Así, el determinante se puede considerar como una propiedad del operador lineal T; de hecho, si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces el ***determinante del operador lineal T*** se puede *definir* como

TABLA 1. ***Invariantes bajo semejanza***

Propiedad	**Descripción**
Determinante	A y $P^{-1}AP$ tienen el mismo determinante.
Invertibilidad	A es invertible si y sólo si $P^{-1}AP$ es invertible.
Rango	A y $P^{-1}AP$ tienen el mismo rango.
Nulidad	A y $P^{-1}AP$ tienen la misma nulidad.
Traza	A y $P^{-1}AP$ tienen la misma traza.
Polinomio característico	A y $P^{-1}AP$ tienen el mismo polinomio característico.
Eigenvalores	A y $P^{-1}AP$ tienen los mismos eigenvalores.
Dimensión del eigenespacio	Si λ es un eigenvalor de A y $P^{-1}AP$, entonces el eigenespacio de A correspondiente a λ y el eigenespacio de $P^{-1}AP$ correspondiente a λ tienen la misma dimensión.

$$\det(T) = \det([T]_B) \tag{11}$$

donde B es cualquier base para V.

Ejemplo 2 Sea $T:R^2 \to R^2$ definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Encontrar det(T).

Solución. Puede elegirse cualquier base B y calcular det($[T]_B$). Si se considera la base estándar, entonces por el ejemplo 1

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

Si se hubiese elegido la base $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ del ejemplo 1, entonces se hubiera obtenido

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

lo cual concuerda con el cálculo precedente. Δ

UN EJEMPLO GEOMÉTRICO

Ejemplo 3 Sea l la recta en el plano xy que pasa por el origen y forma un ángulo con el eje x positivo, donde $0 \leq \theta < \pi$. Como se ilustra en la figura 3, sea $T:R^2 \to R^2$ el operador lineal que mapea cada vector en su reflexión con respecto a la recta l.

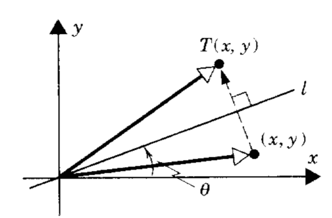


Figura 3

a) Encontrar la matriz estándar para T.
b) Encontrar la reflexión del vector $\mathbf{x} = (1, 2)$ con respecto a la recta l que pasa por el origen y forma un ángulo $\theta = \pi/6$ con el eje x positivo.

Solución de a). Se podría proceder como en el ejemplo 5 de la sección 4.3 e intentar construir la matriz estándar a partir de la fórmula

$$[T]_B = [T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)]$$

donde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es la base estándar para R^2. Sin embargo, es más fácil usar otra estrategia; en vez de hallar directamente $[T]_B$, primero se encontrará la matriz $[T]_{B'}$, donde

$$B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'\}$$

es la base que consta de un vector unitario $\mathbf{u}_1'$ a lo largo de l y de un vector unitario $\mathbf{u}_2'$ perpendicular a l (figura 4).

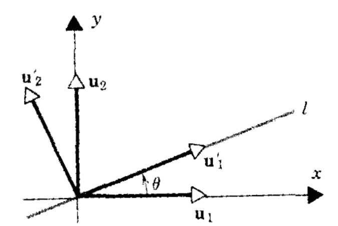


Figura 4

Una vez que se ha encontrado $[T]_{B'}$ se efectúa un cambio de base para encontrar $[T]_B$. Los cálculos son como sigue:

$$T(\mathbf{u}_1') = \mathbf{u}_1' \qquad \text{y} \qquad T(\mathbf{u}_2') = -\mathbf{u}_2'$$

de modo que

$$[T(\mathbf{u}_1')]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad T[(\mathbf{u}_2')]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por los cálculos en el ejemplo 6 de la sección 6.5, la matriz transición de B' a B es

$$P = \left[[\mathbf{u}_1']_B \mid [\mathbf{u}_2']_B \right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{12}$$

Por la fórmula (10) se deduce que

$$[T]_B = P[T]_{B'}P^{-1}$$

Así, por (12) la matriz estándar para T es

$$[T] = P[T]_{B'}P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Solución de b). Por el inciso a) se concluye que la fórmula para T en notación matricial es

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $\theta = \pi/6$ en esta fórmula se obtiene

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

de modo que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $T(1, 2) = (\frac{1}{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1)$. Δ

EIGENVALORES DE UN OPERADOR LINEAL

Los eigenvectores y los eigenvalores se pueden definir para operadores lineales también como matrices. Un escalar λ se denomina ***eigenvalor*** de un operador lineal $T: V \to V$ si en V existe un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. El vector $\mathbf{x}$ se denomina ***eigenvector*** de T correspondiente a λ. De manera equivalente, los eigenvectores de T correspondientes a λ son los vectores diferentes de cero en el núcleo de $\lambda I - T$ (ejercicio 15). Este núcleo se denomina ***eigenespacio*** de T correspondiente a λ.

Se puede demostrar que si V es un espacio vectorial de dimensión finita y B es *cualquier* base para V, entonces

1. Los eigenvalores de T son iguales a los eigenvalores de $[T]_B$.
2. Un vector $\mathbf{x}$ es un eigenvector de T correspondiente a λ sí y sólo si su matriz coordenadas $[\mathbf{x}]_B$ es un eigenvector de $[T]_B$ correspondiente a λ.

Se omiten las demostraciones.

Ejemplo 4 Encontrar eigenvalores y bases para los eigenespacios del operador lineal $T:P_2 \to P_2$ definido por

$$T(a + bx + cx^2) = -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$$

Solución. La matriz T con respecto a la base estándar $B = \{1, x, x^2\}$ es

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(comprobar). Los eigenvalores de T son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ (ejemplo 5 de la sección 7.1). También por ese ejemplo, el eigenespacio de $[T]_B$ correspondiente a $\lambda = 2$ tiene la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y el eigenespacio de $[T]_B$ correspondiente a $\lambda = 1$ tiene la base $\{\mathbf{u}_3\}$, donde

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ son las matrices de coordenadas con respecto a B de

$$\mathbf{p}_1 = -1 + x^2, \qquad \mathbf{p}_2 = x, \qquad \mathbf{p}_3 = -2 + x + x^2$$

Así, el eigenespacio de T_B correspondiente a $\lambda = 2$ tiene la base

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} = \{-1 + x^2, x\}$$

y el correspondiente a $\lambda = 1$ tiene la base

$$\{\mathbf{p}_3\} = \{-2 + x + x^2\}$$

Como comprobación, el lector debe usar la fórmula dada para T a fin de verificar que $T(\mathbf{p}_1) = 2\mathbf{p}_1$, $T(\mathbf{p}_2) = 2\mathbf{p}_2$ y $T(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_3$. Δ

Ejemplo 5 Sea $T:R^3 \to R^3$ el operador lineal definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

Encontrar una base para R^3 con respecto a la cual la matriz para T sea diagonal.

Solución. Primero se encontrará la matriz estándar para T; luego se buscará un cambio de base que diagonalice la matriz estándar.

Si $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ denota la base estándar para R^3, entonces

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

de modo que la matriz estándar para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Ahora se quiere cambiar de la base estándar B a una nueva base $B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \mathbf{u}_3'\}$ a fin de obtener una matriz diagonal para T. Si se hace que P sea la matriz transición de la base desconocida B' a la base estándar B, entonces por el teorema 8.5.2 las matrices T y $[T]_{B'}$ se relacionan mediante

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]P \tag{14}$$

En el ejemplo 1 de la sección 7.2 se encontró que la matriz la expresión (13) es diagonalizada por

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como P representa la matriz transición de la base $B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \mathbf{u}_3'\}$ a la base estándar $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, las columnas de P son $[\mathbf{u}_1']_B$, $[\mathbf{u}_2']_B$, y $[\mathbf{u}_3']_B$, de modo que

$$[\mathbf{u}_1']_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{u}_2']_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{u}_3']_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{u}_1' = (-1)\mathbf{e}_1 + (0)\mathbf{e}_2 + (1)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2' = (0)\mathbf{e}_1 + (1)\mathbf{e}_2 + (0)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3' = (-2)\mathbf{e}_1 + (1)\mathbf{e}_2 + (1)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son vectores básicos que producen una matriz diagonal para $[T]_{B'}$. Como comprobación, en seguida se calculará directamente $[T]_{B'}$. Por la fórmula dada para T se tiene que

$$T(\mathbf{u}_1') = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}_1', \qquad T(\mathbf{u}_2') = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}_2', \qquad T(\mathbf{u}_3') = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_3'$$

de modo que

$$[T(\mathbf{u}_1')]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(\mathbf{u}_2')]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(\mathbf{u}_3')]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$[T]_{B'} = \Big[[T(\mathbf{u}_1')]_{B'} \;\vdots\; [T(\mathbf{u}_2')]_{B'} \;\vdots\; [T(\mathbf{u}_3')]_{B'}\Big] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es consistente con (14), ya que

$$P^{-1}[T]P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.5

En los ejercicios del 1 al 7 encontrar la matriz T con respecto a B, y usando el teorema 8.5.2 para calcular la matriz T con respecto a B'.

1. $T: R^2 \to R^2$ está definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. $T:R^2 \to R^2$ está definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$$

$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. $T:R^2 \to R^2$ es la rotación de 45° con respecto al origen; B y B' son las bases del ejercicio 1.

4. $T:R^3 \to R^3$ está definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 \\ x_1 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

B es la base estándar para R^3 y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donue

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. $T:R^3 \to R^3$ es la proyección ortogonal sobre el plano xy; B y B' son como en el ejercicio 4.

6. $T:R^2 \to R^2$ está definido por $T(\mathbf{x}) = 5\mathbf{x}$; B y B' son las bases del ejercicio 2.

7. $T:P_1 \to P_1$ está definido por $T(a_0 + a_1x) = a_0 + a_1(x + 1)$; $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$, donde $\mathbf{p}_1 = 6 + 3x$, $\mathbf{p}_2 = 10 + 2x$, $\mathbf{q}_1 = 2$, $\mathbf{q}_2 = 3 + 2x$.

8. Encontrar $\det(T)$

a) $T: R^2 \to R^2$, donde $T(x_1, x_2) = (3x_1 - 4x_2, -x_1 + 7x_2)$
b) $T: R^3 \to R^3$, donde $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$
c) $T: P_2 \to P_2$, donde $T(p(x)) = p(x - 1)$

9. Demostrar que las siguientes características son invariantes bajo semejanza.
a) Rango. b) Nulidad. c) Invertibilidad.

10. Sea $T:P_4 \to P_4$ el operador lineal definido por la fórmula $T(p(x)) = p(2x + 1)$.
a) Encontrar una matriz para T con respecto a alguna base conveniente; luego, usando el resultado del ejercicio 9, encontrar el rango y la nulidad de T.
b) Con el resultado del inciso a), determinar si T es uno a uno.

11. En cada inciso, hallar una base para R^2 con respecto a la que la matriz para T sea diagonal.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$ b) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

12. En cada inciso, encontrar una base para R^3 con respecto a la que la matriz para T sea diagonal.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$ b) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 4x_3 \end{bmatrix}$

13. Sea $T{:}P_2 \rightarrow P_2$ definido por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$$

a) Encontrar los eigenvalores de T. b) Hallar bases para los eigenespacios de T.

14. Sea $T{:}M_{22} \rightarrow M_{22}$ definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{bmatrix}$$

a) Encontrar los eigenvalores de T.
b) Obtener las bases para los eigenespacios de T.

15. Sea λ un eigenvalor de un operador lineal $T{:}V \rightarrow V$. Demostrar que los eigenvectores de T correspondientes a λ son los vectores diferentes de cero en el núcleo de $\lambda I - T$.

16. Demostrar que si A y B son matrices semejantes, entonces A^2 y B^2 también son semejantes. De manera más general, demostrar que A^k y B^k son semejantes, donde k es un cualquier entero positivo.

17. Sean C y D matrices $m \times n$, y sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para un espacio vectorial V. Demostrar que si $C[\mathbf{x}]_B = D[\mathbf{x}]_B$ para todo $\mathbf{x}$ en V, entonces $C = D$.

18. Sea l una recta en el plano xy que pasa por el origen y forma un ángulo θ con el eje x positivo. Como se ilustra en la figura 5, sea $T{:}R^2 \rightarrow R^2$ la proyección ortogonal de R^2 sobre l. Con el método del ejemplo 3, demostrar que

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

[*Nota*. Ver el ejemplo 5 de la sección 4.3.]

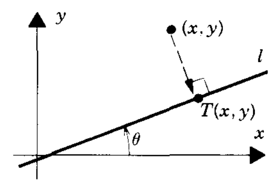


Figura 5

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Sean A una matriz $n \times n$, B una matriz $n \times 1$ diferente de cero y $\mathbf{x}$ un vector en R^n expresado en notación matricial. ¿Es $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B$ un operador lineal sobre R^n? Justificar la respuesta.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   a) Demostrar que

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & -\operatorname{sen} 3\theta \\ \operatorname{sen} 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$$

   b) Conjeturar la forma de la matriz A^n para cualquier entero positivo n.
   c) Considerando el efecto geométrico de $T: R^2 \to R^2$, donde T es la multiplicación por A, obtener geométricamente el resultado del inciso b).

3. Sea $\mathbf{v}_0$ un vector fijo en un espacio V con producto interior, y sea $T: V \to V$ definido por $T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle \mathbf{v}_0$. Demostrar que T es un operador lineal sobre V.

4. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vectores fijos en R^n, y sea $T: R^n \to R^m$ la función definida por $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_m)$, donde $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i$ es el producto interior euclidiano sobre R^n.
   a) Demostrar que T es una transformación lineal.
   b) Demostrar que la matriz con vectores renglón $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ es la matriz estándar para T.

5. Sean $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base estándar para R^4 y $T: R^4 \to R^3$ la transformación lineal para la cual

$$T(\mathbf{e}_1) = (1, 2, 1), \quad T(\mathbf{e}_2) = (0, 1, 0),$$
$$T(\mathbf{e}_3) = (1, 3, 0), \quad T(\mathbf{e}_4) = (1, 1, 1)$$

   a) Encontrar bases para el recorrido y el núcleo de T.
   b) Encontrar el rango y la nulidad de T.

6. Supóngase que los vectores en R^3 se denotan por matrices de 1×3, y defínase $T: R^3 \to R^3$ por

$$T([x_1 \quad x_2 \quad x_3]) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

   a) Encontrar una base para el núcleo de T.
   b) Encontrar una base para el recorrido de T.

7. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base para un espacio vectorial V y $T{:}V \to V$ el operador lineal para el que

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4$$
$$T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$$
$$T(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4$$
$$T(\mathbf{v}_4) = -2\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4$$

a) Encontrar el rango y la nulidad de T. b) Determinar si T es uno a uno.

8. Sean V y W espacios vectoriales, T, T_1 y T_2 transformaciones lineales de V a W y k un escalar. Nuevas transformaciones, $T_1 + T_2$ y kT, se definen mediante las fórmulas

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x})$$
$$(kT)(\mathbf{x}) = k(T(\mathbf{x}))$$

a) Demostrar que $(T_1 + T_2)$: V W y kT: $V \to W$ son transformaciones lineales.
b) Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones lineales de V a W con las operaciones del inciso a) forman un espacio vectorial.

9. Sean A y B matrices semejantes. Demostrar lo siguiente:
a) A^T y B^T son semejantes.
b) Si A y B son invertibles, entonces A^{-1} y B^{-1} son semejantes.

10. (***Teorema alternativo de Fredholm***). Sea $T{:}V \to V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial n dimensional. Demostrar que se cumple exactamente una de las siguientes proposiciones:
i) La ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ tiene una solución para todos los vectores $\mathbf{b}$ en V.
ii) Nulidad de $T > 0$.

11. Sea $T{:}M_{22} \to M_{22}$ el operador lineal definido por

$$T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrar el rango y la nulidad de T.

12. Demostrar: Si A y B son matrices semejantes y si C y D son matrices semejantes, entonces A y C son matrices semejantes.

13. Sea $T{:}M_{22} \to M_{22}$ el operador lineal definido por $T(M) = M^T$. Encontrar la matriz para T con respecto a la base estándar para M_{22}.

14. Sean $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y sea

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

la matriz transición de B' a B
a) Expresar $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ como combinaciones lineales de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

b) Expresar $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ como combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

15. Sean $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base para un espacio vectorial V y $T{:}V \to V$ un operador lineal tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontrar $[T]_{B'}$, donde $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es la base para V definida por

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \qquad \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

16. Demostrar que las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

son semejantes, pero que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

no lo son.

17. Supóngase que $T{:}V \to V$ es un operador lineal y que B es una base para V tal que para cualquier vector $\mathbf{x}$ en V

$$[T(\mathbf{x})]_B = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad [\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Encontrar $[T]_B$.

18. Sea $T{:}V \to V$ un operador lineal. Demostrar que T es uno a uno si y sólo si $\det(T) \neq 0$.

19. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).***

a) Demostrar que la función $D{:}C^2(-\infty, \infty) \to F(-\infty, \infty)$ definida por $D(\mathbf{f}) = f''(x)$ es una transformación lineal.

b) Encontrar una base para el núcleo de D.

c) Demostrar que la función que satisface la ecuación $D(\mathbf{f}) = f(x)$ forma un subespacio bidimensional de $C^2(-\infty, \infty)$, y encontrar una base para este subespacio.

20. Sea $T{:}P_2 \to R^3$ la función definida por la fórmula

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$$

a) Encontrar $T(x^2 + 5x + 6)$.

b) Demostrar que T es una transformación lineal.

c) Demostrar que T es uno a uno.

d) Encontrar

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

e) Trazar la gráfica del polinomio del inciso d).

21. Sean x_1, x_2 y x_3 números reales distintos tales que $x_1 < x_2 < x_3$, y sea $T:P_2 \rightarrow R^3$ la función definida por la fórmula

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que T es una transformación lineal.
b) Demostrar que T es uno a uno.
c) Comprobar que si a_1, a_2 y a_3 números reales cualesquiera, entonces

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + a_3P_3(x)$$

donde

$$P_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \qquad P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \qquad P_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

d) ¿Qué relación existe entre la gráfica de la función

$$a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + a_3P_3(x)$$

y los puntos (x_1, a_1), (x_2, a_2) y (x_3, a_3)?

22. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sean $p(x)$ y $q(x)$ funciones continuas, y sea V el subespacio de $C(-\infty, \infty)$ que consta de todas las funciones que son derivables dos veces. $L:V \rightarrow V$ se define como

$$L(y(x)) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$$

a) Demostrar que L es un operador lineal.
b) Considérese el caso especial en que $p(x) = 0$ y $q(x) = 1$. Demostrar que la función $\phi(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ es el espacio nulo de L para todos los valores reales de c_1 y c_2.

23. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea $D:P_n \rightarrow P_n$ el operador derivación $D(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$. Demostrar que la matriz para D con respecto a la base $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

24. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Puede demostrarse que para cualquier número real c, los vectores

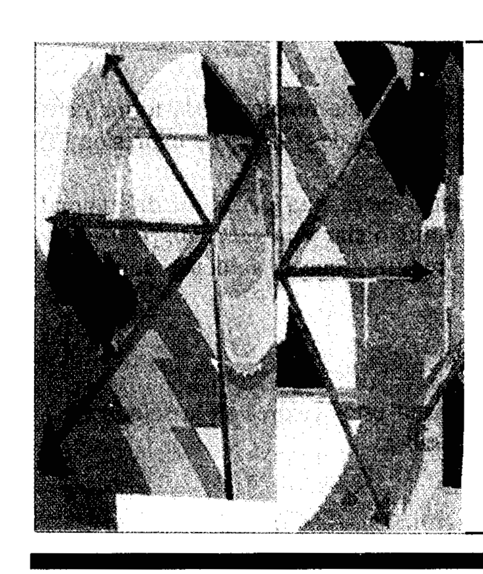
$$1, x-c, \frac{(x-c)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x-c)^n}{n!}$$

forman una base para P_n. Encontrar la matriz para el operador derivación del ejercicio 23 con respecto a esta base.

25. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea $J: P_n \to P_{n+1}$ la transformación integración definida por

$$J(\mathbf{p}) = \int (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)\,dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

donde $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Encontrar la matriz para J con respecto a las bases estándar para P_n y P_{n+1}.



CAPÍTULO **9**

TEMAS COMPLEMENTARIOS

9.1 APLICACIONES A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Muchas leyes de física, química, biología y economía están descritas en términos de ***ecuaciones diferenciales****; es decir, ecuaciones en las que aparecen funciones y sus derivadas. El objetivo de esta sección es ilustrar una forma en que se puede aplicar el álgebra lineal para resolver ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales. El alcance de esta sección es corto, aunque ilustra un área importante de aplicación del álgebra lineal.*

TERMINOLOGÍA Una de las ecuaciones diferenciales más simples es

$$y = ay \tag{1}$$

donde $y = f(x)$ es una función desconocida a determinar, $y' = dy/dx$ es su derivada y a es una constante. Como casi todas las ecuaciones diferenciales, (1) tiene infinidad de soluciones; se trata de las funciones de la forma

$$y = ce^{ax} \tag{2}$$

donde c es una constante cualesquiera. Cada función de esta forma es una solución de $y' = ay$, ya que

$$y' = cae^{ax} = ay$$

Recíprocamente, toda solución de $y' = ay$ debe ser una función de la forma ce^{ax} (ejercicio 7), de modo que (2) describe las soluciones de $y' = ay$. La expresión (2) se denomina ***solución general*** de $y' = ay$.

Algunas veces el problema físico que genera una ecuación diferencial impone alguna condición agregada que permite aislar una ***solución particular*** de la solución general. Por ejemplo, si se requiere que la solución de $y' = ay$ cumpla la condición agregada

$$y(0) = 3 \tag{3}$$

es decir, $y = 3$ cuando $x = 0$, entonces al sustituir estos valores en la solución general de $y = ce^{ax}$ se obtiene un valor para c, a saber,

$$3 = ce^0 = c$$

Así,

$$y = 3e^{ax}$$

es la única solución de $y' = ay$ que satisface la condición agregada. Una condición como (3), que especifica el valor de la solución en un punto, se denomina ***condición inicial***, y el problema de resolver una ecuación diferencial sujeta a una condición inicial se denomina ***problema con valor inicial***.

SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

En esta sección se explica cómo resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{4}$$

donde $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, . . . , $y_n = f_n(x)$ son funciones que serán calculadas y las a_{ij} son constantes. En notación matricial, (4) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

o, más brevemente, como

$$Y' = AY$$

Ejemplo 1

a) Escribir el siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 \\ y_2' &= -2y_2 \\ y_3' &= 5y_3 \end{aligned}$$

b) Resolver el sistema.
c) Obtener una solución del sistema que cumpla las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 4$ y $y_3(0) = -2$.

Solución de a).

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

o bien,

$$Y' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} Y$$

Solución de b). Debido a que en cada ecuación hay sólo una función desconocida, las ecuaciones se pueden resolver individualmente. Por (2) se obtiene

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{3x} \\ y_2 &= c_2e^{-2x} \\ y_3 &= c_3e^{5x} \end{aligned}$$

o bien, en notación matricial,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{3x} \\ c_2e^{-2x} \\ c_3e^{5x} \end{bmatrix}$$

Solución de c). A partir de las condiciones iniciales dadas, se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= y_1(0) = c_1e^0 = c_1 \\ 4 &= y_2(0) = c_2e^0 = c_2 \\ -2 &= y_3(0) = c_3e^0 = c_3 \end{aligned}$$

de modo que la solución que satisface las condiciones iniciales es

$$y_1 = e^{3x}, \qquad y_2 = 4e^{-2x}, \qquad y_3 = -2e^{5x}$$

o bien, en notación matricial,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{bmatrix} \quad \Delta$$

El sistema del ejemplo precedente es fácil de resolver porque para cada ecuación sólo hay una función desconocida, y este hecho se debe a que la matriz de coeficientes (5) para el sistema es diagonal. Sin embargo, ¿cómo manejar un sistema

$$Y' = AY$$

en el que la matriz A no es diagonal? La idea es sencilla: se intenta hacer una sustitución para Y con la que se obtenga un nuevo sistema con una matriz de coeficientes diagonal; se resuelve este nuevo sistema más simple y luego se usa esta solución para determinar la solución del sistema original.

El tipo de sustitución que se tiene en mente es

$$\begin{aligned} y_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \cdots + p_{1n}u_n \\ y_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2 + \cdots + p_{2n}u_n \\ &\vdots \\ y_n &= p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n \end{aligned} \tag{6}$$

o bien, en notación matricial,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

o, más brevemente,

$$Y = PU$$

En esta sustitución, los coeficientes p_{ij} son constantes por determinar de forma que el nuevo sistema con las funciones desconocidas $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tenga una matriz de coeficientes diagonal. Se deja como ejercicio para el lector derivar cada ecuación en (6) y obtener

$$Y' = PU'$$

Si se efectúan las sustituciones $Y = PU$ y $Y' = PU'$ en el sistema original

$$Y' = AY$$

y si se supone que P es invertible, se obtiene

$$PU' = A(PU)$$

o bien,

$$U' = (P^{-1}AP)U$$

o bien,

$$U' = DU$$

donde $D = P^{-1}AP$. La elección de P resulta evidente ahora; si se quiere que la nueva matriz de coeficientes D sea diagonal, P se debe elegir a P como una matriz que diagonalice a A.

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Lo anterior sugiere el siguiente procedimiento para resolver un sistema

$$Y' = AY$$

con una matriz de coeficientes diagonalizable A.

Paso 1. Encontrar una matriz P que diagonalice a A.

Paso 2. Hacer las sustituciones $Y = PU$ y $Y' = PU'$ para obtener un nuevo "sistema diagonal" $U' = DU$, donde $D = P^{-1}AP$.

Paso 3. Resolver $U' = DU$.

Paso 4. Determinar Y a partir de la ecuación $Y = PU$.

Ejemplo 2

a) Resolver el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

b) Encontrar la solución que cumpla las condiciones iniciales

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 6.$$

Solución de a). La matriz de coeficientes para el sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Como se explicó en la sección 7.2, A es diagonalizada por cualquier matriz P cuyas columnas sean eigenvectores de A linealmente independientes. Como

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

los eigenvalores de A son $\lambda = 2, \lambda = -3$. Por definición,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector de A correspondiente a λ si y sólo si $\mathbf{x}$ es una solución no trivial de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es decir, de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $\lambda = 2$, este sistema se convierte en

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema se obtiene

$$x_1 = t, \qquad x_2 = t$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 2$. De manera semejante, el lector puede demostrar que

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = -3$. Así,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza a A y

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la sustitución

$$Y = PU \qquad \text{y} \qquad Y' = PU'$$

produce el nuevo "sistema diagonal"

$$U' = DU = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} U \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} u_1' &= 2u_1 \\ u_2' &= -3u_2 \end{aligned}$$

Por (2), la solución de este sistema es

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 e^{2x} \\ u_2 &= c_2 e^{-3x} \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad U = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

de modo que la ecuación $Y = PU$ produce como solución para Y a

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x} - \tfrac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ y_2 &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned} \tag{7}$$

Solución de b). Si las condiciones iniciales dadas se sustituyen en (7), se obtiene

$$\begin{aligned} c_1 - \tfrac{1}{4} c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 6 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$c_1 = 2, \qquad c_2 = 4$$

de modo que por (7) la solución que satisface las condiciones iniciales es

$$\begin{aligned} y_1 &= 2e^{2x} - e^{-3x} \\ y_2 &= 2e^{2x} + 4e^{-3x} \quad \Delta \end{aligned}$$

En esta sección se ha supuesto que la matriz de coeficientes de $Y' = AY$ es diagonalizable. En caso de no serlo, se deben usar otros métodos para resolver el sistema. Estos métodos se analizan en textos más avanzados.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.1

1. a) Resolver el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

b) Encontrar la solución que satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$.

2. a) Resolver el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

b) Encontrar la solución que satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = 2, y_2'(0) = 1$.

3. a) Resolver el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \\ y_3' &= -2y_1 + y_3 \end{aligned}$$

b) Encontrar la solución que satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = -1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$.

4. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 \end{aligned}$$

5. Resolver la ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = 0$. [***Sugerencia.*** Hacer $y_1 = y, y_2 = y'$ y luego demostrar que

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y'' = y' + 6y = 6y_1 + y_2 \end{aligned}$$]

6. Resolver la ecuación diferencial $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. [***Sugerencia.*** Hacer $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y''$ y luego demostrar que

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= 6y_1 - 11y_2 + 6y_3 \end{aligned}$$]

7. Demostrar: Toda solución de $y' = ay$ es de la forma $y = ce^{ax}$. [***Sugerencia.*** Sea $y = f(x)$ una solución y demostrar que $f(x)e^{-ax}$ es constante.]

8. Demostrar: Si A es diagonalizable y

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

satisface $Y' = AY$, entonces todo y_i es una combinación lineal de $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son eigenvalores de A.

9.2 GEOMETRÍA DE LOS OPERADORES LINEALES SOBRE R^2

En la sección 4.2 se estudiaron algunas propiedades geométricas de los operadores lineales sobre R^2 y R^3. En esta sección se estudiarán con mayor profundidad los operadores lineales sobre R^2. Algunas de las ideas que se presentarán poseen importantes aplicaciones al campo en desarrollo de la elaboración de gráficas por computadora.

Si $T:R^2 \to R^2$ es el operador matricial cuya matriz estándar es

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

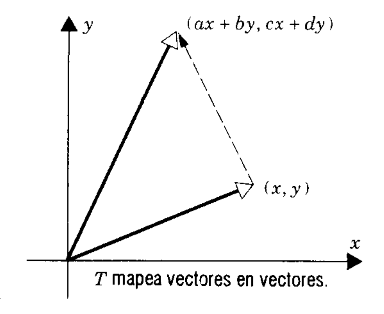
entonces

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \tag{1}$$

Existen dos interpretaciones geométricas igualmente aceptables de esta fórmula. Los elementos de las matrices

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

se pueden considerar como componentes de vectores o como coordenadas de puntos. Con la primera interpretación, T transforma flechas en flechas y con la segunda, puntos en puntos (figura 1). La elección de cualquiera de estas interpretaciones es una cuestión subjetiva.



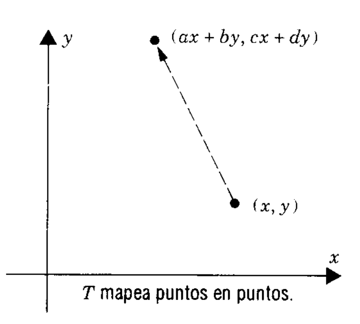


Figura 1

En esta sección, los operadores lineales sobre R^2 se considerarán como transformaciones de puntos en puntos. Una manera de representar el comportamiento de un operador lineal es observar su efecto sobre los puntos de figuras sencillas en el plano. Por ejemplo, en la tabla 1 se muestra el efecto de algunos operadores lineales básicos sobre un cuadrado unitario que se ha coloreado parcialmente.

TABLA 1

Operador	Matriz estándar	Efecto sobre el cuadrado unitario
Reflexión con respecto al eje y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Reflexión con respecto al eje x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	
Reflexión con respecto a la recta $y=x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
Rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj por un ángulo θ	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	

En la sección 4.2 se analizaron reflexiones, proyecciones, rotaciones, contracciones y dilataciones de R^2. A continuación se considerarán otros operadores lineales básicos sobre R^2.

EXPANSIONES Y COMPRESIONES

Si la abscisa de cada punto del plano se multiplica por una constante positiva k, entonces el efecto es expandir o comprimir cada figura del plano en la dirección x. Si $0 < k < 1$, el resultado es una compresión, y si $k > 1$, una expansión (figura 2). Un operador así se denomina ***expansión*** (o ***compresión***) ***en la dirección x con factor k***. De manera semejante, si la ordenada de cada punto del plano se multiplica por una constante positiva k, se obtiene una ***expansión*** (o ***compresión***) ***en la dirección y con factor k***. Se puede demostrar que las expansiones y las compresiones a lo largo de los ejes de coordenadas son transformaciones lineales.

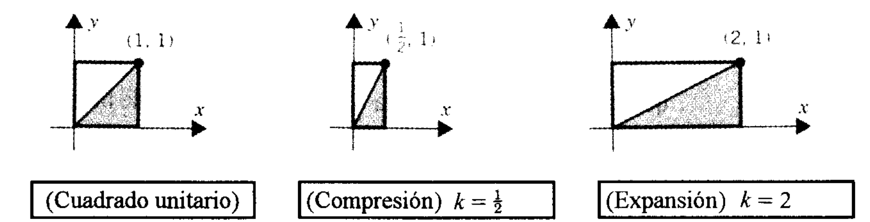


Figura 2 (Cuadrado unitario) (Compresión) $k = \frac{1}{2}$ (Expansión) $k = 2$

Si $T: R^2 \to R^2$ es una expansión o una compresión en la dirección x con factor k, entonces

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que la matriz estándar para T es

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera semejante, la matriz estándar para una expansión o una compresión en la dirección y es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1 Supóngase que el plano xy primero se expande o comprime por un factor k_1 en la dirección x y que luego se expande o comprime por un factor k_2 en la dirección y. Encontrar un solo operador matricial que efectúe ambas operaciones.

Solución. Las matrices estándar para las dos operaciones son

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Expansión x (compresión) Expansión y (compresión)

Así, la matriz estándar para la composición de la operación x seguida de la operación y es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

En el caso especial en que k_1 y k_2 son iguales, por ejemplo $k_1 = k_2 = k$, nótese que (2) se simplifica a

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

que es una dilatación o una contracción (tabla 8 de la sección 4.2). Δ

DESLIZAMIENTOS CORTANTES

Un ***deslizamiento cortante en la dirección x con factor k*** es una transformación que mueve cada punto (x, y) paralelo al eje x en una cantidad ky hasta la nueva posición $(x + ky, y)$. Bajo una transformación de este tipo, los puntos que están sobre el eje x no se mueven porque $y = 0$. Sin embargo, a medida que se avanza alejándose del eje x, la magnitud de y aumenta, de modo que aquellos puntos más alejados del eje x recorren una mayor distancia que los puntos más próximos a él.

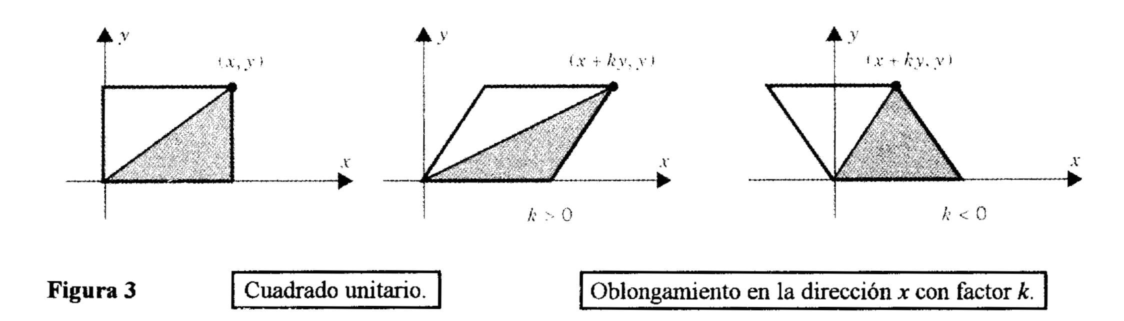


Figura 3 Cuadrado unitario. Oblongamiento en la dirección x con factor k.

Un ***deslizamiento cortante en la dirección y con factor k*** es una transformación que mueve cada punto (x, y) paralelo al eje y en una cantidad kx hasta la nueva posición $(x, y + kx)$. Bajo una transformación de este tipo, los puntos que están sobre el eje y permanecen fijos, y los puntos alejados del eje y recorren una mayor distancia que los puntos próximos a él.

Se puede demostrar que los deslizamientos cortantes son transformaciones lineales. Si $T:R^2 \to R^2$ es un deslizamiento cortante con factor k en la dirección x, entonces

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que la matriz estándar para T es

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera semejante, la matriz estándar para un deslizamiento cortante en la dirección y con factor k es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN. La multiplicación por la matriz identidad 2×2 es el operador identidad sobre R^2. Este operador se puede considerar como una rotación de 0°, como un deslizamiento cortante a lo largo de cualquiera de los dos ejes con $k = 0$, o como una compresión o expansión a lo largo de cualquiera de los dos ejes con factor $k = 1$.

Ejemplo 2

a) Hallar una matriz de transformación de R^2 en R^2 que primero efectúe un deslizamiento cortante en la dirección x con factor 2 y luego realice una reflexión con respecto a $y = x$.
b) Encontrar una matriz de transformación de R^2 en R^2 que primero efectúe una reflexión con respecto a $y = x$ y luego un deslizamiento cortante en la dirección x con factor 2.

Solución de a). La matriz estándar para el deslizamiento cortante es

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y para la reflexión es

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz estándar para el deslizamiento cortante seguido de la reflexión es

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución de b). La reflexión seguida del deslizamiento cortante se representa como

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

En el último ejemplo, nótese que $A_1A_2 \neq A_2A_1$, de modo que el efecto de aplicar primero el deslizamiento cortante y luego la reflexión es diferente al efecto de aplicar primero la reflexión y luego el deslizamiento cortante. Este hecho se ilustra geométricamente en la figura 4, donde se muestra el efecto de las transformaciones sobre un cuadrado unitario.

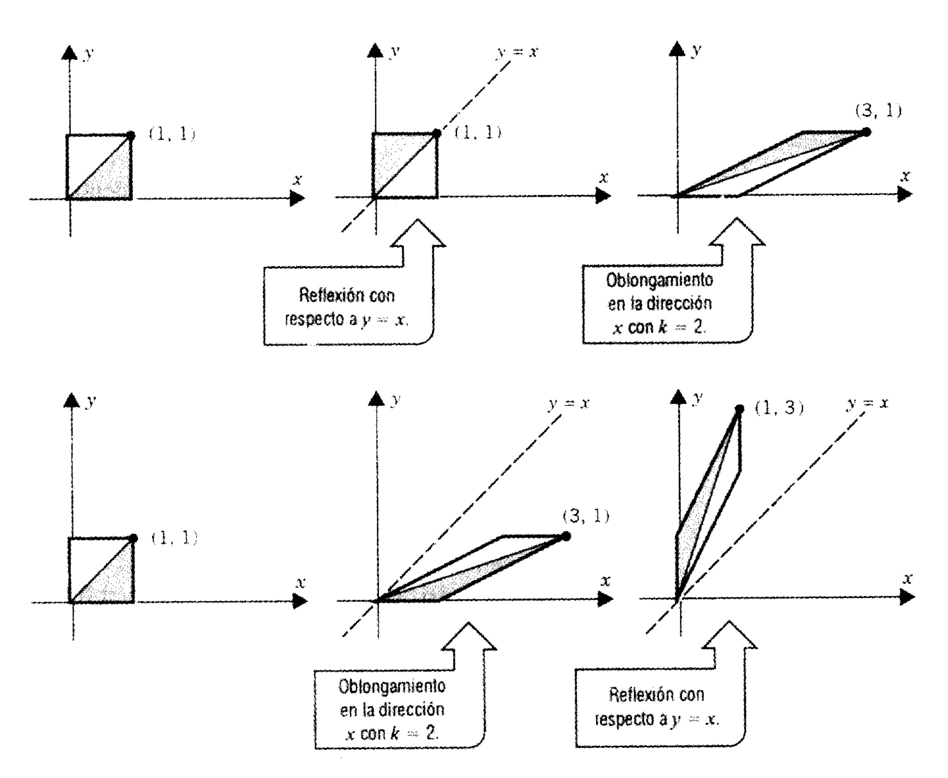


Figura 4

Ejemplo 3 Demostrar que si $T:R^2 \to R^2$ es la multiplicación por una *matriz elemental*, entonces la transformación es una de las siguientes:

a) Un deslizamiento cortante a lo largo de un eje de coordenadas.
b) Una reflexión con respecto a $y = x$.
c) Una compresión a lo largo de un eje de coordenadas.
d) Una expansión a lo largo de un eje de coordenadas.
e) Una reflexión con respecto a un eje de coordenadas.
f) Una compresión o expansión a lo largo de un eje de coordenadas seguida de una reflexión con respecto a un eje de coordenadas.

Solución. Debido a que al realizar una sola operación en los renglones de una matriz identidad 2×2 se obtiene una matriz elemental 2×2, ésta debe tener una de las formas siguientes (comprobar):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Las dos primeras matrices representan deslizamientos cortantes a lo largo de los ejes de coordenadas y la tercera, una reflexión con respecto a $y = x$. Si $k > 0$, las dos últimas matrices representan compresiones o expansiones a lo largo de los ejes de coordenadas, dependiendo de si $0 \leq k \leq 1$ o $k \geq 1$. Si $k < 0$ y si k se expresa en la forma $k = -k_1$, donde $k_1 > 0$, entonces las dos últimas matrices se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Como $k_1 > 0$, el producto en (3) representa una compresión o expansión a lo largo del eje x seguida de una reflexión con respecto al eje y, y (4) representa una compresión o expansión a lo largo del eje y seguida de una reflexión con respecto al eje x. En el caso en que $k = -1$, las transformaciones (3) y (4) simplemente son reflexiones con respecto a los ejes y y x, respectivamente. Δ

Las reflexiones, rotaciones, expansiones, compresiones y deslizamientos cortantes son, todas, operadores lineales uno a uno. Este hecho es evidente geométricamente, ya que todos estos operadores mapean puntos distintos en puntos distintos. Esto también se puede comprobar de manera algebraica al verificar que las matrices estándar de los operadores son invertibles.

Ejemplo 4 Intuitivamente resulta evidente que si el plano xy se comprime por un factor $\frac{1}{2}$ en la dirección y, entonces el plano xy se debe expandir por un factor 2 en la dirección y a fin de que cada punto regrese a su posición original. En efecto, esto es así porque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

representa una compresión en la dirección y con factor $\frac{1}{2}$, y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es una expansión en la dirección y con factor 2. Δ

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LOS OPERADORES LINEALES SOBRE R^2

Esta sección concluye con dos teoremas que permiten conocer más las propiedades geométricas de los operadores lineales sobre R^2.

Teorema 9.2.1. *Si $T: R^2 \to R^2$ es la multiplicación por una matriz A invertible, entonces el efecto geométrico de T es el mismo que el de una sucesión idónea de deslizamientos cortantes, compresiones, expansiones y reflexiones.*

Demostración. Como A es invertible, se puede reducir a la identidad mediante una sucesión finita de operaciones elementales en los renglones. Una operación elemental en los renglones se puede efectuar multiplicando por la izquierda por una matriz elemental. Así, existen matriz elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

Despejando A se obtiene

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I$$

o bien, de manera equivalente,

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{5}$$

Esta ecuación expresa a A como un producto de matrices elementales (ya que por el teorema 1.5.2 la inversa de una matriz elemental también es elemental). El resultado se concluye ahora por el ejemplo 3. □

Ejemplo 5 Suponiendo que k_1 y k_2 son positivos, expresar la matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

como un producto de matrices elementales y describir el efecto geométrico de la multiplicación por A en términos de expansiones y compresiones.

Solución. Por el ejemplo 1 se tiene que

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual demuestra que la multiplicación por A tiene el efecto geométrico de expandir o comprimir por un factor de k_1 en la dirección x y luego expandir o comprimir por un factor de k_2 en la dirección y. Δ

Ejemplo 6 Expresar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

como un producto de matrices elementales y luego describir el efecto geométrico de la multiplicación por A en términos de deslizamientos cortantes, compresiones, expansiones y reflexiones.

Solución. A se puede reducir a I como sigue:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

El primer renglón se suma -3 veces al segundo.	El segundo renglón se multiplica por $-\frac{1}{2}$.	El segundo renglón se suma -2 veces al primero.

Las tres operaciones consecutivas en los renglones se pueden efectuar al multiplicar por la izquierda sucesivamente por

$$E_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Invirtiendo estas matrices y aplicando (5) se obtiene

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Leyendo de derecha a izquierda y observando que

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

se concluye que el efecto de multiplicar por A es equivalente a

1) efectuar un deslizamiento cortante por un factor de 2 en la dirección x, luego
2) expandir por un factor de 2 en la dirección y, luego
3) reflejar con respecto al eje x, y finalmente
4) efectuar un deslizamiento cortante por un factor de 3 en la dirección y.

Las demostraciones de algunos incisos del siguiente teorema se analizan en los ejercicios.

Teorema 9.2.2. *Si $T:R^2 \to R^2$ es la multiplicación por una matriz invertible, entonces:*

a) *La imagen de una recta es una recta.*
b) *La imagen de una recta que pasa por el origen es una recta que pasa por el origen.*
c) *Las imágenes de rectas paralelas son rectas paralelas.*
d) *La imagen del segmento de recta que une los puntos P y Q es el segmento de recta que une las imágenes de los puntos P y Q.*
e) *Las imágenes de tres puntos están sobre una recta si y sólo si los puntos son colineales.*

OBSERVACIÓN. Por los incisos *c*), *d*) y *e*) se concluye que la multiplicación por una matriz invertible A 2×2 transforma triángulos en triángulos y paralelogramos en paralelogramos.

Ejemplo 7 Trazar la imagen del cuadrado con vértices $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(0, 1)$ y $P_4(1, 1)$ bajo la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución. Como

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la imagen del cuadrado es un paralelogramo con vértices $(0, 0)$, $(-1, 2)$, $(2, -1)$ y $(1, 1)$ (figura 5). Δ

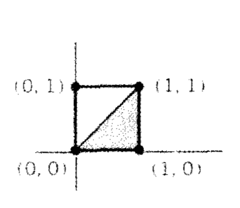


Figura 5

Ejemplo 8 Según el teorema 9.2.2, la matriz invertible

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

transforma la recta $y = 2x + 1$ en otra recta. Encontrar su ecuación.

Solución. Sea (x, y) un punto sobre la recta $y = 2x + 1$ y sea (x', y') su imagen bajo la multiplicación por A. Entonces

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x &= \quad x' - y' \\ y &= -2x' + 3y' \end{aligned}$$

Sustituyendo en $y = 2x + 1$ se obtiene

$$-2x' + 3y' = 2(x' - y') + 1$$

o bien, de manera equivalente,

$$y' = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{1}{5}$$

Así, (x', y') satisface

$$y = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{1}{5}$$

que es la ecuación buscada.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.2

1. Encontrar la matriz estándar para la transformación lineal plana $T:R^2 \to R^2$ que mapea un punto (x, y) en (véase la figura 6)

a) su reflexión con respecto a la recta $y = -x$.
b) su reflexión con respecto al origen.
c) su proyección ortogonal sobre el eje x.
d) su proyección ortogonal sobre el eje y.

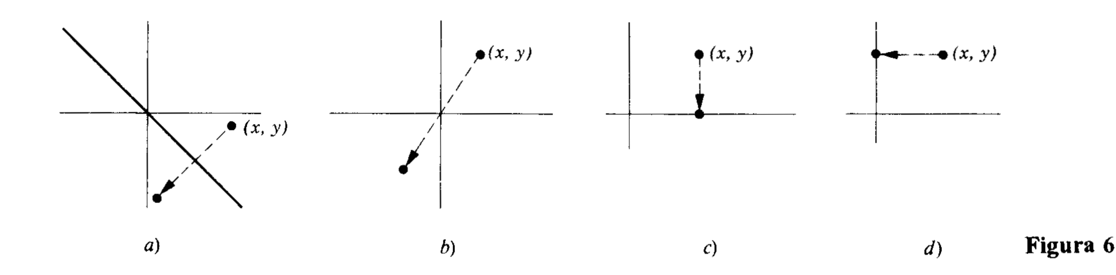


Figura 6

2. En cada inciso del ejercicio 1, usar la matriz obtenida para calcular $T(2, 1)$. Comprobar las respuestas geométricamente graficando los puntos $(2, 1)$ y $T(2, 1)$.

3. Encontrar la matriz estándar para el operador lineal $T:R^3 \to R^3$ que transforma un punto (x, y, z) en su reflexión con respecto al plano

a) xy b) xz. c) yz.

4. En cada inciso del ejercicio 3, usar la matriz obtenida para calcular $T(1, 1, 1)$. Comprobar las respuestas geométricamente graficando los vectores $(1, 1, 1)$ y $T(1, 1, 1)$.

5. Encontrar la matriz estándar para el operador lineal $T: R^3 \to R^3$ que
a) hace girar cada vector 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al eje z (mirando a lo largo del eje z positivo hacia el origen).
b) hace girar cada vector 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al eje x (mirando a lo largo del eje x positivo hacia el origen).
c) hace girar cada vector 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al eje y (mirando a lo largo del eje y positivo hacia el origen).

6. Trazar la imagen del rectángulo con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 2) y (0, 2) bajo
a) una reflexión con respecto al eje x.
b) una reflexión con respecto al eje y.
c) una compresión con factor $k = \frac{1}{4}$ en la dirección y.
d) una expansión con factor $k = 2$ en la dirección x.
e) un deslizamiento cortante con factor $k = 3$ en la dirección x.
f) un deslizamiento cortante con factor $k = 2$ en la dirección y.

7. Trazar la imagen del cuadrado con vértices (0, 0), (1, 0), (0, 1) y (1, 1) bajo la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Encontrar la matriz que hace girar un punto (x, y) con respecto al origen por un ángulo de
a) $45°$ b) $90°$ c) $180°$ d) $270°$ e) $-30°$

9. Encontrar la matriz que produce un deslizamiento cortante con un factor de
a) $k = 4$ en la dirección y. b) $k = -2$ en la dirección x.

10. Encontrar la matriz que comprime o expande con un factor de
a) $\frac{1}{3}$ en la dirección y. b) 6 en la dirección x.

11. En cada inciso, describir el efecto geométrico de la multiplicación por la matriz dada.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. Expresar la matriz como un producto de matrices elementales y luego describir el efecto de la multiplicación por la matriz dada en términos de compresiones, expansiones, reflexiones y deslizamientos cortantes.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

13. En cada inciso, encontrar una sola matriz que efectúe la sucesión de operaciones que se indica:

a) Comprimir por un factor de $\frac{1}{2}$ en la dirección x, luego expandir por un factor de 5 en la dirección y.
b) Expandir por un factor de 5 en la dirección y, luego efectuar un deslizamiento cortante por un factor de 2 en la dirección y.
c) Reflejar con respecto a $y = x$, luego girar por un ángulo de 180°.

14. En cada inciso, encontrar una sola matriz que efectúe la sucesión de operaciones que se indica:
a) Reflejar con respecto al eje y, luego expandir por un factor de 5 en la dirección x y luego reflejar con respecto a $y = x$.
b) Girar 30°, luego efectuar un deslizamiento cortante por un factor de -2 en la dirección y y luego expandir por un factor de 3 en la dirección y.

15. Por inversión de matrices, demostrar lo siguiente:
a) La transformación inversa de una reflexión con respecto a $y = x$ es una reflexión con respecto a $y = x$.
b) La transformación inversa de una compresión a lo largo de uno de los ejes de coordenadas es una expansión a lo largo de ese eje.
c) La transformación inversa de una reflexión con respecto a uno de los ejes de coordenadas es una reflexión con respecto a ese eje.
d) La transformación inversa de un deslizamiento cortante a lo largo de uno de los ejes de coordenadas es un deslizamiento cortante a lo largo de ese eje.

16. Encontrar la ecuación de la imagen de la recta $y = -4x + 3$ bajo la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

17. En los incisos del a) al e), obtener la ecuación de la imagen de la recta $y = 2x$ bajo
a) un deslizamiento cortante con factor 3 en la dirección x.
b) una compresión con factor $\frac{1}{2}$ en la dirección y.
c) una reflexión con respecto a $y = x$.
d) una reflexión con respecto al eje y.
e) una rotación de 60°.

18. Encontrar la matriz para un deslizamiento cortante en la dirección x que transforma el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(3, 0)$ en un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto está en el origen.

19. a) Demostrar que la multiplicación por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

transforma cada punto del plano sobre la recta $y = 2x$.
b) Con base en el inciso a) se concluye que los puntos no colineales $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ se transforman en una recta. ¿Este hecho viola el inciso *e*) del teorema 9.2.2?

20. Demostrar el inciso *a*) del teorema 9.2.2. [***Sugerencia.*** Una recta en el plano tiene una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde tanto A como B no son cero. Con el

método del ejemplo 8, demostrar que la imagen de esta recta bajo la multiplicación por la matriz invertible

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tiene la ecuación $A'x + B'y + C = 0$, donde

$$A' = (dA - cB)/(ad - bc) \qquad \text{y} \qquad B' = (-bA + aB)/(ad - bc)$$

Luego, demostrar que ni A' ni B' son cero a fin de concluir que la imagen es una recta.]

21. Usando la sugerencia del ejercicio 20, demostrar los incisos *b*) y *c*) del teorema 9.2.2.

22. En cada inciso, encontrar la matriz estándar para el operador lineal $T:R^3 \to R^3$ descrito por la figura 7.

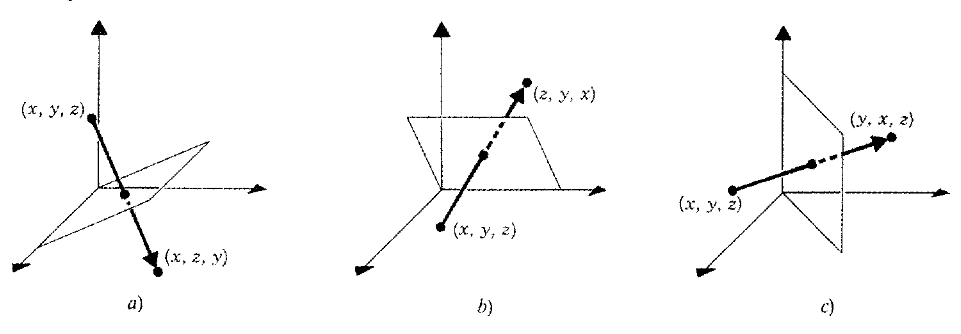


Figura 7

23. En R^3, el ***deslizamiento cortante en la dirección xy con factor k*** es la transformación lineal que mueve cada punto (x, y, z) paralelo al plano xy a la nueva posición $(x + kz, y + kz, z)$. (Véase la figura 8.)

a) Encontrar la matriz estándar del deslizamiento cortante en la dirección xy con factor k.

b) ¿Cómo definiría el lector el deslizamiento cortante en la dirección xz con factor k y el deslizamiento cortante en la dirección yz con factor k? Encontrar la matriz estándar para cada una de estas transformaciones lineales.

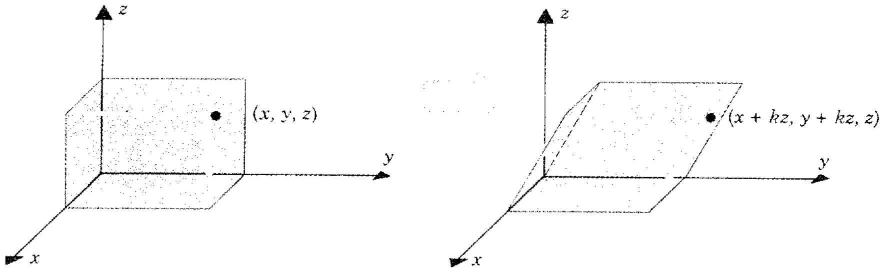


Figura 8

24. En cada inciso, encontrar por inspección todos los eigenvectores linealmente independientes que sea posible (mediante una representación del efecto geométrico de la transformación sobre R^2). Para cada uno de los eigenvectores, encontrar por inspección el eigenvalor correspondiente; luego comprobar los resultados calculando los eigenvalores y bases para los eigenespacios partir de la matriz estándar de la transformación.

a) Reflexión con respecto al eje x.
b) Reflexión con respecto al eje y.
c) Reflexión con respecto a $y = x$.
d) Deslizamiento cortante en la dirección x con factor k.
e) Deslizamiento cortante en la dirección y con factor k.
f) Rotación por un ángulo θ.

9.3 AJUSTE DE DATOS POR MÍNIMOS CUADRADOS

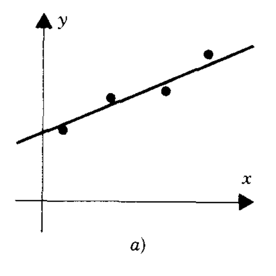
En esta sección se usarán resultados sobre proyecciones ortogonales en espacios vectoriales con producto interior a fin de obtener una técnica para ajustar una recta u otra curva polinómica a un conjunto de puntos en el plano determinados experimentalmente.

AJUSTE DE UNA CURVA A DATOS EXPERIMENTALES

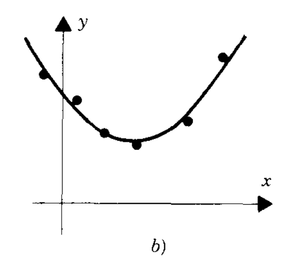
Un problema común en el trabajo experimental es obtener una relación matemática $y = f(x)$ entre dos variables x y y mediante el "ajuste" de una curva a puntos en el plano correspondientes a diversos valores de x y y determinados experimentalmente, por ejemplo

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

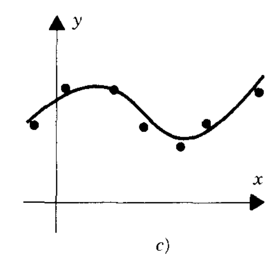
La forma general de la curva $y = f(x)$ que se debe ajustar se decide con base en consideraciones teóricas o simplemente en el patrón descrito por los puntos. Algunas posibilidades son (figura 1)



a)
$y = a + bx$



b)
$y = a + bx + cx^2$



c)
$y = a + bx + cx^2 + dx^3$

Figura 1

a) Una recta: $y = a + bx$.
b) Un polinomio cuadrático: $y = a + bx + cx^2$.
c) Un polinomio cúbico: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$.

Debido a que los puntos se obtienen experimentalmente, suele haber algún "error" de medición en los datos, lo cual imposibilita encontrar una curva de la forma deseada que pase por todos los puntos. Así, la idea es elegir la curva (determi-

nando sus coeficientes) que mejor se "ajuste" a los datos. Se empezará con el caso más simple: ajustar una recta a los puntos de datos.

AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS DE UNA RECTA

Supóngase que se quiere ajustar una recta

$$y = a + bx$$

a los puntos determinados experimentalmente

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

Si los puntos de datos son colineales, la recta debe pasar por todos los n puntos y, así, los coeficientes desconocidos a y b deben satisfacer

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 \\ y_2 &= a + bx_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a + bx_n \end{aligned}$$

Este sistema se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

o, en forma abreviada, como

$$M\mathbf{v} = \mathbf{y} \tag{1}$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{2}$$

Si los puntos de datos no son colineales, entonces es imposible encontrar los coeficientes a y b que satisfagan exactamente el sistema (1); es decir, el sistema es inconsistente. En este caso se buscará una solución por mínimos cuadrados

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

La recta $y = a^* + b^*x$ cuyos coeficientes provienen de una solución por mínimos cuadrados se denomina ***recta de ajuste por mínimos cuadrados*** a los datos. Para

explicar esta terminología, recuérdese que una solución por mínimos cuadrados de (1) minimiza

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\| \tag{3}$$

Si el cuadrado de (3) se expresa en términos de componentes, se obtiene

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\|^2 = (y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \cdots + (y_n - a - bx_n)^2 \tag{4}$$

Si ahora se hace

$$d_1 = |y_1 - a - bx_1|,\ d_2 = |y_2 - a - bx_2|, \ldots,\ d_n = |y_n - a - bx_n|$$

entonces (4) se puede escribir como

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\|^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 \tag{5}$$

Como se ilustra en la figura 2, d_i se puede interpretar como la distancia vertical entre la recta $y = a + bx$ y el punto (x_i, y_i). Esta distancia es una medida del "error" en el punto (x_i, y_i), que resulta del ajuste inexacto de $y = a + bx$ a datos. Como (3) y (5) son minimizadas por el mismo vector $\mathbf{v}^*$, la recta de ajuste por mínimos cuadrados minimiza la suma de los cuadrados de estos errores; de ahí la denominación *recta de ajuste por mínimos cuadrados.*

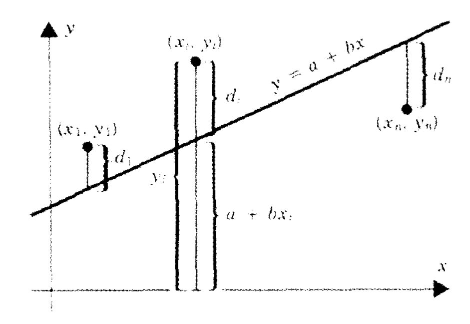


Figura 2 d_i mide el error vertical en el ajuste de la recta por mínimos cuadrados.

ECUACIONES NORMALES

Recuérdese por el teorema 6.4.2 que las soluciones por mínimos cuadrados de (1) se pueden obtener al resolver el sistema normal asociado

$$M^TM\mathbf{v} = M^T\mathbf{y}$$

cuyas ecuaciones se denominan **ecuaciones normales**.

En los ejercicios se demostrará que los vectores columna de M son linealmente independientes si y sólo si los n puntos de datos no están en una recta vertical en el plano xy. En este caso, por el teorema 6.4.4 se concluye que la solución por mínimos cuadrados es única y está dada por

$$\mathbf{v}^* = (M^TM)^{-1}M^T\mathbf{y}$$

En resumen, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 9.3.1. *Sean* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ *puntos de un conjunto de dos o más datos, no todos en una recta vertical, y sean*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Entonces existe una recta de ajuste por mínimos cuadrados única

$$y = a^* + b^*x$$

al conjunto de datos. Además,

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

está definida por la fórmula

$$\boxed{\mathbf{v}^* = (M^TM)^{-1}M^T\mathbf{y}} \tag{6}$$

que expresa el hecho de que $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ *es la única solución de las ecuaciones normales*

$$\boxed{M^TM\mathbf{v} = M^T\mathbf{y}} \tag{7}$$

Ejemplo 1 Encontrar la recta de ajuste por mínimos cuadrados a los cuatro puntos (0, 1), (1, 3), (2, 4) y (3, 4). (Véase la figura 3.)

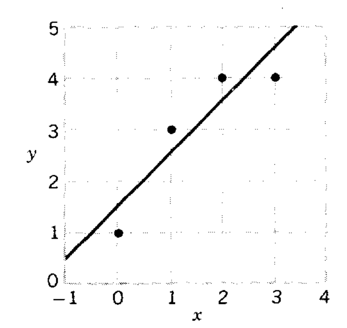


Figura 3

Solución. Se tiene

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M^T M = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(M^T M)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^* = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{y} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De modo que la recta buscada es $y = 1.5 + x$. Δ

Ejemplo 2 La ley de Hooke en física establece que la longitud x de un resorte uniforme es una función lineal de la fuerza y que se le aplica al resorte. Si se escribe $y = a + bx$, entonces el coeficiente b se denomina constante del resorte. Supóngase que un resorte particular sin estirar mide 6.1 pulgadas de longitud (es decir, $x = 6.1$ cuando $y = 0$). Luego, al resorte se aplican fuerzas de 2, 4 y 6 libras, encontrándose que las longitudes correspondientes son 7.6, 8.7 y 10.4 pulgadas, respectivamente, (ver la figura 4). Encontrar la constante de este resorte.

x_i	6.1	7.6	8.7	10.4
y_i	0	2	4	6

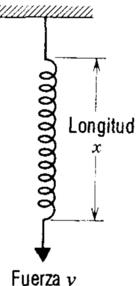


Figura 4

Solución. Se tiene

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6.1 \\ 1 & 7.6 \\ 1 & 8.7 \\ 1 & 10.4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = (M^TM)^{-1}M^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} -8.6 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

donde los valores numéricos se redondearon hasta una cifra decimal. Así, el valor estimado de la constante del resorte es $b^* \approx 1.4$ lb/pulg. Δ

AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS DE UN POLINOMIO

La técnica descrita para ajustar una recta a puntos de datos se generaliza fácilmente al ajuste de un polinomio de cualquier grado específico a puntos de datos. A continuación se intentará ajustar un polinomio de grado fijo m

$$y = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \tag{8}$$

a n puntos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

Al sustituir los n valores de x y y en (8) se obtienen las n ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_1^m \\ y_2 &= a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_mx_2^m \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1x_n + \cdots + a_mx_n^m \end{aligned}$$

o bien, en forma matricial,

$$M\mathbf{v} = \mathbf{y} \tag{9}$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Como antes, las soluciones de las ecuaciones normales

$$M^TM\mathbf{v} = M^T\mathbf{y}$$

determinan los coeficientes de los polinomios que minimizan

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\|$$

En los ejercicios se analizan condiciones que garantizan la invertibilidad de M^TM. Si M^TM es invertible, entonces las ecuaciones normales tienen una solución única $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ definida por

$$\mathbf{v}^* = (M^TM)^{-1}M^T\mathbf{y}$$

Ejemplo 3 Según la segunda ley del movimiento de Newton, un cuerpo próximo a la superficie terrestre cae verticalmente según la ecuación

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{10}$$

donde

s = Desplazamiento vertical hacia abajo con respecto a algún punto fijo.
s_0 = Desplazamiento inicial en el instante $t = 0$.
v_0 = Velocidad inicial en el instante $t = 0$.
g = Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

Supóngase que se efectúa un experimento de laboratorio para evaluar g usando la ecuación anterior. Se suelta un peso con desplazamiento y velocidad iniciales desconocidos, y en ciertos instantes se mide la distancia recorrida a partir de algún punto de referencia fijo. En particular, supóngase que en los instantes $t = 0.1$, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5 segundos se encuentra que el peso ha recorrido $s = -0.18$, 0.31, 1.03, 2.48 y 3.73 pies, respectivamente, a partir del punto de referencia. Encontrar un valor aproximado de g usando estos datos.

Solución. El problema matemático es ajustar una curva cuadrática

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \tag{11}$$

a los cinco puntos experimentales:

$$(0.1, -0.18), (0.2, 0.31), (0.3, 1.03), (0.4, 2.48), (0.5, 3.73)$$

Los cálculos necesarios son

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .1 & .01 \\ 1 & .2 & .04 \\ 1 & .3 & .09 \\ 1 & .4 & .16 \\ 1 & .5 & .25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18 \\ 0.31 \\ 1.03 \\ 2.48 \\ 3.73 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ a_2^* \end{bmatrix} = (M^TM)^{-1}M^T\mathbf{y} \simeq \begin{bmatrix} -0.40 \\ 0.35 \\ 16.1 \end{bmatrix}$$

Por (10) y (11) se tiene $a_2 = \frac{1}{2}g$, de modo que el valor estimado de g es

$$g = 2a_2^* = 2(16.1) = 32.2 \text{ pies/s}^2$$

Si se desea, también es posible estimar el desplazamiento y la velocidad iniciales del peso:

$$s_0 = a_0^* = -0.40 \text{ pies}$$
$$v_0 = a_1^* = \quad 0.35 \text{ pies/s}$$

En la figura 5 se muestra la gráfica los cinco puntos experimentales, así como el polinomio de aproximación.

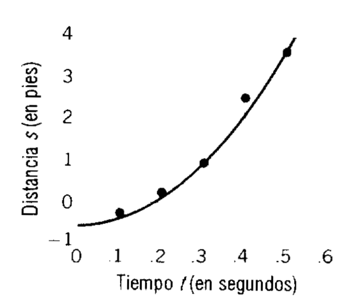


Figura 5

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.3

1. Encontrar la recta de ajuste por mínimos cuadrados a los tres puntos (0, 0), (1, 2) y (2, 7).

2. Encontrar la recta de ajuste por mínimos cuadrados a los cuatro puntos (0, 2), (2, 0), (3, 1) y (3, 2).

3. Encontrar el polinomio cuadrático que se ajusta mejor a los puntos (2, 0), (3, −1 10), (5, −48) y (6, −76).

4. Encontrar el polinomio cúbico que se ajusta mejor a los puntos (−1, −14), (0, −5), (1, −4), (2, 1) y (3, 22).

5. Demostrar que la matriz M en la ecuación (2) tiene columnas linealmente independientes si y sólo si por lo menos dos de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son distintos.

6. Demostrar que las columnas de la matriz $Mn \times (m + 1)$ en la ecuación (9) son linealmente independientes si $n > m$ y por lo menos $m + 1$ de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son distintos.

7. Sea M la matriz de la ecuación (9). Usando el ejercicio 6, demostrar que una condición suficiente para que la matriz M^TM sea invertible es que $n > m$ y por lo menos $m + 1$ de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sean distintos.

8. El propietario de una empresa en rápido crecimiento encuentra que para los cinco primeros meses del año las ventas (en miles) son \$4.0, \$4.4, \$5.2, \$6.4 y \$8.0. El propietario grafica estas cifras y conjetura que para el resto del año la curva de ventas puede ser aproximada por un polinomio cuadrático. Encontrar el polinomio cuadrático de ajuste por mínimos cuadrados a la curva de ventas y usarlo para proyectar las ventas de los doce meses del año.

9.4 PROBLEMAS DE APROXIMACIÓN: SERIES DE FOURIER

En esta sección se usarán los resultados de proyecciones ortogonales en espacios con producto interior para resolver problemas que requieren la aproximación de una función dada por funciones más simples. Estos problemas surgen en una variedad de aplicaciones de ingeniería y ciencias.

MEJORES APROXIMACIONES

Todos los problemas que se estudiarán en esta sección son casos especiales del siguiente problema general.

> ***Problema de aproximación.*** Dada una función f que es continua sobre un intervalo $[a, b]$, encontrar la "mejor aproximación posible" a f usando sólo funciones de un subespacio específico W de $C[a, b]$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de esos problemas:

a) Encontrar la mejor aproximación posible a e^x sobre $[0, 1]$ por un polinomio de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$.

b) Encontrar la mejor aproximación posible a sen πx sobre $[-1, 1]$ por una función de la forma $a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + a_3 e^{3x}$.

c) Encontrar la mejor aproximación posible a x sobre $[0, 2\pi]$ por una función de la forma $a_0 + a_1$ sen $x + a_2$ sen $2x + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x$.

En el primer ejemplo, W es el subespacio de $C[0, 1]$ generado por 1, x y x^2; en el segundo ejemplo, W es el subespacio de $C[-1, 1]$ generado por 1, e^x, e^{2x} y e^{3x}; y en el tercer ejemplo, W es el subespacio de $C[0, 2\pi]$ generado por 1, sen x, sen $2x$, $\cos x$ y $\cos 2x$

MEDICIONES DEL ERROR

Para resolver problemas de aproximación de los tipos precedentes es necesario precisar matemáticamente la expresión "mejor aproximación sobre $[a, b]$"; para este efecto se requiere una manera exacta de medir el error que resulta cuando una función continua es aproximada por otra sobre $[a, b]$. Si sólo se quisiera la aproximación de $f(x)$ en un simple punto x_0, entonces el error en x_0 por una aproximación $g(x)$ sería simplemente

$$\text{error} = f(x_0) - g(x_0)$$

que algunas veces se denomina ***desviación*** entre f y g en x_0 (figura 1). Sin embargo, se quiere la aproximación sobre todo el intervalo $[a, b]$, no en un solo punto. En consecuencia, en una parte del intervalo una aproximación g_1 a f puede tener desviaciones más pequeñas con respecto a f que una aproximación g_2 a f, y en otra parte del intervalo bien puede ser al contrario. ¿Cómo decidir cuál es la mejor aproximación global? Lo que se requiere es alguna forma para medir el error global en una aproximación $g(x)$. Una posible medida del error global se obtiene integrando la desviación $f(x_0) - g(x_0)$ sobre todo el intervalo $[a, b]$; es decir,

$$\text{error} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \tag{1}$$

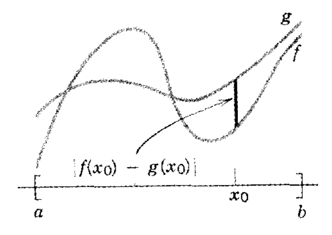


Figura 1 Desviación entre f y g en x_0.

Geométricamente, (1) es al área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$ (figura 2); mientras mayor sea el área, mayor es el error global.

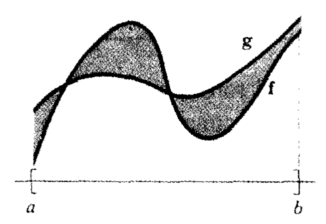


Figura 2 El área entre las gráficas de f y g sobre $[a, b]$ mide el error al aproximar f por g sobre $[a, b]$.

Si bien la expresión (1) es natural y geométricamente atractiva, casi todos los matemáticos y científicos suelen inclinarse por la otra medida del error, denominada ***error cuadrático medio***.

$$\text{error cuadrático medio} = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$$

El error cuadrático medio recalca el efecto de errores mayores debido a la elevación al cuadrado y posee la ventaja adicional de permitir aplicar la teoría de los espacios con producto interior. A fin de ver cómo es posible llevar a cabo lo anterior, supóngase que $\mathbf{f}$ es una función continua sobre $[a, b]$ que se desea aproximar por una función $\mathbf{g}$ de un subespacio W de $C[a, b]$, y supóngase que en $C[a, b]$ se define el producto interior

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

Se concluye que

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}, \mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx = \text{error cuadrático medio}$$

de modo que minimizar el error cuadrático medio es lo mismo que minimizar $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$. Así, el problema de aproximación planteado informalmente al inicio de esta sección se puede volver a plantear más precisamente como sigue:

APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

Problema de aproximación por mínimos cuadrados. Sea $\mathbf{f}$ una función que es continua sobre un intervalo $[a, b]$, sea $C[a, b]$ con el producto interior

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

y sea W un subespacio de dimensión finita de $C[a, b]$. Encontrar una función **g** en W que minimice

$$\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|^2 = \int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx$$

Como $\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|^2$ y $\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|$ son minimizados por la misma función **g**, el problema precedente equivale a buscar una función **g** en W que sea la más próxima a **f**. Pero por el teorema 6.4.1 se sabe que $\mathbf{g} = \text{proy}_W\,\mathbf{f}$ es la función (figura 3).

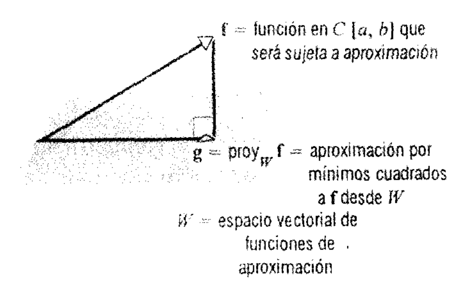


Figura 3

Así, se tiene el siguiente resultado.

Solución del problema de aproximación por mínimos cuadrados. Si **f** es una función continua sobre $[a, b]$ y W es un subespacio de dimensión finita de $C[a, b]$, entonces la función **g** en W que minimiza el error cuadrático medio

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx$$

es $\mathbf{g} = \text{proy}_W\,\mathbf{f}$, donde la proyección ortogonal es con respecto al producto interior

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

La función $\mathbf{g} = \text{proy}_W\,\mathbf{f}$ se denomina ***aproximación por mínimos cuadrados*** a **f** desde W.

SERIES DE FOURIER

Una función de la forma

$$\begin{aligned} t(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx \\ + d_1 \operatorname{sen} x + d_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + d_n \operatorname{sen} nx \end{aligned} \tag{2}$$

se denomina ***polinomio trigonométrico***; si c_n y d_n no son cero, entonces se dice que $t(x)$ es de ***orden n***. Por ejemplo,

$$t(x) = 2 + \cos x - 3\cos 2x + 7 \operatorname{sen} 4x$$

es un polinomio trigonométrico con

$$c_0 = 2, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -3, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 7$$

El orden de $t(x)$ es 4.

Por (2) resulta evidente que los polinomios trigonométricos de orden menor o igual que n son las diversas combinaciones lineales posibles de

$$1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \quad \ldots, \quad \cos nx, \quad \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen} 2x, \quad \ldots, \quad \operatorname{sen} nx \tag{3}$$

Se puede demostrar que estas $2n + 1$ funciones son linealmente independientes y que en consecuencia para cualquier intervalo $[a, b]$ forman una base para un subespacio de dimensión $(2n + 1)$ de $C[a, b]$.

A continuación se considerará el problema de encontrar la aproximación por mínimos cuadrados de una función continua $f(x)$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ por un polinomio trigonométrico de orden menor o igual que n. Como ya se mencionó, la aproximación por mínimos cuadrados a $\mathbf{f}$ desde W es la proyección ortogonal de $\mathbf{f}$ sobre W. Para encontrar esta proyección ortogonal es necesario determinar una base ortonormal $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{2n}$ para W, después de lo cual es posible calcular la proyección ortogonal sobre W a partir de la fórmula

$$\operatorname{proy}_W \mathbf{f} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle \mathbf{g}_0 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle \mathbf{g}_1 + \cdots + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle \mathbf{g}_{2n} \tag{4}$$

[véase el teorema 6.3.5]. Es posible obtener una base ortonormal para W mediante la aplicación del proceso de Gram-Schmidt a la base (3), usando el producto interior

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

Así se obtiene (ejercicio 6) la base ortonormal

$$\mathbf{g}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbf{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \ldots, \quad \mathbf{g}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx,$$
$$\mathbf{g}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \quad \ldots, \quad \mathbf{g}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx \tag{5}$$

Si se introduce la notación

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle$$
$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1} \rangle, \quad \ldots, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle$$

entonces al sustituir (5) en (4) se obtiene

$$\text{proj}_W \mathbf{f} = \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx] + [b_1 \operatorname{sen} x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx]$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

En resumen,

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx} \tag{6}$$

Los números $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ se denominan ***coeficientes de Fourier**** ***de*** **f**.

Ejemplo 1 Encontrar la aproximación por mínimos cuadrados de $f(x) = x$ sobre $[0, 2\pi]$ por

a) un polinomio trigonométrico de orden menor o igual que 2;
b) un polinomio trigonométrico de orden menor o igual que n.

****Jean Baptiste Joseph Fourier*** **(1768-1830)** fue un matemático y físico francés que descubrió las series que llevan su nombre e ideas relacionadas cuando trabajaba en problemas de difusión del calor. Este descubrimiento es uno de los más importantes en la historia de las matemáticas; es la piedra angular de muchos campos de investigación matemática y una herramienta básica en muchas ramas de la ingeniería. Fourier, un activista político durante la revolución francesa, fue encarcelado por haber defendido a muchas víctimas durante la Epoca del Terror. Después se convirtió en favorito de Napoleón, quien lo nombró barón y conde.

Solución de a).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi \tag{7a}$$

Para $k = 1, 2, \ldots$ al integrar por partes se obtiene (comprobar)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx = 0 \tag{7b}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = -\frac{2}{k} \tag{7c}$$

Así, la aproximación por mínimos cuadrados a x en $[0, 2\pi]$ por un polinomio trigonométrico de orden menor o igual que 2 es

$$x \simeq \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + b_1\,\mathrm{sen}\,x + b_2\,\mathrm{sen}\,2x$$

o bien, por (7a), (7b) y (7c),

$$x \simeq \pi - 2\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,2x$$

Solución de b). La aproximación por mínimos cuadrados a x en $[0, 2\pi]$ por un polinomio trigonométrico de orden menor o igual que n es

$$x \simeq \frac{a_0}{2} + [a_1\cos x + \cdots + a_n\cos nx] + [b_1\sin x + \cdots + b_n\,\mathrm{sen}\,nx]$$

o bien, por (7a), (7b) y (7c),

$$x \simeq \pi - 2\left(\mathrm{sen}\,x + \frac{\mathrm{sen}\,2x}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,3x}{3} + \cdots + \frac{\mathrm{sen}\,nx}{n}\right)$$

En la figura 4 se muestran las gráficas de $y = x$ y de algunas de estas aproximaciones.

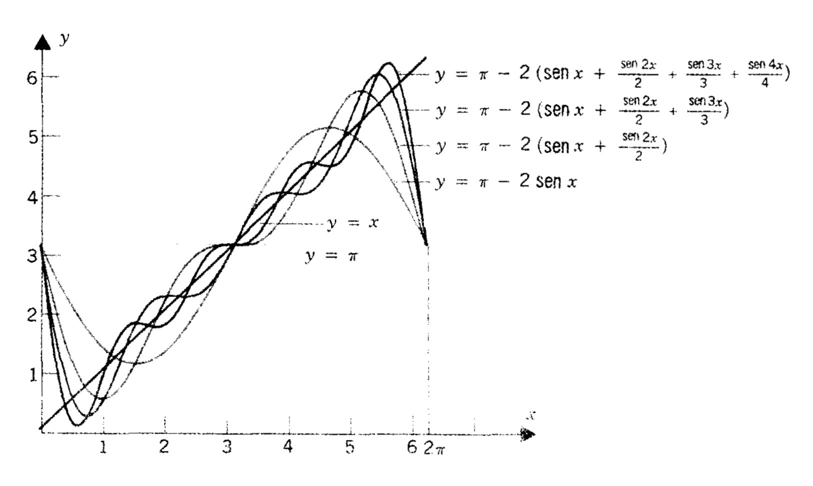


Figura 4

Es natural esperar que disminuya el error cuadrático medio a medida que aumenta el número de términos en la aproximación por mínimos cuadrados

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

Es posible demostrar que para funciones f en $C[0, \pi]$ el error cuadrático medio tiende a cero cuando $n \to +\infty$; este hecho se denota con

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

El miembro derecho de esta ecuación se denomina ***serie de Fourier*** para f sobre el intervalo $C[0, \pi]$. Estas series son importantes en ingeniería, ciencias y matemáticas. Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.4

1. Encontrar la aproximación por mínimos cuadrados de $f(x) = 1 + x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ por
   a) un polinomio trigonométrico de orden menor o igual que 2.
   b) un polinomio trigonométrico de orden menor o igual que n.

2. Encontrar la aproximación por mínimos cuadrados de $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ por
   a) un polinomio trigonométrico de orden menor o igual que 3.
   b) un polinomio trigonométrico de orden menor o igual que n.

3. a) Encontrar la aproximación por mínimos cuadrados de x sobre el intervalo $[0, 1]$ por una función de la forma $a + be^x$.
   b) Encontrar el error cuadrático medio de la aproximación.

4. a) Encontrar la aproximación por mínimos cuadrados de e^x sobre el intervalo $[0, 1]$ por un polinomio de la forma $a_0 + a_1x$.
   b) Encontrar el error cuadrático medio de la aproximación.

5. a) Encontrar la aproximación por mínimos cuadrados de sen πx sobre el intervalo $[-1, 1]$ por un polinomio de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$.
   b) Encontrar el error cuadrático medio de la aproximación.

6. Mediante el proceso de Gram-Schmidt, obtener la base ortonormal(5) a partir de la base (3).

7. Efectuar las integraciones en (7a), (7b) y (7c).

8. Encontrar la serie de Fourier de $f(x) = \pi - x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

9.5 FORMAS CUADRÁTICAS

Hasta el momento en este texto se ha hecho énfasis en las ecuaciones lineales; es decir, ecuaciones de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

El miembro izquierdo de esta ecuación,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

*es una función de n variables, denominada **forma lineal**. En una forma lineal las variables están elevadas a la primera potencia y en la expresión no hay productos de variables. En esta sección se estudiarán funciones en las que los términos son cuadrados de variables o productos de dos variables. Estas funciones aparecen en una gama de aplicaciones, incluyendo geometría, vibraciones de sistemas mecánicos, estadística e ingeniería eléctrica.*

FORMAS CUADRÁTICAS CON DOS VARIABLES

Una ***forma cuadrática con dos variables***, x y y, se define como una expresión que se puede escribir como

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{1}$$

Ejemplo 1 Las siguientes expresiones son formas cuadráticas en x y y.

$$\begin{array}{cc} 2x^2 + 6xy - 7y^2 & (a = 2,\ b = 3,\ c = -7) \\ 4x^2 - 5y^2 & (a = 4,\ b = 0,\ c = -5) \\ xy & (a = 0,\ b = \frac{1}{2},\ c = 0) \end{array}$$ Δ

Si se acuerda suprimir los corchetes en las matrices de 1×1, entonces (1) se puede escribir en forma matricial como

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2}$$

(Comprobar multiplicando las matrices.) Nótese que la matriz 2×2 en (2) es simétrica, que los elementos en la diagonal son los coeficientes de los términos al cuadrado y que cada uno de los elementos fuera de la diagonal principal es la mitad de coeficiente del término del producto xy.

Ejemplo 2

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$4x^2 - 5y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$xy = [x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Delta$$

FORMAS CUADRÁTICAS CON *n* VARIABLES

Las formas cuadráticas no se limitan a dos variables. A continuación se define una forma cuadrática general.

> **Definición.** Una ***forma cuadrática*** con las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión que se puede escribir como
>
> $$[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$
>
> donde A es una matriz simétrica de $n \times n$.

Si se hace

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

entonces (3) se puede escribir de manera más abreviada como

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \tag{4}$$

Además, es posible demostrar que si las matrices en (4) se multiplican, la expresión resultante es de la forma

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_ix_j$$

donde

$$\sum_{i \neq j} a_{ij}x_ix_j$$

denota la suma de los términos de la forma $a_{ij}x_ix_j$, donde x_i y x_j son variables diferentes. Los términos $a_{ij}x_ix_j$ denotan ***términos de producto cruzado*** de la forma cuadrática.

Las matrices simétricas son útiles, aunque no esenciales, para representar formas cuadráticas en notación matricial. Así, para la forma cuadrática $2x^2 + 6xy - 7y^2$ del ejemplo 2, el coeficiente del término de producto cruzado se podría separar en 5 + 1 o 4 + 2 y escribir

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

o

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sin embargo, las matrices simétricas producen en general los resultados más simples, de modo que siempre se usarán. Así, cuando una forma cuadrática se denote por $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ se entenderá que A es simétrica, aun cuando no se especifique.

OBSERVACIÓN. Si se usa el hecho de que A es simétrica; es decir, $A = A^T$, entonces (4) se puede expresar en términos del producto interior euclidiano mediante

$$\boxed{\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(A\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle} \qquad (5)$$

Ejemplo 3 La siguiente expresión es una forma cuadrática en x_1, x_2 y x_3:

$$x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Nótese que los coeficientes de los términos al cuadrado aparecen sobre la diagonal principal de la matriz 3 × 3, y que cada uno de los coeficientes de los términos de producto cruzado están separados a la mitad y aparecen en las posiciones fuera de la diagonal como sigue:

Coeficiente de A	Posiciones en la matriz A
x_1x_2	a_{12} y a_{21}
x_1x_3	a_{13} y a_{31}
x_2x_3	a_{23} y a_{32}

PROBLEMAS EN QUE APARECEN FORMAS CUADRÁTICAS

El estudio de formas cuadráticas es un tema extenso que sólo se puede mencionar en esta sección. A continuación se presentan algunos problemas matemáticos importantes relacionados con las formas cuadráticas.

- Encontrar los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ si $\mathbf{x}$ está restringido de modo que

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = 1$$

- ¿Qué condiciones debe satisfacer A para que una forma cuadrática cumpla la desigualdad $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?
- Si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ es una forma cuadrática con dos o tres variables y c es una constante, ¿qué perfil tiene la gráfica de la ecuación $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = c$?
- Si P es una matriz ortogonal, el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ convierte la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ en $(P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(P^T AP)\mathbf{y}$. Pero $P^T AP$ es una matriz simétrica si A lo es, de modo que $\mathbf{y}^T(P^T AP)\mathbf{y}$ es una nueva forma cuadrática con las variables de $\mathbf{y}$. Es importante saber si P se puede elegir de modo que esta nueva forma cuadrática no contenga términos de producto cruzado.

En esta sección se estudiarán los dos primeros problemas, y en las secciones siguientes se estudiarán los dos últimos. El siguiente teorema proporciona una solución al primer problema. La demostración se pospone hasta el final de la sección.

Teorema 9.5.1. *Sea A una matriz simétrica $n \times n$ cuyos eigenvalores en orden decreciente son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Si $\mathbf{x}$ se restringe de modo que $\|\mathbf{x}\| = 1$ con respecto al producto interior euclidiano sobre R^n, entonces:*

a) $\lambda_1 \geq \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq \lambda_n$.

b) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda_n$ *si* $\mathbf{x}$ *es un eigenvector de A correspondiente* a λ_n *y* $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda_1$ *si* $\mathbf{x}$ *es un eigenvector de A correspondiente a* λ_1.

Por este teorema se concluye que sujeta a la restricción

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = 1$$

la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tiene un valor máximo de λ_1 (el eigenvalor más grande) y un valor mínimo de λ_n (el eigenvalor más pequeño).

Ejemplo 4 Encontrar los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

sujeta a la restricción $x_1^2 + x_2^2 = 1$, y determinar los valores de x_1 y x_2 en que ocurren el máximo y el mínimo.

Solución. La forma cuadrática se puede escribir como

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de A es

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Así, los eigenvalores de A son $\lambda = 3$ y $\lambda = -1$, que son los valores máximo y mínimo, respectivamente, de la forma cuadrática sujeta a la restricción. Para encontrar los valores de x_1 y x_2 en que ocurren estos valores extremos es necesario encontrar los eigenvectores correspondientes a estos eigenvalores y luego normalizarlos para satisfacer la condición $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Se deja al lector demostrar que dos bases para los eigenespacios son

$$\lambda = 3: \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = -1: \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normalizando cada uno de estos eigenvectores se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Así, sujeto a la restricción $x_1^2 + x_2^2 = 1$, el valor máximo de la forma cuadrática es $\lambda = 3$, que ocurre si $x_1 = 1/\sqrt{2}, x_2 = 1/\sqrt{2}$; y el valor mínimo es $= -1$, que ocurre si $x_1 = 1/\sqrt{2}, x_2 = -1/\sqrt{2}$. Además, se puede obtener otras bases para los eigenespacios al multiplicar por -1 los vectores básicos anteriores. Así, el valor máximo, $\lambda = 3$, también ocurre si $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = -1/\sqrt{2}$ y el valor mínimo, $\lambda = -1$, también ocurre si $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$. Δ

MATRICES POSITIVAS DEFINIDAS Y FORMAS CUADRÁTICAS

Definición. Una forma cuadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ se denomina ***positiva definida*** si $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y una matriz simétrica A se denomina ***matriz positiva definida*** si $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ es una forma cuadrática positiva definida.

El siguiente teorema es el resultado principal sobre matrices positivas definidas.

Teorema 9.5.2. *Una matriz simétrica A es positiva definida si y sólo si los eigenvalores de A son positivos.*

Demostración. Supóngase que A es positiva definida y sea λ cualquier eigenvalor de A. Si $\mathbf{x}$ es un eigenvector de A correspondiente a λ, entonces $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, de modo que

$$0 < \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda \|\mathbf{x}\|^2 \tag{6}$$

donde $\|\mathbf{x}\|$ es la norma euclidiana de $\mathbf{x}$. Como $\|\mathbf{x}\|^2 > 0$, se deduce que $\lambda > 0$, qué es lo que se quería demostrar.

Recíprocamente, supóngase que los eigenvalores de A son positivos. Se debe demostrar que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Pero si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, es posible normalizar $\mathbf{x}$ para obtener el vector $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ con la propiedad de que $\|\mathbf{y}\| = 1$. Ahora, por el teorema 9.5.1 se concluye que

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{y} \geq \lambda_n > 0$$

donde λ_n es el menor eigenvalor de A. Así,

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{y} = \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)^T A\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$$

Multiplicando por $\|\mathbf{x}\|^2$ se obtiene

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$$

que es lo que se quería demostrar. □

Ejemplo 5 En el ejemplo 1 de la sección 7.3 se demostró que la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores $\lambda = 2$ y $\lambda = 8$. Como éstos son positivos, la matriz A es positiva definida y para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se tiene que

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 > 0 \quad \Delta$$

El siguiente objetivo es proporcionar un criterio que se pueda usar para determinar si una matriz simétrica es positiva definida sin necesidad de encontrar sus eigenvalores. Para esto será de utilidad introducir algo de terminología. Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es una matriz cuadrada, entonces las ***submatrices principales*** de A son las submatrices formadas a partir de los r primeros renglones y de las r primeras columnas de A para $r = 1, 2, \ldots, n$. Estas submatrices son

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$A_n = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema 9.5.3. *Una matriz simétrica A es positiva definida si y sólo si el determinante de toda submatriz principal es positivo.*

Se omite la demostración.

Ejemplo 6 La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

es positiva definida, ya que

$$|2| = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

todos son positivos. Así, se garantiza que los eigenvalores de A son positivos y que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Δ

OBSERVACIÓN. Una matriz simétrica A y la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ se denominan

positiva semidefinida	si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$.
negativa definida	si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
negativa semidefinida	si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ para todo $\mathbf{x}$.
indefinida	si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tiene valores tanto positivos como negativos.

Los teoremas 9.5.2 y 9.5.3 se pueden modificar de manera evidente a fin de que sean válidos para los tres primeros tipos de matrices. Por ejemplo, una matriz simétrica A es positiva semidefinida si y sólo si todos sus eigenvalores son *no negativos*. También, A es positiva semidefinida si y sólo si todas sus submatrices principales tienen determinantes *no negativos*.

OPCIONAL

Demostración del teorema 9.5.1*a*. Como A es simétrica, por el teorema 7.3.1 se concluye que existe una base ortonormal para R^n que consta de eigenvectores de A.

Supóngase que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es esa base, donde $\mathbf{v}_i$ es el eigenvector correspondiente al eigenvalor λ_i. Si $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto interior euclidiano, entonces por el teorema 6.3.1 se concluye que para cualquier $\mathbf{x}$ en R^n

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle\mathbf{v}_n$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle A\mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle A\mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle A\mathbf{v}_n \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \lambda_1\mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \lambda_n\mathbf{v}_n \\ &= \lambda_1\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \lambda_2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Se concluye que los vectores de coordenadas para $\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x}$ con respecto a la base S son

$$\begin{aligned} (\mathbf{x})_S &= (\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle) \\ (A\mathbf{x})_S &= (\lambda_1\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle, \lambda_2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle, \ldots, \lambda_n\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle) \end{aligned}$$

Así, por el teorema 6.3.2*a* y el hecho de que $\|\mathbf{x}\| = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle^2 = 1 \\ \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle &= \lambda_1\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle^2 + \lambda_2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle^2 + \cdots + \lambda_n\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle^2 \end{aligned}$$

Con estas dos ecuaciones y la fórmula (5) se puede demostrar que $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} \le \lambda_1$ como sigue.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle &= \lambda_1\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle^2 + \lambda_2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle^2 + \cdots + \lambda_n\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle^2 \\ &\le \lambda_1\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle^2 + \lambda_1\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle^2 + \cdots + \lambda_1\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle^2 \\ &= \lambda_1(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle^2) \\ &= \lambda_1 \end{aligned}$$

La demostración de que λ_n $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ es semejante y se deja como ejercicio.

Demostración de teorema 9.5.1*b*. Si $\mathbf{x}$ es un eigenvector de A correspondiente a λ_1 y $\|\mathbf{x}\| = 1$, entonces

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda_1\mathbf{x}\rangle = \lambda_1\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \lambda_1\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_1$$

De manera semejante, $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \lambda_n$ si $\|\mathbf{x}\| = 1$ y $\mathbf{x}$ es un eigenvector de A correspondiente a λ_n. □

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.5

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son formas cuadráticas?

   a) $x^2 - \sqrt{2}xy$ b) $5x_1^2 - 2x_2^3 + 4x_1x_2$ c) $4x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 5x_1x_3$

d) $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$ e) $x_1x_2 - 3x_1x_3 + 2x_2x_3$ f) $x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - 5x_2$
g) $(x_1 - 3x_2)^2$ h) $(x_1 - x_3)^2 + 2(x_1 + 4x_2)^2$

2. Expresar las siguientes formas cuadráticas en la notación matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, donde A es una matriz simétrica.

a) $3x_1^2 + 7x_2^2$ b) $4x_1^2 - 9x_2^2 - 6x_1x_2$ c) $5x_1^2 + 5x_1x_2$ d) $-7x_1x_2$

3. Expresar la siguientes formas cuadráticas en la notación matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, donde A es una matriz simétrica.

a) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$ b) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 5x_1x_2 + 9x_1x_3$
c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ d) $\sqrt{2}x_1^2 - \sqrt{3}x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 - 8\sqrt{3}x_1x_3$
e) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_4 + 4x_3x_4$

4. En cada inciso, encontrar una fórmula para la forma cuadrática en la que no aparezcan matrices.

a) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ b) $[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 7 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ c) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

d) $[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e) $[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

5. En cada inciso, encontrar los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática sujeta a la restricción $x_1^2 + x_2^2 = 1$ y determinar los valores de x_1 y x_2 en los que ocurren los valores máximo y mínimo.

a) $5x_1^2 - x_2^2$ b) $7x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$ c) $5x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2$ d) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2$

6. En cada inciso, hallar los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática sujeta a la restricción $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ y determinar los valores de x_1, x_2 y x_3 en los que ocurren los valores máximos y mínimos.

a) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ b) $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2$
c) $3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$

7. Mediante el teorema 9.5.2, determinar cuáles de las siguientes matrices son positivas definidas.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

8. Con el teorema 9.5.3, determinar cuáles de las matrices del ejercicio 7 son positivas definidas.

9. Usando el teorema 9.5.2, determinar cuáles de las siguientes matrices son positivas definidas.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

10. Por medio del teorema 9.5.3, determinar cuáles de las matrices del ejercicio 9 son positivas definidas.

11. En cada inciso, clasificar la forma cuadrática como positiva definida, positiva semidefinida, negativa definida, negativa semidefinida o indefinida.

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $-x_1^2 - 3x_2^2$ c) $(x_1 - x_2)^2$

d) $-(x_1 - x_2)^2$ e) $x_1^2 - x_2^2$ f) x_1x_2

12. En cada inciso, clasificar la matriz como positiva definida, positiva semidefinida, negativa definida, negativa semidefinida o indefinida.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Sea $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ una forma cuadrática en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; definir $T:R^n \to R$ por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$.

a) Demostrar que $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + 2\mathbf{x}^TA\mathbf{y} + T(\mathbf{y})$. b) Demostrar que $T(k\mathbf{x}) = k^2T(\mathbf{x})$.

c) ¿Es T una transformación lineal? Explicar la respuesta.

14. En cada inciso, encontrar los valores de k con los que la forma cuadrática es positiva definida.

a) $x_1^2 + kx_2^2 - 4x_1x_2$ b) $5x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

c) $3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2kx_2x_3$

15. Expresar la forma cuadrática $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_1x_n)^2$ en notación matricial $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, donde A es simétrica.

16. Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En estadística, la cantidad

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

se denomina ***media de la muestra*** de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y

$$s_{\mathbf{x}}^2 = \frac{1}{n-1}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$

se denomina ***variancia de la muestra***.

a) Expresar la forma cuadrática $s_{\mathbf{x}}^2$ en la notación matricial $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, donde A es simétrica.

b) ¿Es $s_{\mathbf{x}}^2$ una forma cuadrática positiva definida? Explicar la respuesta.

17. Completar la demostración del teorema 9.5.1 probando que $\lambda_n \leq \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ si $\|\mathbf{x}\| = 1$ y $\lambda_n = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ si $\mathbf{x}$ es un eigenvector de A correspondiente a λ_n.

9.6 DIAGONALIZACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS; SECCIONES CÓNICAS

En esta sección se mostrará cómo eliminar, cambiando las variables, los términos de producto cruzado que hay en una forma cuadrática, y los resultados se usarán para estudiar las gráficas de secciones cónicas.

DIAGONALIZACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS

Sea

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

una forma cuadrática, donde A es una matriz simétrica. Por el teorema 7.3.1 se sabe que existe una matriz ortogonal P que diagonaliza a A; es decir,

$$P^T AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los eigenvalores de A. Si se hace

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son variables nuevas, y si en (1) se efectúa la sustitución $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, entonces se obtiene

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$$

Pero

$$\mathbf{y}^T D\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

que es una forma cuadrática sin términos de producto cruzado.

En resumen, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.6.1. *Sea* $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *una forma cuadrática en las variables* $x_1, x_2, \ldots,$ x_n, *donde* A *es simétrica. Si* P *diagonaliza ortogonalmente a* A *y si las nuevas variables* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *están definidas por la ecuación* $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, *entonces al sustituir esta ecuación en* $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *se obtiene*

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *son los eigenvalores de* A *y*

$$D = P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Se dice que la matriz P de este teorema ***diagonaliza ortogonalmente*** la forma cuadrática, o que ***reduce la forma cuadrática a una suma de cuadrados***.

Ejemplo 1 Encontrar un cambio de variable que reduzca la forma cuadrática $x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ a una suma de cuadrados, y expresar la forma cuadrática en términos de las nuevas variables.

Solución. La forma cuadrática se puede escribir como

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de la matriz 3×3 es

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

de modo que los eigenvalores son $\lambda = 0$, $\lambda = -3$, $\lambda = 3$. Se deja al lector demostrar que las bases ortonormales de los tres eigenespacios son

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad \lambda = -3: \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 3: \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Así, la sustitución $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ con que se eliminan los términos de producto cruzado es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{2}{3}y_1 - \tfrac{1}{3}y_2 - \tfrac{2}{3}y_3 \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}y_2 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ x_3 &= \tfrac{2}{3}y_1 + \tfrac{2}{3}y_2 + \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$

La nueva forma cuadrática es

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

o bien, de manera equivalente,

$$-3y_2^2 + 3y_3^2 \quad \Delta$$

OBSERVACIÓN. Hay otros métodos para eliminar los términos de producto cruzado de una forma cuadrática, pero no serán analizados aquí. Dos de los métodos, la ***reducción de Lagrange*** y la ***reducción de Kronecker*** se estudian en textos más avanzados.

SECCIONES CÓNICAS

A continuación se aplicará lo aprendido hasta ahora sobre formas cuadráticas al estudio de ecuaciones de la forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{2}$$

donde $a, b, \ldots, f$ son, todos, números reales y por lo menos uno de los números a, b, c es diferente de cero. Una ecuación de este tipo se denomina ***ecuación cuadrática*** en x y y, y

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

se denomina ***forma cuadrática asociada***.

Ejemplo 2 En la ecuación cuadrática

$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$$

las constantes en (2) son

$$a = 3, \quad b = \tfrac{5}{2}, \quad c = -7, \quad d = 2, \quad e = 0, \quad f = 7 \quad \Delta$$

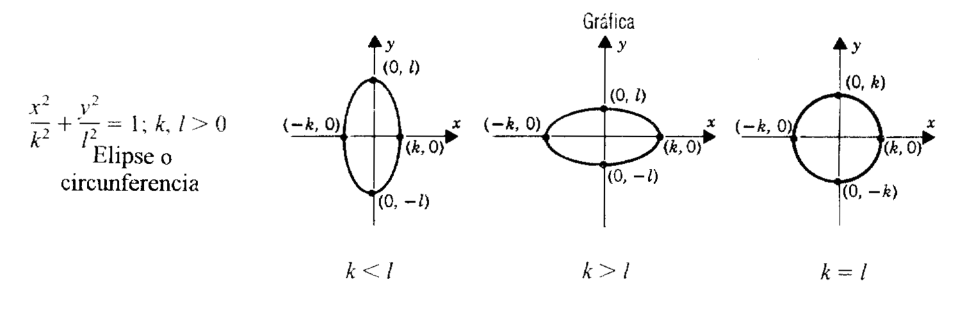
Ejemplo 3

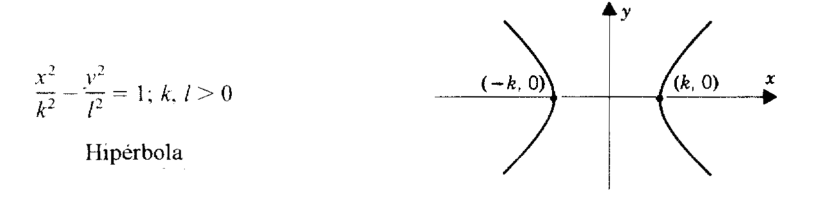
Ecuación cuadrática	Forma cuadrática asociada
$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$	$3x^2 + 5xy - 7y^2$
$4x^2 - 5y^2 + 8y + 9 = 0$	$4x^2 - 5y^2$
$xy + y = 0$	xy

Las gráficas de ecuaciones cuadráticas en x y y se denominan ***cónicas*** o ***secciones cónicas***. Las cónicas más importantes son las elipses, circunferencias, hipérbolas y parábolas; estas curvas se denominan cónicas ***no degeneradas***. Las demás cónicas se denominan ***degeneradas*** e incluyen los puntos simples y los pares de rectas (véase el ejercicio 15).

Se dice que una cónica no degenerada está en ***posición normal*** con respecto a los ejes de coordenadas si su ecuación se puede expresar en una de las formas dadas en la figura 1.

Gráfica





$\frac{y^2}{k^2} - \frac{x^2}{l^2} = 1;\ k, l > 0$

Hipérbola

y x (0, k) (0, −k)

Figura 1 (continúa en la página 565)

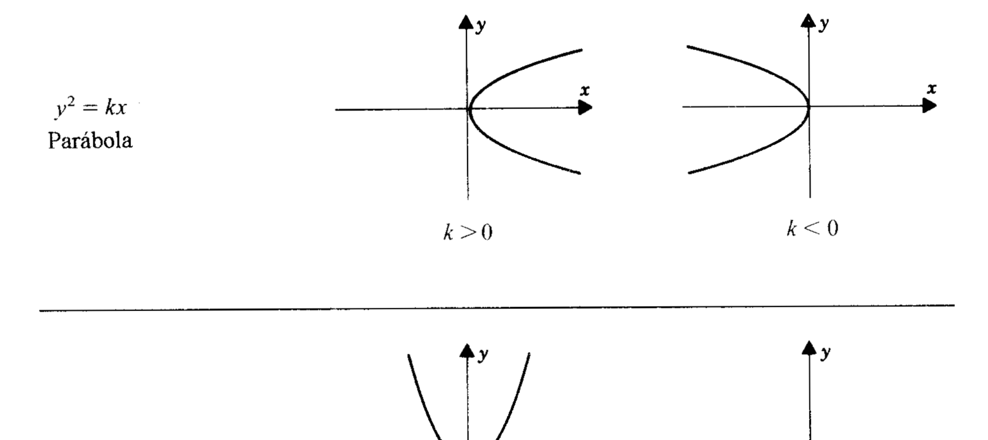


Figura 1

Ejemplo 4 La ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ es de la forma } \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1 \quad \text{con } k = 2, l = 3$$

Por tanto, su gráfica es una elipse en posición normal que corta el eje x en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y al eje y en $(0, -3)$ y $(0, 3)$.

La ecuación $x^2 - 8y^2 = -16$ se puede escribir de nuevo como $y^2/2 - x^2/16 = 1$, que es de la forma $y^2/k - x^2/l = 1$, con $k = \sqrt{2}$, $l = 4$. Por tanto, su gráfica es una hipérbola en posición normal que corta al eje y en $(0, -\sqrt{2}$ y $(0, \sqrt{2})$.

La ecuación $5x^2 + 2y = 0$ se puede volver a escribir como $x^2 = -\frac{2}{5}y$, que es de la forma $x^2 = ky$ con $k = -\frac{2}{5}$. Como $k < 0$, su gráfica es una parábola en posición normal cuyas ramas se abren hacia abajo. Δ

IMPORTANCIA DEL TÉRMINO DE PRODUCTO CRUZADO

Obsérvese que ninguna cónica en posición normal tiene término xy (es decir, término de producto cruzado) en su ecuación; la presencia de un término xy en la ecuación de una cónica no degenerada indica que la cónica no está rotada en la posición normal y ha girado (figura 2*a*). También, ninguna cónica en posición normal tiene a la vez un término x^2 y un término x o un término y^2 y un término y. Si no hay término de producto cruzado, entonces la aparición de cualquiera de estas parejas en la ecuación de una cónica no degenerada indica que la cónica está trasladada fuera de la posición normal (figura 2*b*).

Una técnica para identificar la gráfica de una cónica no degenerada que no esté en posición normal consiste en girar y trasladar los ejes de coordenadas xy a fin de obtener un sistema de coordenadas $x'y'$ con respecto al cual la cónica esté en posición normal. Una vez hecho lo anterior, la ecuación de la cónica en el sistema $x'y'$ es de una de las formas dadas en la figura 1, por lo que se puede identificar fácilmente.

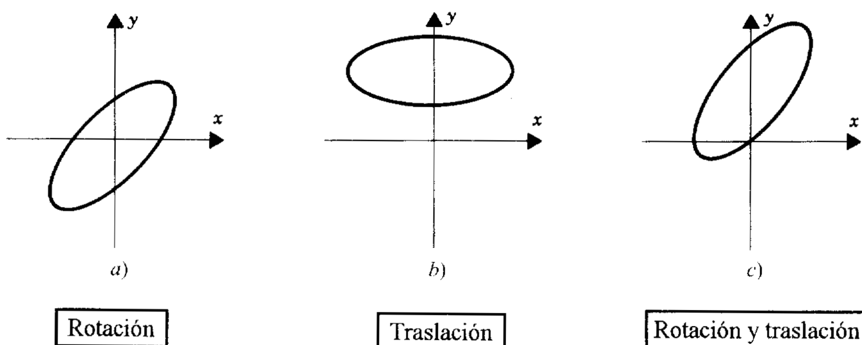


Figure 2

Ejemplo 5 Como la ecuación cuadrática

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$$

contiene términos x^2, x, y^2 y y pero no contiene término de producto cruzado, su gráfica es una cónica que no está en la posición normal y se ha trasladado pero no ha girado. Esta cónica se puede colocar en posición normal trasladando de manera apropiada los ejes de coordenadas. Para lograrlo, primero se agrupan los términos x y y. Así, se obtiene

$$(2x^2 - 12x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0$$

o bien,

$$2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -18$$

Completando el cuadrado* en ambas expresiones entre paréntesis se obtiene

$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -18 + 18 + 4$$

o bien,

$$2(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \qquad (3)$$

---

* Para completar al cuadrado una expresión de la forma $x^2 + px$ se suma y resta la constante $(p/2)^2$ para obtener

$$x^2 + px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Si los ejes de coordenadas se trasladan por medio de las ecuaciones de traslación

$$x' = x - 3, \qquad y' = y - 2$$

entonces (3) se convierte en

$$2x'^2 + y'^2 = 4$$

o bien,

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de una elipse en posición normal en el sistema $x'y'$. Esta elipse se muestra en la figura 3. Δ

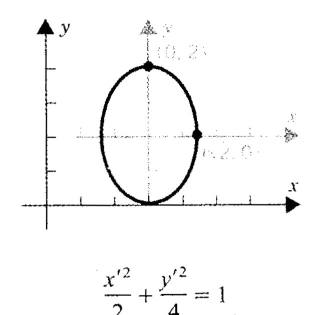


Figura 3 $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$

ELIMINACIÓN DEL TÉRMINO DE PRODUCTO CRUZADO

A continuación se mostrará cómo identificar cónicas que no están en la posición normal por haber girado. Si en las matrices 1×1 se omiten los corchetes, entonces (2) se puede escribir en forma matricial como

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

o

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \qquad K = [d \quad e]$$

Ahora, considérese una cónica C cuya ecuación en coordenadas xy es

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0 \tag{4}$$

Se quiere girar los ejes de coordenadas xy de modo que la ecuación de la cónica en el nuevo sistema $x'y'$ no contenga término de producto cruzado. Esto se puede lograr como se muestra enseguida.

Paso 1. Encontrar una matriz

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

que diagonalice ortogonalmente la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

Paso 2. Intercambiar las columnas de P, en caso de ser necesario, para hacer $\det(P) = 1$. Esto asegura que la transformación ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \quad \text{esto es,} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{5}$$

es una rotación.

Paso 3. Para obtener la ecuación de C en el sistema $x'y'$, (5) se sustituye en (4). Esto produce

$$(P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + f = 0$$

o bien,

$$(\mathbf{x}')^T(P^T AP)\mathbf{x}' + (KP)\mathbf{x}' + f = 0 \tag{6}$$

Como P diagonaliza ortogonalmente a A,

$$P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

donde λ_1 y λ_2 son eigenvalores de A. Así, (6) se puede volver a escribir como

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

o bien,

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

(donde $d' = dp_{11} + ep_{21}$ y $e' = dp_{12} + ep_{22}$). Esta ecuación no contiene término de producto cruzado.

Este análisis se resume en el siguiente teorema.

Teorema 9.6.2. (***Teorema de los ejes principales para R^2***). *Sea*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

la ecuación de una cónica C, y sea

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

la forma cuadrática asociada. Entonces los ejes de coordenadas se pueden girar de modo que la ecuación de C en el nuevo sistema de coordenadas x y sea de la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

donde λ_1 y λ_2 *son los eigenvalores de A. La rotación se puede efectuar mediante la sustitución*

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

donde P diagonaliza ortogonalmente a $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ *y det(P) = 1.*

Ejemplo 6 Describir la cónica C cuya ecuación es $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 3 = 0$.

Solución. La forma matricial de esta ecuación es

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} - 36 = 0 \tag{7}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de A es

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

de modo que los eigenvalores de A son $\lambda = 4$ y $\lambda = 9$. Se deja para el lector demostrar que bases ortonormales para los eigenespacios son

$$\lambda = 4: \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 9: \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Así,

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

diagonaliza ortogonalmente a $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Además, $\det(P) = 1$, de modo que la transformación ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}' \tag{8}$$

es una rotación. Sustituyendo (8) en (7) se obtiene

$$(P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}') - 36 = 0$$

o

$$(\mathbf{x}')^T(P^T A P)\mathbf{x}' - 36 = 0$$

Como

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

esta ecuación puede escribirse como

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0$$

o

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

o

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de la elipse mostrada en la figura 4. En esa figura, los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores columna de P. Δ

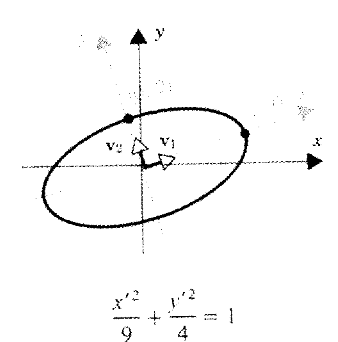


Figura 4 $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$

Ejemplo 7 Describir la cónica C cuya ecuación es

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$$

Solución. La forma matricial de esta ecuación es

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + 4 = 0 \tag{9}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad K = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Como se muestra en el ejemplo 6,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

diagonaliza ortogonalmente a $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Sustituyendo $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ en (9) se obtiene

$$(P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + 4 = 0$$

o bien,

$$(\mathbf{x}')^T(P^TAP)\mathbf{x}' + (KP)\mathbf{x}' + 4 = 0 \tag{10}$$

Como

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad KP = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = [-8 \quad -36]$$

(10) se puede escribir como

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \tag{11}$$

Para que la cónica esté en posición normal es necesario trasladar los ejes $x'y'$ Procediendo como en el ejemplo 5, (11) se vuelve a escribir como

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') = -4$$

Completando los cuadrados se obtiene

$$4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) = -4 + 4 + 36$$

o bien,

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 = 36 \tag{12}$$

Si los ejes de coordenadas se trasladan mediante las ecuaciones de traslación

$$x'' = x' - 1, \qquad y'' = y' - 2$$

entonces (12) se convierte en

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36$$

o bien,

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de la elipse mostrada en la figura 5. En esa figura, los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores columna de P. Δ

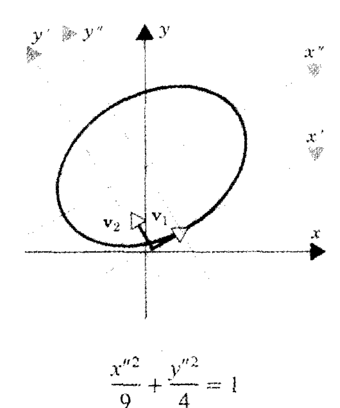


Figura 5 $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.6

1. En cada inciso, encontrar un cambio de variable que reduzca la forma cuadrática a una suma o diferencia de cuadrados, y expresar la forma cuadrática en términos de las nuevas variables.
   a) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$ b) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$ c) $2x_1x_2$ d) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$

2. En cada inciso, encontrar un cambio de variable que reduzca la forma cuadrática a una suma o diferencia de cuadrados, y expresar la forma cuadrática en términos de las nuevas variables.

a) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ b) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

c) $-5x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_2$ d) $2x_1x_3 + 6x_2x_3$

3. Encontrar las formas cuadráticas asociadas a las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$ b) $x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$ c) $5xy = 8$

d) $4x^2 - 2y^2 = 7$ e) $y^2 + 7x - 8y - 5 = 0$

4. Encontrar las matrices de las formas cuadráticas del ejercicio 3.

5. Expresar cada una de las ecuaciones cuadráticas del ejercicio 3 en la forma matricial

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0.$

6. Identificar las siguientes cónicas.

a) $2x^2 + 5y^2 = 20$ b) $4x^2 + 9y^2 = 1$ c) $x^2 - y^2 - 8 = 0$ d) $4y^2 - 5x^2 = 20$

e) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ f) $7y^2 - 2x = 0$ g) $-x^2 = 2y$ h) $3x - 11y^2 = 0$

i) $y - x^2 = 0$ j) $x^2 - 3 = -y^2$

7. En cada inciso, la cónica estará en posición normal por medio de una traslación. Identificar la cónica y proporcionar su ecuación en el sistema de coordenadas trasladado.

a) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$ b) $x^2 - 16y^2 + 8x + 128y = 256$

c) $y^2 - 8x - 14y + 49 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$

e) $2x^2 - 3y^2 + 6x + 20y = -41$ f) $x^2 + 10x + 7y = -32$

8. Las siguientes cónicas no degeneradas están rotadas fuera de la posición normal y han girado. En cada inciso, girar los ejes de coordenadas para eliminar el término xy. Identificar la cónica y proporcionar su ecuación en el sistema de coordenadas que ha girado.

a) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$ b) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$

c) $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$ d) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

En los ejercicios del 9 a 14, trasladar y girar los ejes de coordenadas, en caso de ser necesario, a fin de que la cónica esté en posición normal. Identificar la cónica y proporcionar su ecuación en el sistema de coordenadas final.

9. $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y = 5$ **10.** $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$

11. $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$ **12.** $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$

13. $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$ **14.** $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$

15. La gráfica de una ecuación cuadrática en x y y puede, en ciertos casos, ser un punto, una recta o un par de rectas. Estas cónicas se denominan ***degeneradas***. También es posible que ningún valor real de x y y satisfaga la ecuación. En estos casos la ecuación no tiene gráfica; se dice que representa una ***cónica imaginaria***. Cada una de las siguientes expresiones representa una cónica de-generada o imaginaria. Cuando sea posible, trazar la gráfica.

a) $x^2 - y^2 = 0$ b) $x^2 + 3y^2 + 7 = 0$ c) $8x^2 + 7y^2 = 0$

d) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ e) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -5$

9.7 SUPERFICIES CUÁDRICAS

En esta sección se aplicarán las técnicas de diagonalización obtenidas en la sección precedente a ecuaciones cuadráticas con tres variables, y los resultados se usarán para estudiar superficies cuádricas.

SUPERFICIES CUÁDRICAS

Una ecuación de la forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \tag{1}$$

donde no todos los coeficientes $a, b, \ldots, f$ son cero se denomina ***ecuación cuadrática en x, y, y z***; la expresión

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

se denomina ***forma cuadrática asociada.***

La ecuación (1) se puede escribir en forma matricial como

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g \quad h \quad i]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

o

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + j = 0$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}, \qquad K = [g \quad h \quad i]$$

Ejemplo 1 La forma cuadrática asociada con la ecuación cuadrática

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz + 7x + 2y + 3z - 7 = 0$$

es

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz \quad \Delta$$

Las gráficas de ecuaciones cuadráticas con variables x, y y z se denominan ***cuádricas*** o ***superficies cuádricas***. Las ecuaciones más simples de superficies cuádricas ocurren cuando estas superficies se colocan en ciertas ***posiciones normales*** con respecto a los ejes de coordenadas. En la figura 1 se muestran las seis superficies cuádricas básicas y las ecuaciones de estas superficies cuando éstas se colocan en las posiciones normales mostradas en la figura. Si una superficie cuádrica es cortada por un plano, entonces la curva de intersección se denomina ***traza*** del plano sobre la superficie. Para ayudar a conceptualizar las superficies cuádricas de la figura 1, se muestran y describen las trazas formadas por planos

paralelos a los planos de coordenadas. La presencia de uno o más términos de producto cruzado xy, xz y yz en la ecuación de una cuádrica indica que la cuádrica está fuera de la posición normal y se ha girado; la presencia de ambos términos x^2 y x, y^2 y y o z^2 y z en una cuádrica sin término de producto cruzado indica que la cuádrica está trasladada fuera de la posición normal.

Figura 1

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide	$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1$ Los trazos en los planos de coordenadas son elipses, así como los trazos en los planos paralelos a los planos de coordenadas.	Cono elíptico	$z^2=\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}$ El trazo en el plano xy es un punto (el origen), y los trazos en los planos paralelos al plano xy son elipses. Los trazos en los planos yz y xz son pares de rectas que se cortan en el origen. Los trazos en los planos paralelos a éstos son hipérbolas.
Hiperboloide de una hoja	$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=1$ El trazo en el plano xy es una elipse, así como los trazos en los planos paralelos al plano xy. Los trazos en los planos yz y xz son hipérbolas, así como los trazos en los planos paralelos a éstos.	Paraboloide elíptico	$z=\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}$ El trazo en el plano xy es un punto (el origen), y los trazos en los planos paralelos y por encima del plano xy son elipses. Los trazos en los planos yz y xz son parábolas, así como los trazos en los planos paralelos a éstos.
Hiperboloide de dos hojas	$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=-1$ No hay trazo en el plano xy. En los planos paralelos al plano xy, que cortan la superficie, los trazos son elipses. En los planos yz y xz los trazos son hipérbolas, así como los trazos en los planos paralelos a éstos.	Paraboloide hiperbólico	$z=\frac{y^2}{m^2}-\frac{x^2}{l^2}$ El trazo en el plano xy es un par de rectas que se cortan en el origen. Los trazos en los planos paralelos al plano xy son hipérbolas. Las hipérbolas por encima del plano xy se abren en la dirección y, y las que están por abajo lo hacen en la dirección x. Los trazos en los planos yz y xz son parábolas, así como los trazos en los planos paralelos a éstos.

Ejemplo 2 Describir la superficie cuádrica cuya ecuación es

$$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$$

Solución. Al reagrupar los términos se obtiene

$$4(x^2 - 4x) + 36(y^2 - 6y) - 9z^2 = -304$$

Completando el cuadrado de los binomios entre paréntesis se obtiene

$$4(x^2 - 4x + 4) + 36(y^2 - 6y + 9) - 9z^2 = -304 + 16 + 324$$

o

$$4(x-2)^2 + 36(y-3)^2 - 9z^2 = 36$$

o

$$\frac{(x-2)^2}{9} + (y-3)^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

Trasladando los ejes por medio de las ecuaciones de traslación

$$x' = x - 2, \qquad y' = y - 3, \qquad z' = z$$

se obtiene

$$\frac{x'^2}{9} + y'^2 - \frac{z'^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de un hiperboloide de una hoja. Δ

ELIMINACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE PRODUCTO CRUZADO

El procedimiento para identificar cuádricas que están fuera de la posición normal y se han girado, es semejante al procedimiento para las cónicas. Sea Q una superficie cuádrica cuya ecuación en coordenadas xyz es

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + j = 0 \tag{2}$$

Se quiere girar los ejes de coordenadas xyz de modo que la ecuación de la cuádrica en el nuevo sistema de coordenadas $x'y'z'$ no contenga términos de producto cruzado. Esto se puede efectuar como sigue:

Paso 1. Encontrar una matriz P que diagonalice ortogonalmente a $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

Paso 2. Intercambiar dos columnas de P, en caso de ser necesario, a fin de hacer $\det(P) = 1$. Esto asegura que la transformación ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \text{ es decir, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \tag{3}$$

es una rotación.

Paso 3. Sustituir (3) en (2). Así se obtiene una ecuación para la cuádrica en coordenadas $x'y'z'$ sin términos de producto cruzado. (La demostración es semejante a la de las cónicas y se deja como ejercicio.)

El siguiente teorema resume este análisis.

Teorema 9.7.1. (***Teorema de los ejes principales para R^3***). *Sea*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

la ecuación de una cuádrica Q, y sea

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

la forma cuadrática asociada. Los ejes de coordenadas se pueden girar de modo que la ecuación de Q en el sistema de coordenadas $x'y'z'$ sea de la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$$

donde λ_1, λ_2 y λ_3 son los eigenvalores de A. La rotación se puede efectuar por medio de la sustitución

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

donde P diagonaliza ortogonalmente a $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ y $det(P) = 1$.

Ejemplo 3 Describir la superficie cuádrica cuya ecuación es

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

Solución. La forma matricial de la ecuación cuadrática anterior es

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - 3 = 0 \tag{4}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Como se muestra en el ejemplo 1 de la sección 7.3, los eigenvalores de A son $\lambda = 2$ y $\lambda = 8$, y A es diagonalizada ortogonalmente por la matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

donde los dos primeros vectores columna en P son eigenvectores correspondientes a $\lambda = 2$ y el tercer vector columna es un eigenvector correspondiente a $\lambda = 8$.

Como $\det(P) = 1$ (comprobar), la transformación ortogonal de coordenadas $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ es una rotación. Sustituyendo esta expresión en (4) se obtiene

$$(P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}') - 3 = 0$$

o bien, de manera equivalente,

$$(\mathbf{x}')^T(P^TAP)\mathbf{x}' - 3 = 0 \tag{5}$$

Pero

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

de modo que (5) se convierte en

$$[x' \quad y' \quad z'] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

o bien,

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

La ecuación anterior se puede volver a escribir como

$$\frac{x'^2}{3/2} + \frac{y'^2}{3/2} + \frac{z'^2}{3/8} = 1$$

que es la ecuación de un elipsoide. Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.7

1. Encontrar las formas cuadráticas asociadas con las siguientes ecuaciones cuadráticas
   a) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3$
   b) $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3x = 4$
   c) $xy + xz + yz = 1$
   d) $x^2 + y^2 - z^2 = 7$
   e) $3z^2 + 3xz - 14y + 9 = 0$
   f) $2z^2 + 2xz + y^2 + 2x - y + 3z = 0$
2. Encontrar las matrices de las formas cuadráticas del ejercicio 1.

3. Expresar cada una de las ecuaciones cuadráticas dadas en el ejercicio 1 en la forma matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + j = 0$.

4. Identificar las siguientes cuádricas.

a) $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$ b) $2x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 18$ c) $6x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 6 = 0$
d) $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ e) $16x^2 + y^2 = 16z$ f) $7x^2 - 3y^2 + z = 0$
g) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

5. En cada inciso, determinar las ecuaciones de traslación que colocan la cuádrica en posición normal.

a) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0$ b) $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z = -7$
c) $3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$ d) $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z = 544$
e) $x^2 + 16y^2 + 2x - 32y - 16z - 15 = 0$ f) $7x^2 - 3y^2 + 126x + 72y + z + 135 = 0$
g) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$

6. En cada inciso, encontrar una rotación $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ que elimina los términos de producto cruzado. Identificar la cuádrica y escribir su ecuación en el sistema $x'y'z'$.

a) $2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$ b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$
c) $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$ d) $2xy + z = 0$

En los ejercicios del 7 al 10, trasladar y girar los ejes de coordenadas a fin de colocar la cuádrica en posición normal. Identificar la cuádrica y escribir su ecuación en el sistema de coordenadas final.

7. $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = -9$

8. $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$

9. $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$

10. $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$

11. Demostrar el teorema 9.7.1.

9.8 COMPARACIÓN DE PROCEDIMIENTOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES

En esta sección se analizarán algunos aspectos prácticos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, invertir matrices y encontrar eigenvalores. Aunque ya antes se analizaron métodos para efectuar estos cálculos, los métodos no son aplicables directamente a la solución por computadora de problemas en gran escala que se presentan en aplicaciones del mundo real.

CONTEO DE OPERACIONES

Debido a que las computadoras están limitadas en el número de cifras decimales que pueden manejar, redondean o truncan casi todas las cantidades numéricas. Por ejemplo, una computadora diseñada para almacenar ocho cifras decimales puede registrar $\frac{2}{3}$ como .66666667 (redondeado) o como .66666666 (truncado). En cualquier caso se introduce un error denominado ***error por redondeo***.

Las consideraciones prácticas principales al resolver problemas de álgebra lineal en computadoras digitales son reducir el tiempo de computadora (y así el costo) necesario para obtener la solución y disminuir inexactitudes debidas a errores por redondeo. Así, un buen algoritmo de cómputo usa el menor número de operaciones posible y efectúa tales operaciones de modo que reduce el efecto de errores por redondeo.

En este texto se han estudiado cuatro métodos para resolver un sistema lineal, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, de n ecuaciones con n incógnitas:

1. Eliminación de Gauss con retrosustitución,
2. Eliminación de Gauss-Jordan.
3. Calculando A^{-1}, obtener $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, y
4. La regla de Cramer.

Para comparar estos métodos como herramientas de cómputo es necesario saber cuántas operaciones aritméticas requiere cada uno. En una computadora moderna grande, los tiempos de ejecución representativos en microsegundos (1 microsegundo = 10^{-6} segundos) para las operaciones aritméticas básicas son

Multiplicación = 1.0 microsegundo
División = 3.0 microsegundos
Adición = 0.5 microsegundos
Sustracción = 0.5 microsegundos

En este análisis se agruparán las divisiones y las multiplicaciones (tiempo medio de ejecución = 2.0 microsegundos), y también se agruparán las sumas y las sustracciones (tiempo medio de ejecución = 0.5 microsegundos). Las multiplicaciones o divisiones se denominarán "multiplicaciones", y las adiciones y sustracciones, "adiciones".

En la tabla 1 se muestra el número de operaciones necesarias para resolver un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de n ecuaciones con n incógnitas aplicando cada uno de los métodos analizados en el texto, así como el número de operaciones necesarias para invertir a A o para calcular su determinante por reducción de renglones.

TABLA 1 ***Conteo de operaciones para una matriz invertible A $n \times n$***

Método	**Número de adiciones**	**Número de multiplicaciones**
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación de Gauss-Jordan	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación gaussiana	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$
Encontrar A^{-1} reduciendo $[A \mid I]$ a $[I \mid A^{-1}]$	$n^3 - 2n^2 + n$	n^3
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	$n^3 - n^2$	$n^3 + n^2$
Encontrar det(A) por reducción de renglones	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3}n - 1$
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por la regla de Cramer	$\frac{1}{3}n^4 - \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n$	$\frac{1}{3}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3}n^2 + \frac{2}{3}n - 1$

Obsérvese que los métodos de eliminación de Gauss-Jordan y de eliminación gaussiana proporcionados en el texto poseen el mismo conteo de operaciones. No es difícil entender por qué esto es así. Ambos métodos empiezan con la reducción de la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones. Esto se denomina ***fase hacia adelante*** o ***pase hacia delante***. Luego la solución se termina por retrosustitución en la eliminación gaussiana y continuando la reducción hasta la forma escalonada reducida en la eliminación de Gauss-Jordan. Esto se denomina ***fase hacia atrás*** o ***pase hacia atrás***. Resulta que el número de operaciones necesarias para la fase hacia adelante es el mismo, sin importar que se use retrosustitución o la reducción se continúe hasta llegar a la forma escalonada reducida. Así, los métodos de eliminación gaussiana y de eliminación de Gauss-Jordan proporcionados en el texto poseen el mismo conteo de operaciones.

OBSERVACIÓN. Existe una variante común de la eliminación de Gauss-Jordan, menos eficaz que la presentada en el texto. En el método del texto, la matriz aumentada primero se expresa en forma escalonada reducida mediante la introducción de ceros *abajo* de los unos principales; luego, la reducción se completa mediante la introducción de ceros arriba de los unos principales. Un procedimiento opcional es introducir ceros *abajo* y *arriba* de un 1 principal una vez obtenido éste. El método requiere

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{adiciones} \qquad \text{y} \qquad \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \quad \text{multiplicaciones}$$

que son valores mayores que los aquí obtenidos para toda $n \geq 3$.

Para ilustrar cómo se calculan los resultados de la tabla 1, se obtendrá el conteo de operaciones para la eliminación de Gauss-Jordan. Para llevar a cabo este análisis se requieren las siguientes fórmulas de la suma de los n primeros enteros positivos y la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

En los ejercicios se analizan métodos de obtención de estas fórmulas. También se requieren las fórmulas para la suma de los $n - 1$ primeros enteros positivos y la suma de los cuadrados de los $n - 1$ primeros enteros positivos. Las fórmulas se pueden obtener sustituyendo $n - 1$ por n en (1) y (2).

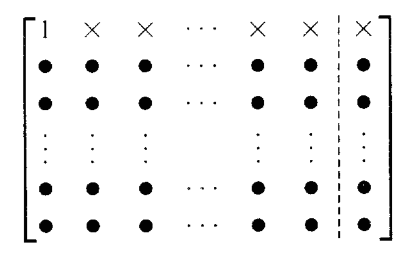
$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \tag{3}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \tag{4}$$

CONTEO DE OPERACIONES PARA LA ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, y supóngase que A es invertible, de modo que el sistema tiene una solución única. También supóngase, para simplificar las cosas, que para escribir la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ en forma escalonada reducida no se requiere ningún intercambio de renglones. Esta hipótesis se justifica por el hecho de que los intercambios de renglones se efectúan como registro de operaciones en una computadora y requieren mucho menos tiempo que las operaciones aritméticas.

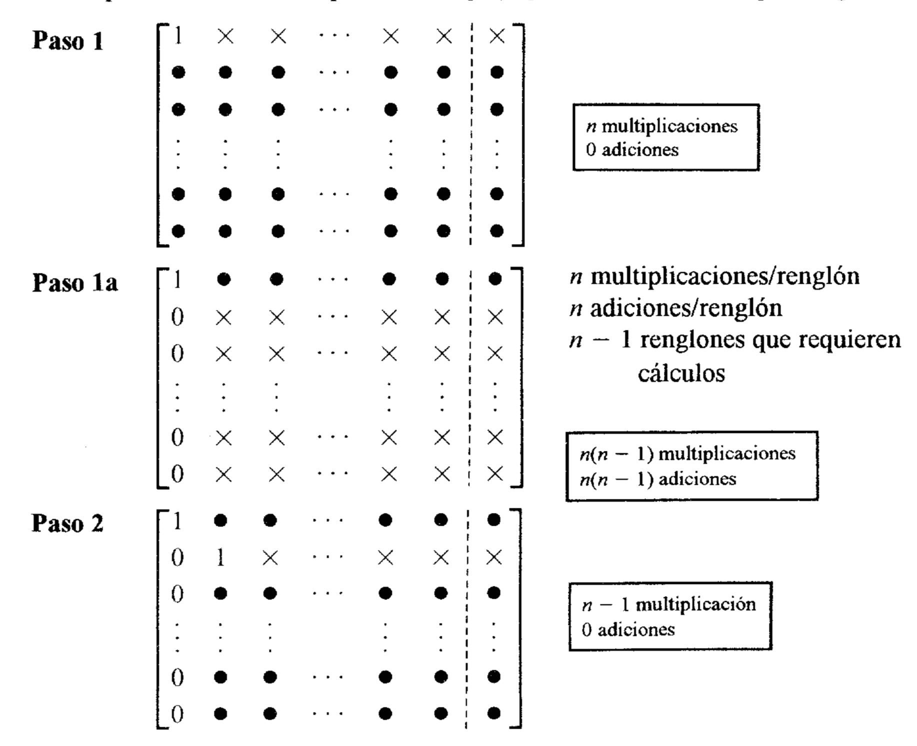
Como no se requiere ningún intercambio de renglones, el primer paso en el proceso de eliminación de Gauss-Jordan es introducir un 1 principal en el primer renglón multiplicando los elementos de este renglón por el recíproco del elemento de la izquierda en el renglón. Este paso se representa de manera esquemática como sigue:

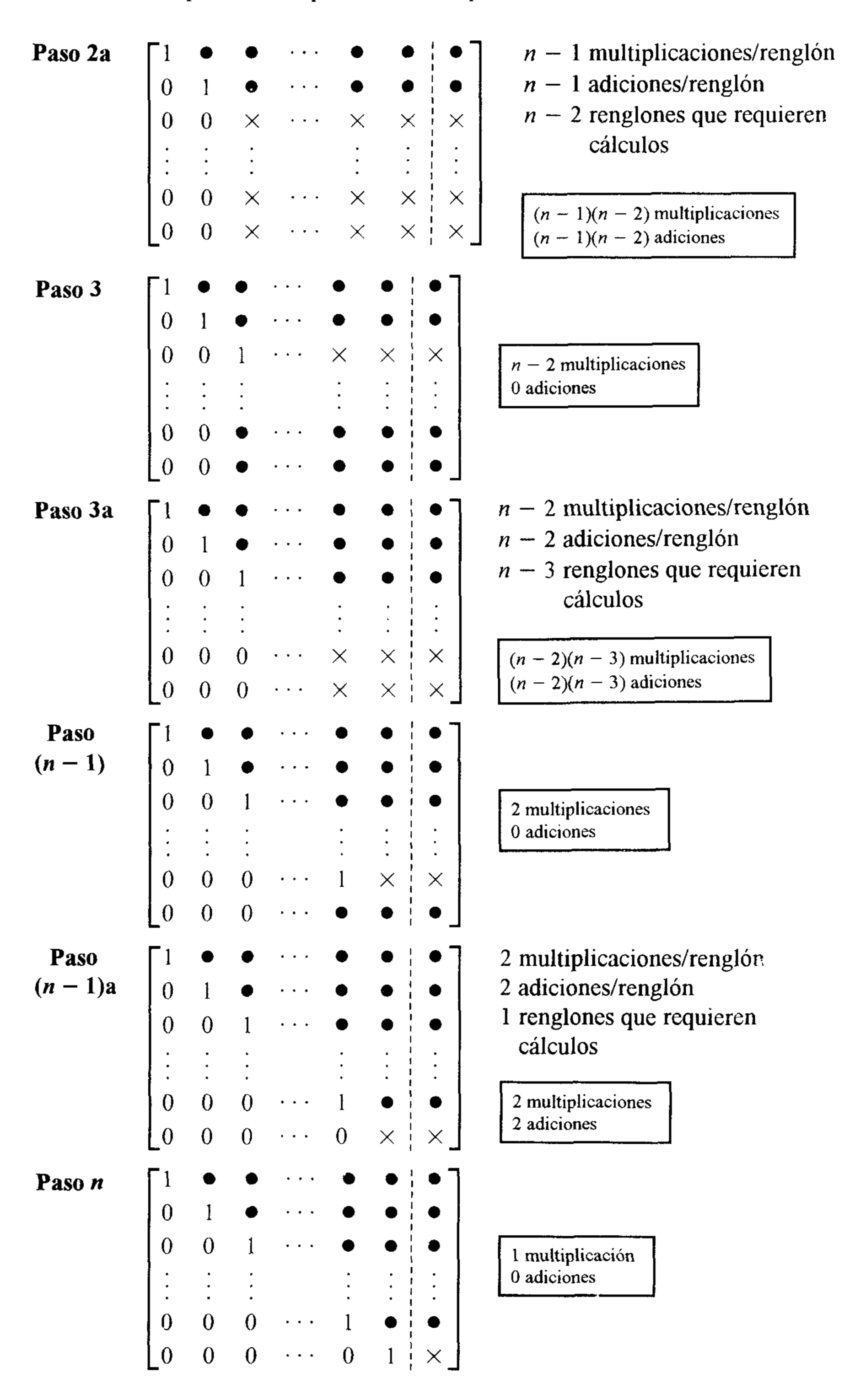


× denota una cantidad que se calculará
● denota una cantidad que no se calcula
El tamaño de la matriz es $n \times (n + 1)$

Obsérvese que el 1 principal simplemente se registra y que no requiere cálculos; sólo es necesario calcular los n elementos restantes en el primer renglón.

A continuación se presenta una descripción esquemática de los pasos y el número de operaciones necesarias para reducir $[A \mid \mathbf{b}]$ a forma escalonada por renglones.




Paso 2a
n − 1 multiplicaciones/renglón
n − 1 adiciones/renglón
n − 2 renglones que requieren cálculos
(n − 1)(n − 2) multiplicaciones
(n − 1)(n − 2) adiciones
Paso 3
n − 2 multiplicaciones
0 adiciones
Paso 3a
n − 2 multiplicaciones/renglón
n − 2 adiciones/renglón
n − 3 renglones que requieren cálculos
(n − 2)(n − 3) multiplicaciones
(n − 2)(n − 3) adiciones
Paso (n − 1)
2 multiplicaciones
0 adiciones
Paso (n − 1)a
2 multiplicaciones/renglón
2 adiciones/renglón
1 renglones que requieren cálculos
2 multiplicaciones
2 adiciones
Paso n
1 multiplicación
0 adiciones

Así, el número de operaciones necesarias para completar pasos consecutivos es como sigue:

Pasos 1 y 1a
Multiplicaciones: $n + n(n-1) = n^2$
Adiciones: $n(n-1) = n^2 - n$

Pasos 2 y 2a
Multiplicaciones: $(n-1) + (n-1)(n-2) = (n-1)^2$
Adiciones $(n-1)(n-2) = (n-1)^2 - (n-1)$

Pasos 3 y 3a
Multiplicaciones: $(n-2) + (n-2)(n-3) = (n-2)^2$
Adiciones: $(n-2)(n-3) = (n-2)^2 - (n-2)$

$\vdots$

Pasos $(n-1)$ y $(n-1)$a
Multiplicaciones: $4\ (= 2^2)$
Adiciones: $2\ (= 2^2 - 2)$

Paso n
Multiplicaciones: $1\ (= 1^2)$
Adiciones: $0\ (= 1^2 - 1)$

Por consiguiente, el número total de operaciones necesarias para expresar $[A \mid \mathbf{b}]$ en forma escalonada reducida es

$$\text{Multiplicaciones:}\quad n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2$$

$$\text{Adiciones:}\quad [n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2] - [n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1]$$

o bien, aplicando las fórmulas (1) y (2),

$$\text{Multiplicaciones:}\quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \tag{5}$$

$$\text{Adiciones:}\quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} \tag{6}$$

Así se completa el conteo de operaciones para la fase hacia adelante. Para la fase hacia atrás es necesario escribir la forma escalonada de $[A \mid \mathbf{b}]$ en forma escalonada reducida mediante la introducción de ceros por arriba de los 1 principales. A continuación se muestran las operaciones:

Paso 1

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 0 & \times \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \bullet & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

$n-1$ multiplicaciones $n-1$ adiciones

Paso

⋮

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

$n-2$ multiplicaciones $n-2$ adiciones

Paso $(n-2)$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

2 multiplicaciones 2 adiciones

Paso $(n-1)$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

1 multiplicación 1 adición

Así, el número de operaciones necesarias para la fase hacia atrás es

$$\text{Multiplicaciones: } (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$
$$\text{Adiciones: } (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

o bien, aplicando la fórmula (3),

$$\text{Multiplicaciones: } \frac{(n-1)n}{2}=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2} \tag{7}$$

$$\text{Adiciones: } \frac{(n-1)n}{2}=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2} \tag{8}$$

Así, por (5), (6), (7) y (8), el conteo total de operaciones para la eliminación de Gauss-Jordan es

$$\text{Multiplicaciones:} \quad \left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)+\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right)=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3} \qquad (9)$$

$$\text{Adiciones:} \quad \left(\frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}\right)+\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6} \qquad (10)$$

COMPARACIÓN DE METODOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES

En aplicaciones prácticas no es raro encontrar sistemas lineales de miles de ecuaciones con miles de incógnitas. Así, la tabla 1 reviste especial importancia para grandes valores de n. Un hecho verdadero para polinomios es que para grandes valores de la variable, un polinomio puede ser bien aproximado por su término de grado más alto; es decir, si $a_k \neq 0$, entonces

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k \approx a_kx^k \qquad \text{para } x \text{ grande}$$

(ejercicio 12). Así, para grandes valores de n, el conteo de operaciones en la tabla 1 se puede aproximar como se muestra en la tabla 2.

Por la tabla 2 se deduce que cuando n es grande los mejores métodos para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son la eliminación gaussiana y la eliminación de Gauss-Jordan. El método de multiplicar por A^{-1}es bastante peor que los anteriores (requiere el triple de operaciones), y el método más ineficaz de los cuatro es la regla de Cramer.

TABLA 2 ***Conteo aproximado de operaciones para una matriz invertible n × n con n grande***

Método	**Número de adiciones**	**Número de multiplicaciones**
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación de Gauss-Jordan	$\approx\frac{n^3}{3}$	$\approx\frac{n^3}{3}$
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación gaussiana	$\approx\frac{n^3}{3}$	$\approx\frac{n^3}{3}$
Encontrar A^{-1} reduciendo $[A \mid I]$ a $[I \mid A]^{-1}$	$\approx n^3$	$\approx n^3$
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	$\approx n^3$	$\approx n^3$
Encontrar det(A) por reducción de renglones	$\approx\frac{n^3}{3}$	$\approx\frac{n^3}{3}$
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por la regla de Cramer	$\approx\frac{n^4}{3}$	$\approx\frac{n^4}{3}$

OBSERVACIÓN. En la observación a continuación de la tabla 1 se mencionó que si la eliminación de Gauss-Jordan se efectúa mediante la introducción de ceros arriba y abajo de los unos principales tan pronto como se obtienen éstos, entonces el conteo de operaciones es

$$\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2} \text{ adiciones} \qquad \text{y} \qquad \frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2} \text{ multiplicaciones}$$

Así, para n grande este procedimiento requiere $\approx n^3/2$ operaciones, que es 50% mayor que las $n^3/3$ multiplicaciones necesarias para efectuar el método presentado en el texto. Lo mismo se cumple para las adiciones.

Es razonable preguntar si se pueden crear otros métodos para resolver sistemas lineales que pudieran requerir significativamente menos operaciones que las $\approx n^3/3$ adiciones y multiplicaciones necesarias en la eliminación gaussiana y en la eliminación de Gauss-Jordan. La respuesta es un "sí" categórico. En años recientes se han creado métodos que requieren $\approx Cn^q$ multiplicaciones, donde q es ligeramente mayor que 2.5. Sin embargo, estos métodos tienen poco valor práctico, ya que su programación es complicada, la constante C es muy grande y el número de adiciones necesarias es excesivo. En pocas palabras, en la actualidad no existe ningún método práctico para resolver sistemas lineales generales que mejore significativamente el conteo de operaciones de la eliminación gaussiana y del método de eliminación de Gauss-Jordan presentado en el texto.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.8

1. Encontrar el número de adiciones y multiplicaciones necesarias para calcular AB si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$.

2. Usando los resultados del ejercicio 1, encontrar el número de adiciones y multiplicaciones necesarias para calcular A^k por multiplicación directa si A es una matriz $n \times n$.

3. Suponiendo que A es una matriz $n \times n$, usar las fórmulas de la tabla 1 para determinar el número de operaciones necesarias para efectuar los procedimientos de la tabla 3.

Tabla 3

	$n=5$		$n=10$		$n=100$		$n=1000$	
	+	×	+	×	+	×	+	×
Resolver $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ por eliminación de Gauss-Jordan								
Resolver $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ por eliminación gaussiana								
Encontrar A^{-1} reduciendo $[A \mid I]$ a $[I \mid A^{-1}]$								
Resolver $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ como $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$								
Encontrar det(A) por reducción de renglones								
Resolver $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ por la regla de Cramer								

4. Suponiendo un tiempo de ejecución en computadora de 2.0 microsegundos para las multiplicaciones y de 0.5 microsegundos para las adiciones, usar los resultados del ejercicio 3 para escribir los tiempos de ejecución en segundos necesarios para efectuar los procedimientos de la tabla 4.

Tabla 4

	$n = 5$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$
	Tiempo de ejecución (s)	**Tiempo de ejecución (s)**	**Tiempo de ejecución (s)**	**Tiempo de ejecución (s)**
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación de Gauss-Jordan				
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación gaussiana				
Encontrar A^{-1} reduciendo $[A \mid I]$ a $[I \mid A^{-1}]$				
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como				
Encontrar $\det(A)$ por reducción de renglones				
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por la regla de Cramer				

5. Obtener la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

[***Sugerencia.*** Sea $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Escribir los términos de S_n en orden invertido y sumar las dos expresiones para S_n.]

6. Usando el resultado del ejercicio 5, demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

7. Obtener la fórmula

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

realizando los pasos siguientes.

a) Demostrar que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

b) Demostrar que

$$[2^3 - 1^3] + [3^3 - 2^3] + [4^3 - 3^3] + \cdots + [(n+1)^3 - n^3] = (n+1)^3 - 1$$

c) Aplicando a) a cada término del miembro izquierdo de b), demostrar que

$$(n+1)^3 - 1 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2] + 3[1 + 2 + 3 + \cdots + n] + n$$

d) Resolver la ecuación del inciso c) para $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, usar el resultado del ejercicio 5 y luego simplificar.

8. Usando el resultado del ejercicio 7, demostrar que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

9. Sea R la forma escalonada de una matriz invertible $n \times n$. Demostrar que para resolver el sistema lineal $R\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por retrosustitución se requieren

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{multiplicaciones}$$

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{adiciones}$$

10. Demostrar que para reducir una matriz invertible de $n \times n$ a I_n aplicando el método del texto se requieren

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} \quad \text{multiplicaciones}$$

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \text{adiciones}$$

[*Nota.* Supóngase que no se requiere ningún intercambio de renglones.]

11. Considérese la variante de la eliminación de Gauss-Jordan en que se introducen ceros arriba y abajo de un 1 principal tan pronto como se obtiene éste, y sea A es una matriz invertible $n \times n$. Demostrar que para resolver un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando esta versión de la eliminación de Gauss-Jordan se requieren

$$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \quad \text{multiplicaciones}$$

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{adiciones}$$

[*Nota.* Supóngase que no se requiere ningún intercambio de renglones.]

12. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Demostrar que si $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$, donde $a_k \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{a_kx^k} = 1$$

[*Nota.* Este resultado justifica la aproximación $a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k \approx a_kx^k$ para x grande.]

9.9 DESCOMPOSICIONES *LU*

Con la eliminación gaussiana y la eliminación de Gauss-Jordan se resuelve un sistema lineal operando sistemáticamente sobre la matriz aumentada. En esta sección se analizará un método diferente basado en la factorización de la matriz de coeficientes en un producto de dos matrices: una triangular inferior y otra

*de coeficientes en un producto de dos matrices: una triangular inferior y otra triangular superior. Este método es adecuado para computadoras digitales y constituye una base para muchos programas de cómputo prácticos.**

SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES POR FACTORIZACIÓN

Se procederá en dos partes. Primero se mostrará cómo un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede resolver fácilmente una vez que A se factoriza en un producto de dos matrices: una triangular inferior y otra triangular superior. Luego se mostrará cómo obtener la factorización.

Si una matriz A $n \times n$ se puede factorizar en un producto de matrices $n \times n$ como

$$A = LU$$

donde L es triangular inferior y U es triangular superior, entonces el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede resolver como sigue:

Paso 1. Volver a escribir el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Paso 2. Definir una nueva matriz $\mathbf{y}$ de $n \times 1$ por

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{2}$$

Paso 3. Usar (2) para volver a escribir (1) como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y resolver este sistema para $\mathbf{y}$.

Paso 4. Sustituir $\mathbf{y}$ en (2) y despejar $\mathbf{x}$.

Aunque este procedimiento reemplaza el problema de resolver el simple sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por el problema de resolver los dos sistemas $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, éstos se resuelven fácilmente porque las matrices de coeficientes son triangulares. El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

Ejemplo 1 Después, en esta sección se obtendrá la factorización

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando este resultado y el método antes descrito, resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

---

* En 1979, los Argonne National Laboratories desarrollaron una importante biblioteca, denominada LINPAK, de programas de álgebra lineal independientes de la máquina. Muchos de los programas de tal biblioteca están basados en los métodos que se analizan en esta sección.

Solución. (3) se vuelve a escribir como

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Como se especifica en el paso 2 anterior, y_1, y_2 y y_3 se definen por la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

de modo que (3) se puede volver a escribir como

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\begin{aligned} 2y_1 \qquad\qquad &= 2 \\ -3y_1 + y_2 \qquad &= 2 \\ 4y_1 - 3y_2 + 7y_3 &= 3 \end{aligned}$$

El procedimiento para resolver este sistema es semejante a la retrosustitución, excepto que las ecuaciones se resuelven de arriba hacia abajo, en vez de abajo hacia arriba. Este procedimiento, denominado ***sustitución hacia adelante***, produce

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = 5, \qquad y_3 = 2$$

(comprobar). Sustituyendo estos valores en (5) se obtiene el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema por retrosustitución se obtiene la solución

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 2$$

(comprobar). Δ

DESCOMPOSICIONES *LU*

Ahora que ya se ha visto cómo un sistema lineal de n ecuaciones en n incógnitas se puede resolver factorizando la matriz de coeficientes, se volverá al problema de obtener la factorización. Para originar el método, supóngase que una matriz A $n \times n$ se ha reducido a una forma escalonada U mediante una sucesión de operaciones elementales en los renglones. Por el teorema 1.5.1, cada una de estas operaciones se puede efectuar multiplicando por la izquierda por una matriz elemental apropiada. Así, es posible encontrar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U \tag{6}$$

Por el teorema 1.5.2, $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son invertibles, de modo que es posible multiplicar sucesivamente por la izquierda ambos miembros de la ecuación (6) por

$$E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$$

para obtener

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U \tag{7}$$

En el ejercicio 5 se ayudará al lector a demostrar que la matriz L definida por

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{8}$$

es triangular inferior en el supuesto de que *para reducir A a U no se efectúe ningún intercambio de renglones*. Suponiendo que este es el caso, sustituyendo (8) en (7) se obtiene

$$A = LU$$

que es una factorización de A en un producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior.

El siguiente teorema resume el resultado anterior.

Teorema 9.9.1. *Si A es una matriz cuadrada que se puede reducir a una forma escalonada U sin aplicar ningún intercambio de renglones, entonces A se puede factorizar como $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior.*

Definición. Una factorización de una matriz cuadrada A como $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior, se denomina ***descomposición LU*** o ***descomposición triangular de A***:

Ejemplo 2 Encontrar una descomposición LU de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución. Para obtener una descomposición LU, $A = LU$, A se reducirá a una forma escalonada U, y luego L se calculará a partir de (8). Los pasos son:

	Reducción a la forma escalonada	Matriz elemental que corresponde a la operación en los renglones	Inversa de la matriz elemental
	$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$		
Paso 1		$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$		
Paso 2		$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$		
Paso 3		$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$		
Paso 4		$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$		
Paso 5		$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$	$E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		

Así,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y, por (8),

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es una descomposición LU de A. Δ

PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR DESCOMPOSICIONES *LU*

Como se muestra en este ejemplo, casi todo el trabajo para obtener una descomposición LU se invierte en el cálculo de L. Sin embargo, *todo* este trabajo se puede eliminar llevando un registro cuidadoso de las operaciones usadas para reducir A a U. Como se supone que no se requiere ningún intercambio de renglones para reducir A a U, entonces sólo se realizan dos tipos de operaciones: la multiplicación de un renglón por una constante diferente de cero y la adición de un múltiplo de un renglón a otro renglón. La primera operación se usa para introducir los unos principales y la segunda para introducir ceros abajo de los unos principales.

En el ejemplo 2 los multiplicadores necesarios para introducir los unos principales en renglones consecutivos son:

$\frac{1}{2}$ para el primer renglón
1 para el segundo renglón
$\frac{1}{7}$ para el tercer renglón

Obsérvese que los elementos diagonales sucesivos en L eran precisamente los recíprocos de los multiplicadores (figura 1).

Figura 1

$$L = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 0 & 0 \\ -3 & \textcircled{1} & 0 \\ 4 & -3 & \textcircled{7} \end{bmatrix}$$

Luego, obsérvese que para introducir ceros por abajo del 1 principal en el primer renglón se realizaron las siguientes operaciones:

sumar 3 veces el primer renglón al segundo renglón
sumar -4 veces el primer renglón al tercer renglón

y para introducir el cero por abajo del 1 principal en el segundo renglón se efectuó la siguiente operación

sumar 3 veces el segundo renglón al tercer renglón

Ahora se observa que en cada posición abajo de la diagonal principal de L (en tipo negro) el elemento es el *negativo* del multiplicador en la operación con que se introdujo el cero en esa posición en U (figura 2).

Figure 2

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \mathbf{-3} & 1 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} & 7 \end{bmatrix}$$

En resumen, se tiene el siguiente procedimiento para obtener una descomposición LU de una matriz cuadrada A, en el supuesto de que A se pueda reducir a la forma escalonada sin efectuar ningún intercambio de renglones.

Paso 1.	Reducir A a una forma escalonada U sin efectuar ningún intercambio de renglones y sin perder de vists los multiplicadores usados para introducir los unos principales y de los multiplicadores usados para introducir los ceros abajo de los unos principales.
Paso 2.	En cada posición a lo largo de la diagonal principal de L escribir el recíproco del multiplicador con que se introdujo el uno principal en esa posición de U.
Paso 3.	En cada posición por abajo de la diagonal principal de L escribir el negativo del multiplicador usado para introducir el cero en esa posición de U.
Paso 4.	Formar la descomposición $A = LU$.

Ejemplo 3 Encontrar una descomposición LU de

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución. Se empezará por reducir A a forma escalonada sin perder de vista a los multiplicadores.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \text{multiplicador} = \frac{1}{6} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \textcircled{0} & 2 & 1 \\ \textcircled{0} & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = -9 \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = -3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = \frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \textcircled{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = -8 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = 1 \end{matrix}$$

Aquí no se efectúa ninguna operación real, dado que en el tercer renglón ya existe un 1 principal.

Al construir L a partir de los multiplicadores se obtiene la descomposición LU.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Esta sección concluye con un breve análisis de dos preguntas fundamentales sobre las descomposiciones LU:

1. ¿Toda matriz cuadrada tiene una descomposición LU?
2. ¿Es posible que una matriz cuadrada tenga más de una descomposición LU?

Ya se sabe que si una matriz cuadrada A se puede reducir a la forma escalonada sin aplicar ningún intercambio de renglones, entonces A tiene una descomposición LU. En general, si para escribir A en forma escalonada se requiere intercambiar renglones, entonces no existe ninguna descomposición LU de A. Sin embargo, en esos casos es posible factorizar A en la forma

$$A = PLU$$

donde L es triangular inferior, U es triangular superior y P es la matriz que se obtiene al intercambiar los renglones de I_n de forma idónea (ver el ejercicio 17).

Cuando no hay restricciones adicionales, las descomposiciones LU no son únicas. Por ejemplo, si

$$A = LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y los elementos diagonales de L son diferentes de cero, entonces es posible desplazar los elementos diagonales del factor izquierdo al factor derecho escribiendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_{21}}{l_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{l_{31}}{l_{11}} & \frac{l_{32}}{l_{22}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_{21}}{l_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{l_{31}}{l_{11}} & \frac{l_{32}}{l_{22}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{22}u_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

que es otra descomposición triangular de A.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.9

1. Usar el método del ejemplo 1 y la descomposición LU

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$$

2. Usar el método del ejemplo 1 y la descomposición LU

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 \qquad + 6x_3 &= -22 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

En los ejercicios del 3 al 10, encontrar una descomposición LU de la matriz de coeficientes; luego, usar el método del ejemplo 1 para resolver el sistema

3. $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 19 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -3 & 12 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ -8 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 3 & 10 & -10 \\ -2 & -4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar una descomposición LU de A.
b) Expresar A en la forma $A = L_1DU_1$, donde L_1 es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal, U_1 es una matriz triangular superior y D es una matriz diagonal.
c) Expresar A en la forma $A = L_2U_2$, donde L_2 es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal y U_2 es una matriz triangular superior.

12. Demostrar que la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

no tiene descomposición LU.

13. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a) Demostrar: Si $A \neq 0$ entonces A tiene una descomposición LU única con unos en la diagonal principal de L.
b) Encontrar la descomposición LU descrita en el inciso a).

14. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, y supóngase que A es una matriz invertible que se puede escribir en forma escalonada sin efectuar ningún intercambio de renglones. ¿Cuántas adiciones y cuántas multiplicaciones son necesarias para resolver el sistema aplicando el método del ejemplo 1? [***Nota.*** Contar las sustracciones como adiciones y las divisiones como multiplicaciones.]

15. a) Demostrar: Si L_1 y L_2 son matrices triangulares inferiores $n \times n$, entonces también L_1L_2 es triangular inferior.

b) El resultado del inciso a) es un caso especial de un resultado general que establece que el producto de un número finito de matrices triangulares inferiores es triangular inferior. Usando este hecho, demostrar que la matriz L en (8) es triangular inferior. [***Sugerencia.*** Véase el ejercicio 27 de la sección 2.4.]

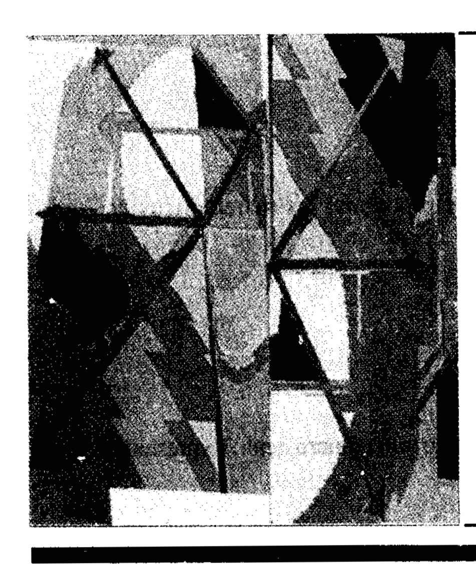
16. Usando el resultado del ejercicio 15b), demostrar que el producto de un número finito de matrices triangulares superiores es triangular superior. [***Sugerencia.*** Considerar las transpuestas.]

17. Demostrar: Si A es cualquier matriz $n \times n$, entonces A se puede factorizar como $A = PLU$, donde L es triangular inferior, U es triangular superior y P se puede obtener intercambiando en forma adecuada los renglones de I_n. [***Sugerencia.*** Sea U la forma escalonada de A y efectuar primero todos los intercambios de renglones necesarios en la reducción de A a U.]

18. Factorizar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

como $A = PLU$, donde P se obtiene a partir de I_3 al intercambiar de manera apropiada los renglones, L es triangular inferior y U es triangular superior.



CAPÍTULO **10**

ESPACIOS VECTORIALES COMPLEJOS

10.1 NÚMEROS COMPLEJOS

Hasta el momento sólo se han considerado espacios vectoriales para los cuales los escalares son números reales. Sin embargo, en muchas aplicaciones importantes de vectores es aconsejable dejar que los escalares sean números complejos. Un espacio vectorial que permite escalares complejos se denomina ***espacio vectorial complejo****, y uno que sólo permite escalares reales se denomina* ***espacio vectorial real****. Una ventaja de permitir escalares complejos es que todas las matrices con elementos escalares complejos tienen eigenvalores, lo cual no es cierto si solamente se permiten escalares reales. Por ejemplo, la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene al polinomio característico

$$det(\lambda I - A) = det\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

de modo que la ecuación característica, $\lambda^2 + 1 = 0$, no tiene soluciones reales y por tanto carece de eigenvalores.

En las tres primeras secciones de este capítulo se repasarán algunas de las propiedades básicas de los números complejos, y en secciones ulteriores se analizarán espacios vectoriales complejos.

NÚMEROS COMPLEJOS

Como $x^2 \geq 0$ para todo número real x, la ecuación

$$x^2 = -1$$

no tiene soluciones reales. Para manejar este problema, los matemáticos del siglo XVIII introdujeron el número "imaginario"

$$i = \sqrt{-1}$$

que se supone tiene la propiedad

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

pero que de otra forma podía considerarse como un número real. Expresiones de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales reciben el nombre de "números complejos", los cuales se operan según las reglas normales de la aritmética, con la propiedad adicional de que $i^2 = -1$.

A principios de siglo XIX se aceptaba que un número complejo

$$a + bi$$

se considerará como otro símbolo para el par ordenado

$$(a, b)$$

de números reales y que las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división se definieran sobre estos pares ordenados de modo que se cumplieran las leyes conocidas de la aritmética y además $i^2 = -1$. Este enfoque es el que se seguirá en el texto.

Definición. Un ***número complejo*** es un par ordenado de números reales, denotado por (a, b) o $a + bi$.

Ejemplo 1 A continuación se presentan algunos ejemplos de números complejos en ambas notaciones:

Par ordenado	Notación equivalente
$(3, 4)$	$3 + 4i$
$(-1, 2)$	$-1 + 2i$
$(0, 1)$	$0 + i$
$(2, 0)$	$2 + 0i$
$(4, -2)$	$4 + (-2)i$

Para facilitar las cosas, los tres últimos números complejos en general se abreviarán como

$$0 + i = i, \qquad 2 + 0i = 2, \qquad 4 + (-2)i = 4 - 2i \quad \Delta$$

Geométricamente, un número complejo se puede considerar como un punto o un vector en el plano xy (figura 1).

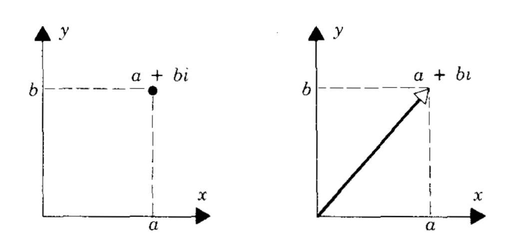


Figura 1 Un número complejo se puede considerar como un punto o un vector.

Ejemplo 2 En la figura $2a$ algunos números complejos se muestran como puntos y en la figura $2b$, como vectores. Δ

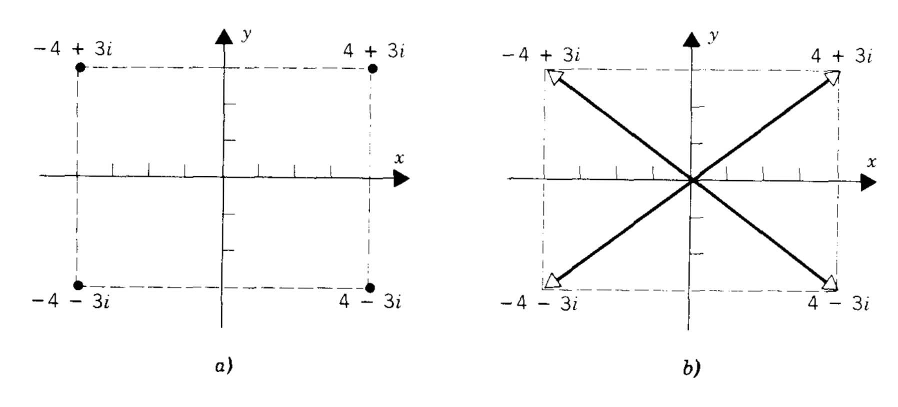


Figura 2

EL PLANO COMPLEJO

Algunas veces es conveniente usar una sola letra, como z, para denotar un número complejo. Así, se podría escribir

$$z = a + bi$$

El número real a se denomina ***parte real de z*** y el número real b, ***parte imaginaria de z***. Estos números se denotan por $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$, respectivamente. Por tanto,

$$\text{Re}(4 - 3i) = 4 \qquad \text{e} \qquad \text{Im}(4 - 3i) = -3$$

Cuando los números complejos se representan geométricamente en un sistema de coordenadas xy, el eje x, el eje y y el plano se denominan ***eje real***, ***eje imaginario*** y ***plano complejo***, respectivamente (figura 3).

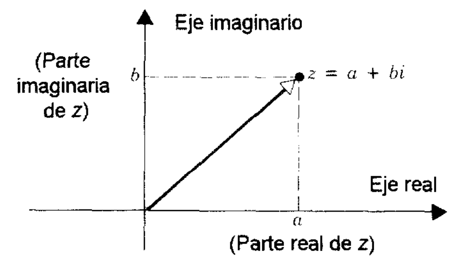


Figura 3

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS

Así como se define que dos vectores en R^2 son iguales si tienen las mismas componentes, también dos números complejos son iguales si tanto sus partes reales como sus partes imaginarias son iguales:

> **Definición.** Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales, lo que se escribe como
>
> $$a + bi = c + di,$$
>
> si $a = c$ y $b = d$.

Si $b = 0$, entonces el número complejo $a + bi$ se reduce a $a + 0i$, que se escribe simplemente como a. Así, para cualquier número real a,

$$a = a + 0i$$

de modo que los números reales se pueden considerar como números complejos cuya parte imaginaria es cero. Geométricamente, los números reales corresponden a puntos sobre el eje real. Si se tiene $a = 0$, entonces $a + bi$ se reduce a $0 + bi$, que en general se escribe como bi. Estos números complejos, que corresponden a puntos sobre el eje imaginario, se denominan ***números imaginarios puros***.

Así como la adición de vectores en R^2 se realiza sumando las componentes correspondientes de los vectores, también la adición de números complejos se realiza sumando las partes y las imaginarias:

$$\boxed{(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i} \tag{1}$$

Las operaciones de sustracción y multiplicación por un número *real* también son semejantes a las operaciones vectoriales correspondientes en R^2:

$$\boxed{(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i} \tag{2}$$

$$\boxed{k(a + bi) = (ka) + (kb)i, \qquad k \text{ real}} \tag{3}$$

Debido a que las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de un número complejo por un número real son semejantes a las operaciones correspon-

dientes para vectores en R^2, las interpretaciones geométricas conocidas de estas operaciones se cumplen para números complejos (figura 4).

Por la expresión (3) se deduce que $(-1)z + z = 0$ (comprobar), de modo que $(-1)z$ se denota por $-z$ y se denomina ***negativo de z***.

Ejemplo 3 Si $z_1 = 4 - 5i$ y $z_2 = -1 + 6i$, encontrar $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $3z_1$ y $-z_2$.

Solución.

$$z_1 + z_2 = (4 - 5i) + (-1 + 6i) = (4 - 1) + (-5 + 6)i = 3 + i$$
$$z_1 - z_2 = (4 - 5i) - (-1 + 6i) = (4 + 1) + (-5 - 6)i = 5 - 11i$$
$$3z_1 = 3(4 - 5i) = 12 - 15i$$
$$-z_2 = (-1)z_2 = (-1)(-1 + 6i) = 1 - 6i \quad \Delta$$

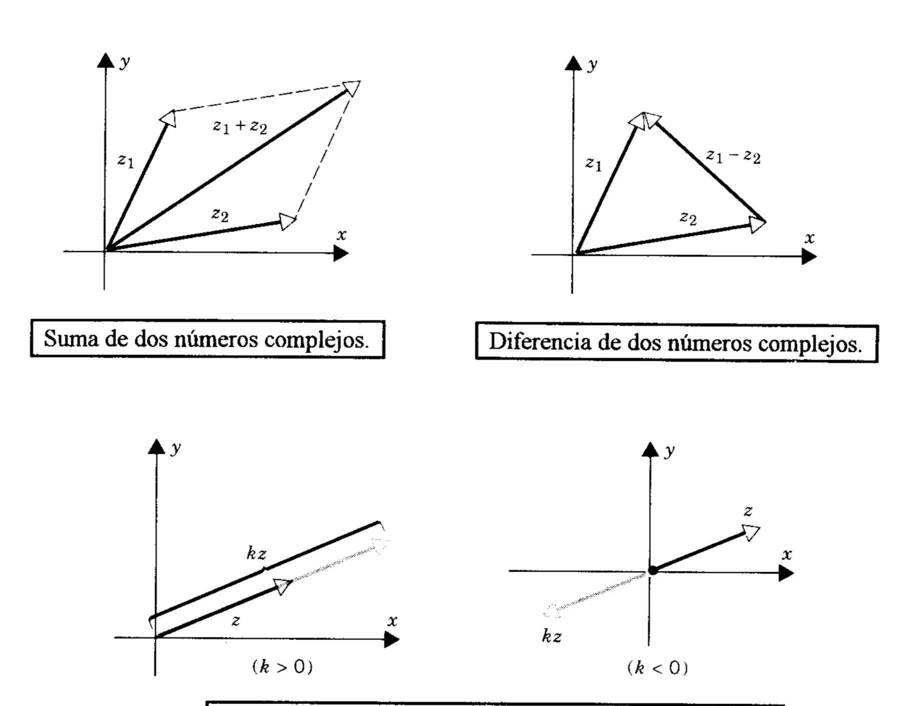


Figura 4 Producto de un números complejo z y un número real k.

Hasta ahora se ha encontrado un paralelismo entre los números complejos y los vectores en R^2. Sin embargo, a continuación se definirá la multiplicación de números complejos, una operación que no tiene análogo vectorial en R^2. Para originar la definición, se desarrollará el producto

$$(a + bi)(c + di)$$

siguiendo las reglas algebraicas de costumbre, pero considerando a i^2 como -1. Así, se obtiene

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + bdi^2 + adi + bci \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

lo cual sugiere la siguiente *definición*:

$$\boxed{(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i} \tag{4}$$

Ejemplo 4

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(4 + 5i) &= (3 \cdot 4 - 2 \cdot 5) + (3 \cdot 5 + 2 \cdot 4)i \\ &= 2 + 23i \\ (4 - i)(2 - 3i) &= [4 \cdot 2 - (-1)(-3)] + [(4)(-3) + (-1)(2)]i \\ &= 5 - 14i \\ i^2 = (0 + i)(0 + i) &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1 \quad \Delta\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio comprobar las siguientes reglas de aritmética compleja:

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \\ z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1(z_2 z_3) &= (z_1 z_2) z_3 \\ z_1(z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ 0 + z &= z \\ z + (-z) &= 0 \\ 1 \cdot z &= z\end{aligned}$$

Estas reglas permiten multiplicar números complejos sin necesidad de aplicar directamente la fórmula (4). Siguiendo el procedimiento usado para originar esta fórmula, basta multiplicar cada término de $a + bi$ por cada término de $c + di$, hacer $i^2 = -1$ y simplificar.

Ejemplo 5

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(4 + i) &= 12 + 3i + 8i + 2i^2 = 12 + 11i - 2 = 10 + 11i \\ (5 - \tfrac{1}{2}i)(2 + 3i) &= 10 + 15i - i - \tfrac{3}{2}i^2 = 10 + 14i + \tfrac{3}{2} = \tfrac{23}{2} + 14i \\ i(1 + i)(1 - 2i) &= i(1 - 2i + i - 2i^2) = i(3 - i) = 3i - i^2 = 1 + 3i \quad \Delta\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. A diferencia de los números reales, en los números complejos no existe ordenamiento según el tamaño. Así, los símbolos de orden $<$, $\leq$, $>$ y no se usan con números complejos.

Ahora que ya se han definido la adición, la sustracción y la multiplicación de números complejos, es posible sumar, restar y multiplicar matrices con elementos complejos y multiplicar una matriz por un número complejo. Sin entrar en detalles, se observa que las operaciones y terminología matriciales analizadas en el capítulo 1 se cumplen sin ningún cambio para matrices con elementos complejos.

Ejemplo 6 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 4-i \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ 2-3i & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i \\ 3-2i & 8-i \end{bmatrix}, \qquad A-B = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1+4i & -i \end{bmatrix}$$

$$iA = \begin{bmatrix} i & -i^2 \\ i+i^2 & 4i-i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1+i & 1+4i \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 4-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1-i \\ 2-3i & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot i+(-i)\cdot(2-3i) & 1\cdot(1-i)+(-i)\cdot 4 \\ (1+i)\cdot i+(4-i)\cdot(2-3i) & (1+i)\cdot(1-i)+(4-i)\cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3-i & 1-5i \\ 4-13i & 18-4i \end{bmatrix} \quad \Delta$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.1

1. En cada inciso, graficar el punto y trazar el vector que corresponde al número complejo dado.

a) $2+3i$. b) -4. c) $-3-2i$. d) $-5i$.

2. Expresar cada número complejo del ejercicio 1 como un par ordenado de números reales.

3. En cada inciso, usar la información proporcionada para encontrar los números reales x y y.

a) $x - iy = -2 + 3i$ b) $(x+y) + (x-y)i = 3 + i$

4. Dado que $z_1 = 1 - 2i$ y $z_2 = 4 + 5i$, encontrar

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $4z_1$ d) $-z_2$ e) $3z_1 + 4z_2$ f) $\frac{1}{2}z_1 - \frac{3}{2}z_2$

5. En cada inciso, resolver para z.

a) $z + (1-i) = 3 + 2i$ b) $-5z = 5 + 10i$ c) $(i-z) + (2z-3i) = -2 + 7i$

6. En cada inciso, trazar los vectores z_1, z_2, $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$.
a) $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 1 + 4i$ b) $z_1 = -2 + 2i,\ z_2 = 4 + 5i$

7. En cada inciso, trazar los vectores z y kz.
a) $z = 1 + i,\ k = 2$ b) $z = -3 - 4i,\ k = -2$ c) $z = 4 + 6i,\ k = \frac{1}{2}$

8. En cada inciso, encontrar los números reales k_1 y k_2 que satisfagan la ecuación
a) $k_1 i + k_2(1 + i) = 3 - 2i$ b) $k_1(2 + 3i) + k_2(1 - 4i) = 7 + 5i$

9. En cada inciso, encontrar $z_1 z_2$, z_1^2 y z_2^2.
a) $z_1 = 3i,\ z_2 = 1 - i$ b) $z_1 = 4 + 6i,\ z_2 = 2 - 3i$ c) $z_1 = \frac{1}{3}(2 + 4i),\ z_2 = \frac{1}{2}(1 - 5i)$

10. Dado que $z_1 = 2 - 5i$ y $z_2 = -1 - i$, encontrar
a) $z_1 - z_1 z_2$ b) $(z_1 + 3z_2)^2$ c) $[z_1 + (1 + z_2)]^2$ d) $iz_2 - z_1^2$

En los ejercicios del 11 al 18, efectuar los cálculos y expresar el resultado en la forma $a + bi$.

11. $(1 + 2i)(4 - 6i)^2$

12. $(2 - i)(3 + i)(4 - 2i)$

13. $(1 - 3i)^3$

14. $i(1 + 7i) - 3i(4 + 2i)$

15. $[(2 + i)(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i)]^2$

16. $(\sqrt{2} + i) - i\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}i)$

17. $(1 + i + i^2 + i^3)^{100}$

18. $(3 - 2i)^2 - (3 + 2i)^2$

19. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 + i \\ 3 - i & 4 \end{bmatrix}$$

Encontrar
a) $A + 3iB$ b) BA c) AB d) $B^2 - A^2$

20. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 + 2i & 0 \\ -i & 2 \\ 1 + i & 1 - i \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -1 - i & 0 & -i \\ 3 & 2i & -5 \end{bmatrix}$$

Encontrar
a) $A(BC)$ b) $(BC)A$ c) $(CA)B^2$ d) $(1 + i)(AB) + (3 - 4i)A$

21. Demostrar que
a) $\text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$. b) $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$.

22. En cada inciso, resolver la ecuación aplicando la fórmula cuadrática y comprobar los resultados sustituyendo las soluciones en la ecuación dada.

a) $z^2 + 2z + 2 = 0$ b) $z^2 - z + 1 = 0$

23. a) Demostrar que si n es un entero positivo, entonces los únicos valores posibles de i^n son $1, -1, i$ y $-i$.

b) Encontrar i^{2509}. [***Sugerencia.*** El valor de i^n se puede determinar a partir del residuo cuando n se divide entre 4.]

24. Demostrar: Si $z_1 z_2 = 0$, entonces $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$.

25. Usar el resultado del ejercicio 24 para demostrar lo siguiente: Si $zz_1 = zz_2$ y $z \neq 0$, entonces $z_1 = z_2$.

26. Demostrar que para los números complejos z_1, z_2 y z_3

a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ b) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

27. Demostrar que para los números complejos z_1, z_2 y z_3

a) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ b) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$

28. Demostrar que $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ para los números complejos z_1, z_2 y z_3.

29. En mecánica cuántica, las ***matrices de Dirac**** son

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que $\beta^2 = \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = I$.

b) Dos matrices A y B se denominan ***anticonmutativas*** si $AB = -BA$. Demostrar que dos matrices de Dirac cualesquiera son anticonmutativas.

Paul Adrien Maurice Dirac* **(1902-1984) físico teórico inglés que instrumentó una nueva forma de mecánica cuántica y una teoría que predijo el "espín" de electrón y la existencia de una partícula atómica fundamental denominada positrón. En 1933 fue galardonado con el premio Nobel de física y en 1939, con la medalla de oro de la Royal Society.

10.2 MÓDULO; CONJUGADO COMPLEJO; DIVISIÓN

El objetivo principal en esta sección es definir la división de números complejos.

CONJUGADOS COMPLEJOS

Se empezará con algunas ideas preliminares.

$z = a + bi$ es cualquier número complejo, entonces el ***conjugado de z***, denotado por $\bar{z}$, (que se lee como "z barra"), se define como

$$\bar{z} = a - bi$$

En palabras, $\bar{z}$ se obtiene invirtiendo el signo de la parte imaginaria de z. Geométricamente, $\bar{z}$ es la reflexión de z con respecto al eje real (figura 1).

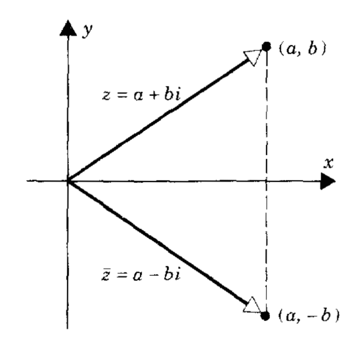


Figura 1 Conjugado de un número complejo.

Ejemplo 1

$$\begin{array}{ll} z = 3 + 2i & \bar{z} = 3 - 2i \\ z = -4 - 2i & \bar{z} = -4 + 2i \\ z = i & \bar{z} = -i \\ z = 4 & z = 4 \quad \Delta \end{array}$$

OBSERVACIÓN. El último renglón del ejemplo 1 ilustra el hecho de que un número real es igual a su conjugado. Para ser precisos, se puede demostrar (ejercicio 22) que $z = \bar{z}$ si y sólo si z es un número real.

Si un número complejo z se considera como un vector en R^2, entonces la norma o longitud de vector se denomina módulo (o *valor absoluto*) de z. En pocas palabras:

MÓDULO

Definición. El ***módulo*** de un número complejo $z = a + bi$, denotado por $|z|$, se define como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1)$$

Si $b = 0$, entonces $z = a$ es un número real, y

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$

de modo que el módulo de un número real es simplemente su valor absoluto. Así, el módulo de z también se llama ***valor absoluto*** de z.

Ejemplo 2 Encontrar z si $|z| = 3 - 4i$.

Solución. Por (1) con $a = 3$ y $b = -4$, $|z| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. Δ

El siguiente teorema establece una relación básica entre $\bar{z}$ y $|z|$.

Teorema 10.2.1. *Para cualquier número complejo z,*

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$$

Demostración. Si $z = a + bi$, entonces

$$\begin{aligned} z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) &= a^2 - abi + bai - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2 \ \square \end{aligned}$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

A continuación se abordará la división de números complejos. El objetivo es definir la división como la inversa de la multiplicación. Así, si $z_2 \neq 0$, entonces la definición de $z = z_1/z_2$ debe ser tal que

$$z_1 = z_2 z \tag{2}$$

El procedimiento será demostrar que (2) tiene una solución única para z si $z_2 \neq 0$, y luego z_1/z_2 se definirá como este valor de z. Igual que con los números reales, no se permite la división entre cero.

Teorema 10.2.2. *Si $z_2 \neq 0$, entonces la ecuación (2) tiene una solución única, que es*

$$z = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2 \tag{3}$$

Demostración. Sean $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. Entonces (2) se puede escribir como

$$x_1 + iy_1 = (x_2 + iy_2)(x + iy)$$

o bien

$$x_1 + iy_1 = (x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y)$$

o bien, igualando las partes reales e imaginarias,

$$\begin{aligned} x_2x - y_2y &= x_1 \\ y_2x + x_2y &= y_1 \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Como $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, se concluye que x_2 y y_2 no son cero a la vez, de modo que

$$\begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = x_2^2 + y_2^2 \neq 0$$

Así, por la regla de Cramer (teorema 2.4.3), el sistema (4) tiene la solución única.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|z_2|^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{|z_2|^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \frac{1}{|z_2|^2}\left[(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)\right] \\ &= \frac{1}{|z_2|^2}(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= \frac{1}{|z_2|^2} z_1\bar{z}_2 \quad \square \end{aligned}$$

Así, para $z_2 \neq 0$ se define

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1\bar{z}_2} \tag{5}$$

OBSERVACIÓN. Para recordar esta fórmula, multiplicar por $\bar{z}_2$ el numerador y el denominador de z_1/z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1\bar{z}_2$$

Ejemplo 3 Expresar

$$\frac{3+4i}{1-2i}$$

en la forma $a + bi$.

Solución. Por (5), con $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 1 - 2i$,

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{1}{|1-2i|^2}(3+4i)(\overline{1-2i}) = \frac{1}{5}(3+4i)(1+2i)$$
$$= \frac{1}{5}(-5+10i) = -1+2i$$

Otra solución. Así como en la observación precedente, el numerador y el denominador se multiplican por el conjugado del denominador:

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{3+4i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i \quad \Delta$$

Los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes complejos se presentan en varias aplicaciones. Sin entrar en detalles, se observa que los resultados sobre sistemas lineales estudiados en los capítulos 1 y 2 se cumplen sin cambio para sistemas con coeficientes complejos.

Ejemplo 4 Aplicando la regla de Cramer, resolver

$$ix + 2y = 1 - 2i$$
$$4x - iy = -1 + 3i$$

Solución.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2i & 2 \\ -1+3i & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 2 \\ 4 & -i \end{vmatrix}} = \frac{(-i)(1-2i) - 2(-1+3i)}{i(-i) - 2(4)} = \frac{-7i}{-7} = i$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} i & 1-2i \\ 4 & -1+3i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 2 \\ 4 & -i \end{vmatrix}} = \frac{(i)(-1+3i)-4(1-2i)}{i(-i)-2(4)} = \frac{-7+7i}{-7} = 1-i$$

Así, la solución es $x = i, y = 1 - i$. Δ

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Esta sección concluye con la enumeración de algunas propiedades del conjugado complejo que serán de utilidad en secciones ulteriores.

Teorema 10.2.3. *Para números complejos cualesquiera z, z_1 y z_2*

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
b) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
c) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
d) $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$
e) $\bar{\bar{z}} = z$

Se demostrará el inciso *a*) y lo demás se deja como ejercicio.

Demostración de a). Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$; entonces

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \square \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Es posible ampliar el inciso *a*) del teorema 10.2.3 a n términos y el inciso *c*) a n factores. En pocas palabras,

$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$$
$$\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.2

1. En cada inciso hallar $\bar{z}$.

a) $z = 2 + 7i$ b) $z = -3 - 5i$ c) $z = 5i$ d) $z = -i$ e) $z = -9$ f) $z = 0$

2. En cada inciso encontrar $|z|$.

a) $z = i$ b) $z = -7i$ c) $z = -3 - 4i$ d) $z = 1 + i$ e) $z = -8$ f) $z = 0$

3. Comprobar que $z\bar{z} = |z|^2$ para

a) $z = 2 - 4i$ b) $z = -3 + 5i$ c) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

4. Dado que $z_1 = 1 - 5i$ y $z_2 = 3 + 4i$, encontrar

a) z_1/z_2 b) $\bar{z}_1/z_2$ c) $z_1/\bar{z}_2$ d) $\overline{(z_1/z_2)}$ e) $z_1/|z_2|$ f) $|z_1/z_2|$

5. En cada inciso, encontrar $1/z$.

a) $z = i$ b) $z = 1 - 5i$ c) $z = \dfrac{-i}{7}$

6. Dado que $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 1 - 2i$, encontrar

a) $z_1 - \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ b) $\dfrac{z_1 - 1}{z_2}$ c) $z_1^2 - \left(\dfrac{iz_1}{z_2}\right)$ d) $\dfrac{z_1}{iz_2}$

En los ejercicios del 7 al 14, realizar los cálculos y expresar el resultado en la forma $a + bi$.

7. $\dfrac{i}{1+i}$ **8.** $\dfrac{2}{(1-i)(3+i)}$ **9.** $\dfrac{1}{(3+4i)^2}$

10. $\dfrac{2+i}{i(-3+4i)}$ **11.** $\dfrac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$ **12.** $\dfrac{1}{i(3-2i)(1+i)}$

13. $\dfrac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$ **14.** $\dfrac{1-2i}{3+4i} - \dfrac{2+i}{5i}$

15. En cada inciso, resolver para z.

a) $iz = 2 - i$ b) $(4 - 3i)\bar{z} = i$

16. Aplicar el teorema 10.2.3 para demostrar las siguientes identidades:

a) $\overline{\bar{z} + 5i} = z - 5i$ b) $\overline{iz} = -i\bar{z}$ c) $\dfrac{\overline{i + \bar{z}}}{i - z} = -1$

17. En cada inciso, trazar el conjunto de puntos en el plano complejo que satisfacen la ecuación.

a) $|z| = 2$ b) $|z - (1 + i)| = 1$ c) $|z - i| = |z + i|$ d) $\text{Im}(\bar{z} + i) = 3$

18. En cada inciso, trazar el conjunto de puntos en el plano complejo que satisfacen la(s) condición (condiciones) dada(s).

a) $|z + i| \leq 1$ b) $1 < |z| < 2$ c) $|2z - 4i| < 1$ d) $|z| \leq |z + i|$

19. Dado que $z = x + iy$, encontrar

a) $\text{Re}(\overline{iz})$ b) $\text{Im}(\overline{iz})$ c) $\text{Re}(i\bar{z})$ d) $\text{Im}(i\bar{z})$

20. a) Demostrar que si n es un entero positivo, entonces los únicos valores posibles de $(1/i)^n$ son 1, -1, i y $-i$.

b) Calcular $(1/i)^{2509}$. [**Sugerencia**. Véase el ejercicio 23(b) de la sección 10.1.]

21. Demostrar:

a) $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \text{Re}(z)$ b) $\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \text{Im}(z)$

22. Demostrar: $z = \bar{z}$ si y sólo si z es un número real.

23. Dado que $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, encontrar

a) $\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ b) $\text{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

24. Demostrar: Si $(\bar{z})^2 = z^2$, entonces z es real o imaginario puro.

25. Demostrar que $|z| = |\bar{z}|$.

26. Demostrar:

a) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ c) $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ d) $\bar{\bar{z}} = z$

27. a) Demostrar que $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$.

b) Demostrar que si n es un entero positivo, entonces $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

c) ¿Es verdadero el resultado del inciso b) si n es un entero negativo? Explicar la respuesta.

En los ejercicios del 28 al 31, resolver el sistema de ecuaciones lineales aplicando la regla de Cramer.

28. $ix_1 - ix_2 = -2$
$2x_1 + x_2 = i$

29. $x_1 + x_2 = 2$
$x_1 - x_2 = 2i$

30. $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$x_1 + x_2 - x_3 = 2 + 2i$
$x_1 - x_2 + x_3 = -1$

31. $ix_1 + 3x_2 + (1+i)x_3 = -i$
$x_1 + ix_2 + 3x_3 = -2i$
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

En los ejercicios 32 y 33, resolver el sistema de ecuaciones lineales por eliminación de Gauss-Jordan.

32. $\begin{bmatrix} -1 & -1-i \\ -1+i & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

34. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 - ix_3 &= 0 \\ -x_1 + (1-i)x_2 + 2ix_3 &= 0 \\ 2x_1 + (-1+2i)x_2 - 3ix_3 &= 0 \end{aligned}$$

35. En cada inciso, aplicar la fórmula del teorema 1.4.5 para calcular la inversa de la matriz y comprobar el resultado demostrando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

a) $A = \begin{bmatrix} i & -2 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

36. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ un polinomio en el que los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son reales. Demostrar que si z es una solución de la ecuación $p(x) = 0$, entonces también $\bar{z}$ lo es.

37. Demostrar: Para cualquier número complejo z, $|\text{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\text{Im}(z)| \leq |z|$.

38. Demostrar que

$$\frac{|\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z|$$

[***Sugerencia.*** Sea $z = x + iy$ y aplicar el hecho de que $(|x| - |y|)^2 \geq 0$.]

39. En cada inciso aplicar el método del ejemplo 4 de la sección 1.5 para encontrar A^{-1} y comprobar el resultado demostrando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ -i & 1-2i & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1-4i \\ 2-i & i & 3 \end{bmatrix}$

10.3 FORMA POLAR; TEOREMA DE DE MOIVRE

En esta sección se analizará una forma para representar números complejos usando propiedades trigonométricas. El trabajo efectuado conducirá a una fórmula fundamental para potencias de números complejos y a un método para encontrar raíces n-ésimas de números complejos.

FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si $z = x + iy$ es un número complejo diferente de cero, $r = |z|$ y θ mide el ángulo entre el eje real positivo y el vector z, entonces, como se sugiere en la figura 1,

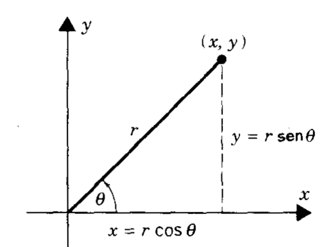


Figura 1

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}} \tag{1}$$

de modo que $z = x + iy$ se puede escribir como

$$z = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta$$

o bien, como

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} \tag{2}$$

Esta expresión se denomina ***forma polar de z***.

ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El ángulo θ se denomina ***argumento de z*** y se denota por

$$\theta = \arg z$$

El argumento de z no está determinado de manera única porque se puede sumar o restar a θ cualquier múltiplo de 2π para obtener otro valor del argumento. Sin embargo, sólo existe un valor del argumento en radianes que satisface

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Esta expresión se llama ***argumento principal de z*** y se denota por

$$\theta = \operatorname{Arg} z$$

Ejemplo 1 Expresar los siguientes números complejos en forma polar usando sus argumentos principales:

(a) $z = 1 + \sqrt{3}i$ b) $z = -1 - i$

Solución de a). El valor de r es

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

y como $x = 1$ y $y = \sqrt{3}$, por (1) se infiere que

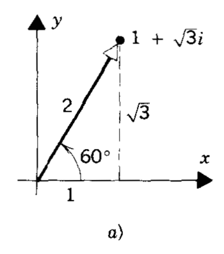
$$\begin{aligned} 1 &= 2\cos\theta \\ \sqrt{3} &= 2\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

así, $\cos\theta = 1/2$ y $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$. El único valor de θ que satisface estas relaciones y cumple el requisito $-\pi < \theta \leq \pi$ es $\theta = \pi/3$ (= 60°) (véase la figura 2*a*). Entonces, una forma polar de z es

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Solución de b). El valor de r es

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$



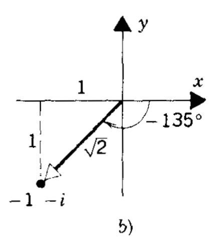


Figura 2 *a*) *b*)

y como $x = -1$ y $y = -1$, por (1) se deduce que

$$-1 = \sqrt{2}\cos\theta$$
$$-1 = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$$

de modo que $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = -1/\sqrt{2}$. El único valor de que satisface estas relaciones y cumple el requisito $-\pi < \theta \leq \pi$ es $\theta = -3\pi/4$ (= −135°) (figura 2*b*). Por tanto, una forma polar de z es

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{-3\pi}{4}\right) \quad \Delta$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN

A continuación se mostrará cómo se pueden usar las formas polares para obtener interpretaciones geométricas de la multiplicación y la división de números complejos. Sean

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$$

Multiplicando, se obtiene

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)]$$

Recordando las identidades trigonométricas

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$
$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$

Se obtiene

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]} \tag{3}$$

que es una forma polar del número complejo con módulo $r_1 r_2$ y argumento $\theta_1 + \theta_2$. Así, se ha demostrado que

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \tag{4}$$

y

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

(¿Por qué?)

En palabras, *el producto de dos números complejos se obtiene al multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos* (figura 3).

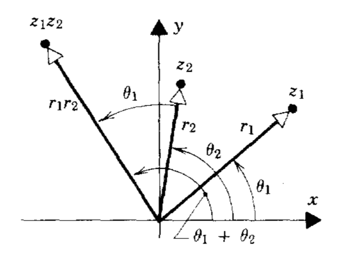


Figura 3 Producto de dos números complejos.

Se deja como ejercicio demostrar que si $z_2 \neq 0$, entonces

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]} \tag{5}$$

a partir de lo cual se concluye que

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \text{si } z_2 \neq 0$$

y

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

En palabras, el cociente de dos números complejos se obtiene al dividir sus módulos y restar sus argumentos (en el orden adecuado).

Ejemplo 2 Sean

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i \qquad \text{y} \qquad z_2 = \sqrt{3} + i$$

Las formas polares de estos números complejos son

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$$

(comprobar), de modo que por (3)

$$z_1z_2 = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 4\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right] = 4[0 + i] = 4i$$

y por (5)

$$\frac{z_1}{z_2} = 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Como comprobación, z_1z_2 y z_1/z_2 se calcularán directamente sin usar las formas polares de z_1 y z_2:

$$z_1z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = (\sqrt{3} - \sqrt{3}) + (3 + 1)i = 4i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{3}) + (-i + 3i)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

lo cual concuerda con el resultado previo. Δ

El número complejo i tiene módulo 1 y argumento $\pi/2$ = (90°), por tanto, el producto iz tiene el mismo módulo que z, pero su argumento es 90° mayor que el de z. En resumen, *al multiplicar z por i gira en sentido contrario a las manecillas del reloj por un ángulo de* 90° (figura 4).

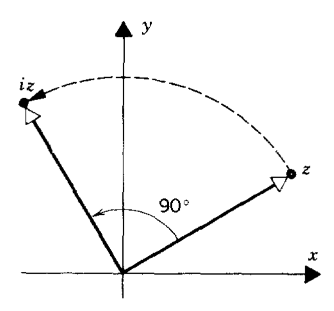


Figura 4 Al multiplicar por i, z gira 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj.

FÓRMULA DE DE MOIVRE

Si n es un entero positivo y $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, entonces por la fórmula (3),

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ factores}} = r^n[\cos(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ términos}}) + i \operatorname{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ términos}})]$$

o bien,

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)} \qquad (6)$$

Además, si $z \neq 0$, se define $z^{-n} = 1/z^n$.

En el caso especial en que $r = 1$, se tiene $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, de modo que (6) se convierte en

$$\boxed{(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} \qquad (7)$$

expresión que se denomina ***fórmula de De Moivre****. Aunque (7) se obtuvo suponiendo que n es un entero positivo, en los ejercicios se demostrará que esta fórmula es válida para todos los enteros n.

****Abraham De Moivre*** **(1667-1754)** matemático francés que realizó importantes contribuciones a probabilidad, estadística y trigonometría. Desarrolló el concepto de eventos estadísticamente independientes, escribió un tratado fundamental sobre probabilidad y ayudó a transformar la trigonometría de una rama de la geometría a una rama del análisis a través del empleo de los números complejos. A pesar de su importante trabajo, a duras penas se las arreglaba para vivir como tutor y asesor sobre juegos y seguros.

DETERMINACIÓN DE LAS RAICES *n*-ÉSIMAS

A continuación se mostrará cómo usar la fórmula de De Moivre para obtener raíces de números complejos. Si n es un entero positivo y si z es cualquier número complejo, entonces la ***raíz n-ésima de z*** se define como cualquier número complejo w que cumple la ecuación

$$w^n = z \tag{8}$$

Una raíz n-ésima de z se denota por $z^{1/n}$. Si $z \neq 0$, entonces las fórmulas para las raíces n-ésimas de z se pueden obtener como sigue. Sean

$$w = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \qquad \text{y} \qquad z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Si se supone que w satisface (8), entonces por (7) se concluye que

$$\rho^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \tag{9}$$

Al comparar los módulos de los dos miembros se observa que $\rho^n = r$ o bien, que

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

donde $\sqrt[n]{r}$ denota la n-ésima raíz real positiva de r. Además, para que en (9) se cumplan las igualdades $\cos n\alpha = \cos \theta$ y $\operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen} \theta$, los ángulos $n\alpha$ y θ deben ser iguales o diferir por un múltiplo de 2π. Es decir,

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

o

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Así, los valores de $w = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ que satisfacen (8) están dados por

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Aunque hay muchos valores de k, se puede demostrar (ejercicio 16) que $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ producen valores distintos de w que satisfacen (8), y que todas las demás elecciones de k producen réplicas de esos valores. En consecuencia, existen exactamente n diferentes raíces n-ésimas de $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, y están dadas por

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{10}$$

Ejemplo 3 Encontrar las raíces cúbicas de -8.

Solución. Como -8 está sobre el eje real negativo se puede usar $\theta = \pi$ como argumento. Además, $r = |z| = |-8| = 8$, de modo que una forma polar de -8 es

$$-8 = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$$

Por (10) con $n = 3$ se deduce que

$$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2$$

Así, las raíces cúbicas de -8 son

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$
$$2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = 2(-1) = -2$$
$$2 \cos\left(\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i \quad \Delta$$

Como se muestra en la figura 5, las tres raíces cúbicas de -8 obtenidas en el ejemplo 3 son equidistantes, ya que están separadas por una distancia de $\pi/3$ radianes (= 120°) sobre la circunferencia de radio 2 con centro en el origen. Este hecho no es fortuito. En general, por la fórmula (10) se concluye que las raíces n-ésimas de z están sobre la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}\,(=\sqrt[n]{|z|})$ y son equidistantes, separadas por una distancia de $2\pi/n$ radianes. (¿Puede el lector darse cuenta de por qué esto es así?) Así, una vez que se ha determinado una raíz n-ésima de z, las demás $n - 1$ raíces se pueden generar si esta raíz se hace girar sucesivamente en incrementos de $2\pi/n$ radianes.

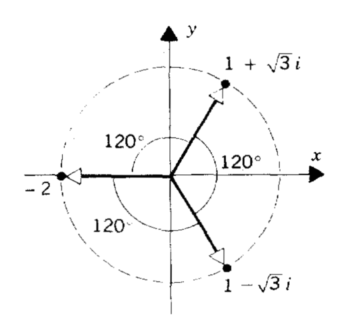


Figura 5 Las raíces cúbicas de -8.

Ejemplo 4 Encontrar las raíces cuartas de 1.

Solución. Se podría aplicar la fórmula (10). En vez de ello, se observa que $w = 1$ es una raíz cuarta de 1, de modo que las tres raíces restantes se pueden generar si esta raíz se hace girar en incrementos de $2\pi/4 = \pi/2$ radianes (= 90°). En la figura 6 se observa que las raíces cuartas de 1 son

$$1, i, -1, -i \qquad \Delta$$

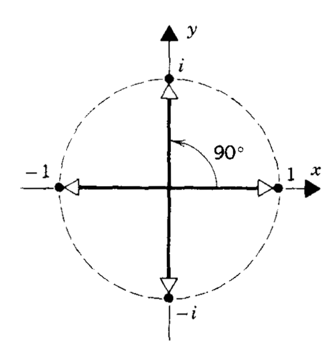


Figura 6 Las raíces cuartas de 1.

EXPONENTES COMPLEJOS

Esta sección concluye con algunos comentarios sobre notación.

En estudios más detallados de números complejos se definen los exponentes complejos y se demuestra que

$$\boxed{\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta}} \tag{11}$$

donde e es un número real irracional definido aproximadamente por $e \approx 2.71828\ldots$ (Para quienes ya estudiaron Cálculo, en el ejercicio 18 se proporciona una demostración de este hecho.)

Por la expresión (11) se concluye que la forma polar

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

se puede escribir de manera más breve como

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \tag{12}$$

Ejemplo 5 En el ejemplo 1 se demostró que

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

Por (12), la expresión anterior también puede escribirse como

$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3} \quad \Delta$$

Es posible demostrar que los exponentes complejos obedecen las mismas reglas que los exponentes reales, de modo que si

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

son números complejos diferentes de cero, entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 - i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Pero estas son justamente las fórmulas (3) y (5) escritas en otra notación.

Por último, se obtendrá una fórmula útil para expresar $\bar{z}$ en notación polar. Si

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\,\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

entonces

$$\bar{z} = r(\cos\,\theta - i\,\text{sen}\,\theta) \tag{13}$$

Recordando las identidades trigonométricas

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(-\theta) = \cos\,\theta$$

la expresión (13) se puede volver a escribir como

$$\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)] = re^{i(-\theta)}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\boxed{\bar{z} = re^{-i\theta}} \tag{14}$$

En el caso especial en que $r = 1$, la forma polar de z es $z = e^{i\theta}$, y (14) produce la fórmula

$$\boxed{\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}} \tag{15}$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.3

1. En cada inciso, encontrar el argumento principal de z.

a) $z = 1$ b) $z = i$ c) $z = -i$ d) $z = 1 + i$ e) $z = -1 + \sqrt{3}i$ f) $z = 1 - i$

2. En cada inciso hallar el valor de $\theta = \arg(1 - \sqrt{3}i)$ que satisface la condición dada.

a) $0 < \theta \leq 2\pi$ b) $-\pi < \theta \leq \pi$ c) $-\dfrac{\pi}{6} \leq \theta < \dfrac{11\pi}{6}$

3. En cada inciso expresar el número complejo en forma polar usando su argumento principal.

a) $2i$ b) -4 c) $5 + 5i$ d) $-6 + 6\sqrt{3}i$ e) $-3 - 3i$ f) $2\sqrt{3} - 2i$

4. Dado que $z_1 = 2(\cos \pi/4 + i \text{ sen } \pi/4)$ y $z_2 = 3(\cos \pi/6 + i \text{ sen } \pi/6)$ obtener una forma polar de

a) $z_1 z_2$ b) $\dfrac{z_1}{z_2}$ c) $\dfrac{z_2}{z_1}$ d) $\dfrac{z_1^5}{z_2^2}$

5. Expresar $z_1 = i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ y $z_3 = \sqrt{3} + i$ en forma polar y aplicar los resultados para encontrar $z_1 z_2 / z_3$. Comprobar los resultados efectuando los cálculos sin usar formas polares.

6. Usar la fórmula (6) para hallar

a) $(1 + i)^{12}$ b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-6}$ c) $(\sqrt{3} + i)^7$ d) $(1 - i\sqrt{3})^{-10}$

7. En cada inciso, encontrar todas las raíces y trazarlas como vectores en el plano complejo.

a) $(-i)^{1/2}$ b) $(1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$ c) $(-27)^{1/3}$ d) $(i)^{1/3}$ e) $(-1)^{1/4}$ f) $(-8 + 8\sqrt{3}i)^{1/4}$

8. Usar el método del ejemplo 4 para encontrar todas las raíces cúbicas de 1.

9. Usar el método del ejemplo 4 para hallar las raíces sextas de 1.

10. Obtener las raíces cuadradas de $1 + i$ y expresar los resultados en forma polar.

11. En cada inciso encontrar las soluciones de la ecuación.

a) $z^4 - 16 = 0$ b) $z^{4/3} = -4$

12. Calcular cuatro soluciones de la ecuación $z^4 + 8 = 0$ y con los resultados, factorizar $z^4 + 8$ en dos factores cuadráticos con coeficientes reales.

13. En el texto se demostró que al multiplicar z por i, z gira en sentido contrario a las manecillas del reloj por un ángulo de 90°. ¿Cuál es el efecto geométrico de dividir z entre i?

14. En cada inciso, usando (6), calcular la potencia indicada.

a) $(1+i)^8$ b) $(-2\sqrt{3}+2i)^{-9}$

15. En cada inciso, encontrar Re(z) e Im(z).

a) $z = 3e^{i\pi}$ b) $z = 3e^{-i\pi}$ c) $\bar{z} = \sqrt{2}e^{\pi i/2}$ d) $\bar{z} = -3e^{-2\pi i}$

16. a) Demostrar que todos los valores de $z^{1/n}$ en la fórmula (10) son diferentes.
b) Demostrar que los valores enteros de k distintos de $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ producen valores de $z^{1/n}$ que son réplicas de los producidos por la fórmula (10).

17. Demostrar que la fórmula (7) es válida si $n = 0$ o n es un entero negativo.

18. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Para demostrar la fórmula (11), recuérdese la serie de Maclaurin para e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

a) Sustituyendo $x = i\theta$ en esta serie y simplificando, obtener la fórmula

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

b) Usando el resultado del inciso a), obtener (11).

19. Obtener la fórmula (5).

10.4 ESPACIOS VECTORIALES COMPLEJOS

En esta sección se obtendrán las propiedades básicas de los espacios vectoriales complejos y se analizarán algunas formas en que difieren de las propiedades de los espacios vectoriales reales. Sin embargo, antes de continuar el lector debe repasar la definición de espacio vectorial complejo dada al principio de la sección 5.1.

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS ESPACIOS VECTORIALES COMPLEJOS

En espacios vectoriales complejos, las combinaciones lineales se definen exactamente como en los espacios vectoriales reales, excepto que los escalares son complejos. En pocas palabras, un vector $\mathbf{w}$ se denomina ***combinación lineal*** de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ si se puede expresar en la forma

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

donde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son números complejos.

Los conceptos de ***independencia lineal***, ***conjunto generador***, ***base***, ***dimensión*** y ***subespacio*** permanecen sin ningún cambio para espacios vectoriales complejos, y los teoremas obtenidos en el capítulo 5 siguen siendo válidos.

El espacio vectorial real más importante es R^n, que es el espacio de n-adas de números reales, donde la adición y la multiplicación escalar se efectúan por coordenadas. El espacio vectorial complejo más importante es C^n, que es el espacio de n-adas de números complejos, donde la adición y la multiplicación escalar se efectúan por coordenadas. Un vector $\mathbf{u}$ en C^n se puede escribir en notación vectorial

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

o en notación matricial

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

donde

$$u_1 = a_1 + b_1 i, \quad u_2 = a_2 + b_2 i, \quad \ldots, \quad u_n = a_n + b_n i$$

Ejemplo 1 Si

$$\mathbf{u} = (i, 1 + i, -2) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (2 + i, 1 - i, 3 + 2i)$$

entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (i, 1 + i, -2) + (2 + i, 1 - i, 3 + 2i) = (2 + 2i, 2, 1 + 2i)$$

y

$$i\mathbf{u} = i(i, 1 + i, -2) = (i^2, i + i^2, -2i) = (-1, -1 + i, -2i) \quad \Delta$$

En C^n, así como en R^n, los vectores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

forman una base. Ésta se denomina ***base estándar*** para C^n. Como en esta base hay n vectores, C^n es un espacio vectorial n dimensional.

OBSERVACIÓN. No se debe confundir el número complejo $i = \sqrt{-1}$ con el vector $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ de la base estándar para R^3 (véase el ejemplo 3 de la sección 3.4). El número complejo i siempre se escribirá en *cursivas* y el vector $\mathbf{i}$, en **negritas**.

Ejemplo 2 En el ejemplo 3 de la sección 5.1 se definió el espacio vectorial M_{mn} de matrices $m \times n$ con elementos reales. El análogo complejo de este espacio es el espacio vectorial de matrices con elementos complejos y las operaciones de adición de matrices y multiplicación escalar. Este espacio se denomina complejo M_{mn}. Δ

Ejemplo 3 Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones con valores reales de la variable x, entonces la expresión

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$$

se denomina ***función con valores complejos de la variable x***. Algunos ejemplos son

$$f(x) = 2x + ix^3 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 2 \operatorname{sen} x + i \cos x \tag{1}$$

Sea V el conjunto de las funciones con valores complejos que están definidas sobre la recta. Si $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$ y $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$ son funciones como las mencionadas y k es cualquier número complejo, entonces la función ***suma*** $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y el ***múltiplo escalar*** $k\mathbf{f}$ se definen por

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = [f_1(x) + g_1(x)] + i[f_2(x) + g_2(x)]$$
$$(k\mathbf{f})(x) = kf_1(x) + ikf_2(x)$$

En palabras, para formar $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ se suman, respectivamente, las partes reales y las partes imaginarias de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$. Para formar $k\mathbf{f}$ se multiplican las partes real e imaginaria de $\mathbf{f}$ por k. Por ejemplo, si $\mathbf{f} = f(x)$ y $\mathbf{g} = g(x)$ son las funciones en (1), entonces

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = (2x + 2 \operatorname{sen} x) + i(x^3 + \cos x)$$
$$(i\mathbf{f})(x) = 2xi + i^2x^3 = -x^3 + 2xi$$

Se puede demostrar que V junto con las operaciones establecidas es un espacio vectorial complejo. Se trata del análogo complejo del espacio vectorial $F(-\infty, \infty)$ de funciones con valores reales analizado en el ejemplo 4 de la sección 5.1. Δ

Ejemplo 4 (***Para quienes ya estudiaron Cálculo***). Si $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ es una función con valores complejos de la variable real x, entonces se dice que f es ***continua*** si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuas. Se deja como ejercicio demostrar que el conjunto de todas las funciones continuas con valores complejos de una variable real x es un subespacio del espacio vectorial de todas las funciones con valores complejos de x. Este espacio es el análogo complejo del espacio vectorial

$C(-\infty, \infty)$ analizado en el ejemplo 7 de la sección 5.2 y se denomina complejo $C(-\infty, \infty)$. Un ejemplo bastante relacionado es el complejo $C[a, b]$, el espacio vectorial de todas las funciones con valores complejos que son continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Δ

Recuérdese que en R^n el producto interior euclidiano de dos vectores

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

se definió como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \tag{2}$$

y que la norma (o longitud) euclidiana de **u** se definió como

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \tag{3}$$

Desafortunadamente, estas definiciones no son apropiadas para vectores en C^n. Por ejemplo, si (3) se aplicase al vector $\mathbf{u} = (i, 1)$ en C^2, se obtendría

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{i^2 + 1} = \sqrt{0} = 0$$

de modo que **u** sería un vector *diferente de cero* con longitud cero, situación a todas luces contradictoria.

PRODUCTOS INTERIORES EUCLIDIANOS COMPLEJOS

Para extender correctamente los conceptos de norma, distancia y ángulo a C^n es necesario modificar un poco el producto interior.

Definición. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son vectores en C^n, entonces su ***producto interior euclidiano complejo*** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se define por

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n}$$

donde $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ son los conjugados de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

OBSERVACIÓN. Nótese que el producto interior euclidiano de vectores en C^n es un número complejo, mientras que el producto interior euclidiano de vectores en R^n es un número real.

Ejemplo 5 El producto interior euclidiano complejo de los vectores

$$\mathbf{u} = (-i, 2, 1 + 3i) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (1 - i, 0, 1 + 3i)$$

es

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (-i)\overline{(1 - i)} + (2)(\overline{0}) + (1 + 3i)\overline{(1 + 3i)} \\ &= (-i)(1 + i) + (2)(0) + (1 + 3i)(1 - 3i) \\ &= -i - i^2 + 1 - 9i^2 = 11 - i \quad \Delta\end{aligned}$$

En el teorema 4.1.2 se mencionaron las cuatro propiedades principales del producto interior euclidiano sobre R^n. El siguiente teorema es el resultado correspondiente para el producto interior euclidiano complejo sobre C^n.

Teorema 10.4.1. *Si* **u**, **v** *y* **w** *son vectores en* C^n *y* k *es cualquier número complejo, entonces*:

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$
b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
c) $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$. Además, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Obsérvese la diferencia entre el inciso *a*) de este teorema y el inciso *a*) del teorema 4.1.2. Se demostrarán los incisos *a*) y *d*) y los demás se dejan como ejercicio.

Demostración de a). Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2 + \cdots + u_n\overline{v}_n$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1\overline{u}_1 + v_2\overline{u}_2 + \cdots + v_n\overline{u}_n$$

de modo que

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} &= \overline{v_1\overline{u}_1 + v_2\overline{u}_2 + \cdots + v_n\overline{u}_n} \\ &= \overline{v}_1\overline{\overline{u}}_1 + \overline{v}_2\overline{\overline{u}}_2 + \cdots + \overline{v}_n\overline{\overline{u}}_n && \text{[Teorema 10.2.3, incisos } a) \text{ y } c)] \\ &= \overline{v}_1 u_1 + \overline{v}_2 u_2 + \cdots + \overline{v}_n u_n && \text{[Teorema 10.2.3, inciso } e)] \\ &= u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2 + \cdots + u_n\overline{v}_n \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

Demostración de d).

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v_1\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 + \cdots + v_n\bar{v}_n = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2 \geq 0$$

Además, la igualdad se cumple si y sólo si $|v_1| = |v_2| = \cdots = |v_n| = 0$. Pero esto es cierto si y sólo si $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$, es decir, si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. □

OBSERVACIÓN. Se deja como ejercicio demostrar que

$$\mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v}) = \bar{k}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

para vectores en C^n. Hacer la comparación con la fórmula correspondiente

$$\mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v}) = k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

para vectores en R^n.

NORMA Y DISTANCIA EN C^n

Por analogía con (3), la ***norma euclidiana*** (o ***longitud euclidiana***) de un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en C^n se define por

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2}$$

y la ***distancia euclidiana*** entre los puntos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se define por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + \cdots + |u_n - v_n|^2}$$

Ejemplo 6 Si $\mathbf{u} = (i, 1 + i, 3)$ y $\mathbf{v} = (1 - i, 4, 4i)$, entonces

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|i|^2 + |1 + i|^2 + |3|^2} = \sqrt{1 + 2 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

y

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{|i - (1 - i)|^2 + |(1 + i) - 2|^2 + |3 - 4i|^2} \\ &= \sqrt{|-1 + 2i|^2 + |-1 + i|^2 + |3 - 4i|^2} = \sqrt{5 + 2 + 25} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad \Delta \end{aligned}$$

El espacio vectorial complejo C^n con la norma y el producto interior antes definidos se denomina ***espacio n euclidiano complejo***.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.4

1. Sean $\mathbf{u} = (2i, 0, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (-i, i, 1 + i, -1)$ y $\mathbf{w} = (1 + i, -i, -1 + 2i, 0)$. Encontrar

a) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ b) $i\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$ c) $-\mathbf{w} + \mathbf{v}$ d) $3(\mathbf{u} - (1 + i)\mathbf{v})$ e) $-i\mathbf{v} + 2i\mathbf{w}$ f) $2\mathbf{v} - (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

2. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ los vectores del ejercicio 1. Encontrar el vector $\mathbf{x}$ que satisface

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} + i\mathbf{x} = 2i\mathbf{x} + \mathbf{w}.$$

3. Sean $\mathbf{u}_1 = (1 - i, i, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2i, 1 + i, 1)$ y $\mathbf{u}_3 = (0, 2i, 2 - i)$. Encontrar escalares c_1, c_2 y c_3 tales que $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = (-3 + i, 3 + 2i, 3 - 4i)$.

4. Demostrar que no existen escalares c_1, c_2 y c_3 tales que

$$c_1(i, 2 - i, 2 + i) + c_2(1 + i, -2i, 2) + c_3(3, i, 6 + i) = (i, i, i)$$

5. Encontrar la norma euclidiana de $\mathbf{v}$ si

a) $\mathbf{v} = (1, i)$ b) $\mathbf{v} = (1 + i, 3i, 1)$ c) $\mathbf{v} = (2i, 0, 2i + 1, -1)$ d) $\mathbf{v} = (-i, i, i, 3, 3 + 4i)$

6. Sean $\mathbf{u} = (3i, 0, -i)$, $\mathbf{v} = (0, 3 + 4i, -2i)$ y $\mathbf{w} = (1 + i, 2i, 0)$. Encontrar

a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ c) $\|-i\mathbf{u}\| + i\|\mathbf{u}\|$ d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ e) $\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ f) $\left\|\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$

7. Demostrar que si $\mathbf{v}$ es un vector diferente de cero en C^n, entonces $(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$ tiene norma euclidiana 1.

8. Encontrar todos los escalares k tales que $\|k\mathbf{v}\| = 1$, donde $\mathbf{v} = (3i, 4i)$.

9. Encontrar el producto interior euclidiano $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ si

a) $\mathbf{u} = (-i, 3i)$, $\mathbf{v} = (3i, 2i)$
b) $\mathbf{u} = (3 - 4i, 2 + i, -6i)$, $\mathbf{v} = (1 + i, 2 - i, 4)$
c) $\mathbf{u} = (1 - i, 1 + i, 2i, 3)$, $\mathbf{v} = (4 + 6i, -5i, -1 + i, i)$

En los ejercicios 10 y 11 se proporciona un conjunto de objetos junto con las operaciones de adición y multiplicación escalar. Determinar cuáles conjuntos son espacios vectoriales complejos bajo las operaciones dadas. Para los que no lo sean, mencionar todos los axiomas que no se cumplen.

10. El conjunto de todas las ternas de números complejos (z_1, z_2, z_3) con las operaciones

$$(z_1, z_2, z_3) + (z_1', z_2', z_3') = (z_1 + z_1', z_2 + z_2', z_3 + z_3')$$

y

$$k(z_1, z_2, z_3) = (\bar{k}z_1, \bar{k}z_2, \bar{k}z_3)$$

11. El conjunto de todas las matrices complejas de 2 × 2 de la forma

$$\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix}$$

con las operaciones matriciales normales de adición y multiplicación escalar.

12. ¿Es R^n un subespacio de C^n? Explicar la respuesta.

13. Aplicando el teorema 5.2.1, determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de C^3.
a) Todos los vectores de la forma $(z, 0, 0)$.
b) Todos los vectores de la forma (z, i, i).
c) Todos los vectores de la forma (z_1, z_2, z_3), donde $z_3 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
d) Todos los vectores de la forma (z_1, z_2, z_3), donde $z_3 = z_1 + z_2 + i$.

14. Aplicando el teorema 5.2.1, determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del complejo M_{22}:
a) Todas las matrices complejas de la forma

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

donde z_1 y z_2 son reales.
b) Todas las matrices complejas de la forma

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

donde $z_1 + z_4 = 0$.

c) Todas las matrices complejas A 2 × 2 tales que $(\bar{A})^T = A$, donde $\bar{A}$ es la matriz cuyos elementos son los conjugados de los elementos correspondientes de A.

15. Aplicando el teorema 5.2.1, determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial de las funciones con valores complejos de la variable real x:
a) Todas las f tales que $f(1) = 0$.
b) Todas las f tales que $f(0) = i$.
c) Todas las f tales que $f(-x) = \overline{f(x)}$
d) Todas las f de la forma $k_1 + k_2 e^{ix}$, donde k_1 *y* k_2 *son números complejos.*

16. ¿Cuáles de los siguientes vectores son una combinación lineal de $\mathbf{u} = (i, -i, 3i)$ y $\mathbf{v} = (2i, 4i, 0)$?
a) $(3i, 3i, 3i)$ b) $(4i, 2i, 6i)$ c) $(i, 5i, 6i)$ d) $(0, 0, 0)$

17. Expresar cada uno de los siguientes vectores como una combinación lineal de $\mathbf{u} = (1, 0, -i)$, $\mathbf{v} = (1 + i, 1, 1 - 2i)$ y $\mathbf{w} = (0, i, 2)$.
a) $(1, 1, 1)$ b) $(i, 0, -i)$ c) $(0, 0, 0)$ d) $(2 - i, 1, 1 + i)$

18. En cada inciso, determinar si los vectores dados generan a C^3.

a) $\mathbf{v}_1 = (i, i, i)$, $\mathbf{v}_2 = (2i, 2i, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3i, 0, 0)$
b) $\mathbf{v}_1 = (1 + i, 2 - i, 3 + i)$, $\mathbf{v}_2 = (2 + 3i, 0, 1 - i)$
c) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -i)$, $\mathbf{v}_2 = (1 + i, 1, 1 - 2i)$, $\mathbf{v}_3 = (0, i, 2)$
d) $\mathbf{v}_1 = (1, i, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -i, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$

19. Determinar cuáles de las siguientes funciones están en el espacio generado por

$$\mathbf{f} = e^{ix} \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = e^{-ix}$$

a) $\cos x$ b) $\operatorname{sen} x$ c) $\cos x + 3i \operatorname{sen} x$

20. Explicar por qué los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes. (Resolver este problema por inspección.)

a) $\mathbf{u}_1 = (1 - i, i)$ y $\mathbf{u}_2 = (1 + i, -1)$ en C^2
b) $\mathbf{u}_1 = (1, -i)$, $\mathbf{u}_2 = (2 + i, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (4, 0)$ en C^2
c) $A = \begin{bmatrix} i & 3i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ en el complejo M_{22}

21. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en C^3 son linealmente independientes?

a) $\mathbf{u}_1 = (1 - i, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1 + i, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1 + i, i, 0)$
b) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -i)$, $\mathbf{u}_2 = (1 + i, 1, 1 - 2i)$, $\mathbf{u}_3 = (0, i, 2)$
c) $\mathbf{u}_1 = (i, 0, 2 - i)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, i)$, $\mathbf{u}_3 = (-i, -1 - 4i, 3)$

22. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones con valores complejos de la variable real x. Demostrar que los siguientes vectores son linealmente dependientes.

$$\mathbf{f} = 3 + 3i \cos 2x, \qquad \mathbf{g} = \operatorname{sen}^2 x + i \cos^2 x, \qquad \mathbf{h} = \cos^2 x - i \operatorname{sen}^2 x$$

23. Explicar por qué los siguientes conjuntos de vectores no son bases para los espacios vectoriales indicados. (Resolver este problema por inspección.)

a) $\mathbf{u}_1 = (i, 2i)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 3i)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 7i)$ para C^2
b) $\mathbf{u}_1 = (-1 + i, 0, 2 - i)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -i, 1 + i)$ para C^3

24. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para C^2?

a) $(2i, -i)$, $(4i, 0)$ b) $(1 + i, 1)$, $(1 + i, i)$
c) $(0, 0)$, $(1 + i, 1 - i)$ d) $(2 - 3i, i)$, $(3 + 2i, -1)$

25. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para C^3?

a) $(i, 0, 0)$, $(i, i, 0)$, (i, i, i) b) $(1, 0, -i)$, $(1 + i, 1, 1 - 2i)$, $(0, i, 2)$
c) $(i, 0, 2 - i)$, $(0, 1, i)$, $(-i, -1 - 4i, 3)$ d) $(1, 0, i)$, $(2 - i, 1, 2 + i)$, $(0, 3i, 3i)$

En los ejercicios del 26 al 29, determinar la dimensión y una base para el espacio solución del sistema.

26.
$$\begin{aligned} x_1 + (1 + i)x_2 &= 0 \\ (1 - i)x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} 2x_1 - (1 + i)x_2 &= 0 \\ (-1 + i)x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} x_1 + (2 - i)x_2 \qquad\quad &= 0 \\ x_2 + 3ix_3 &= 0 \\ ix_1 + (2 + 2i)x_2 + 3ix_3 &= 0 \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 - 2ix_3 + x_4 &= 0 \\ ix_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2ix_4 &= 0 \end{aligned}$$

30. Demostrar: Si **u** y **v** son vectores en el espacio n euclidiano complejo, entonces

$$\mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) = \bar{k}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

31. a) Demostrar el inciso b) del teorema 10.4.1.
b) Demostrar el inciso c) del teorema 10.4.1.

32. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Demostrar que el complejo $C(-\infty, \infty)$ es un subespacio del espacio vectorial de funciones con valores complejos de una variable real.

33. Establecer la identidad

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \frac{i}{4}\|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 - \frac{i}{4}\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2$$

para vectores en el espacio n euclidiano complejo.

10.5 ESPACIOS COMPLEJOS CON PRODUCTO INTERIOR

En la sección 6.1 se definió el concepto de producto interior sobre un espacio vectorial real usando como axiomas las propiedades básicas del producto interior euclidiano sobre R^n. En esta sección se definirán productos interiores sobre espacios vectoriales complejos usando como axiomas las propiedades del producto interior euclidiano sobre C^n.

ESPACIOS UNITARIOS

La siguiente definición es originada por el teorema 10.4.1.

Definición. Un ***producto interior sobre un espacio vectorial complejo*** V es una función que asocia un número complejo $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ a cada par de vectores **u** y **v** en V de modo que los siguientes axiomas se cumplen para los vectores **u**, **v** y **w** en V y los escalares k.

1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$
2) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3) $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Un espacio vectorial complejo con un producto interior se llama ***espacio con producto interior complejo*** o ***espacio unitario***.

Las siguientes propiedades adicionales se deducen de inmediato a partir de los cuatro axiomas de producto interior:

(i) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$
(ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
(iii) $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = \bar{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

Como sólo iii) difiere de los resultados correspondientes para productos interiores reales, se demostrará y las otras demostraciones se dejan como ejercicio.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle &= \overline{\langle k\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} && \text{[Axioma 1]} \\ &= \overline{k\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} && \text{[Axioma 3]} \\ &= \bar{k}\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} && \text{[Propiedad de los conjugados]} \\ &= \bar{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle && \text{[Axioma 1]} \end{aligned}$$

Ejemplo 1 Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vectores en C^n. Por el teorema 10.4.1, el producto interior euclidiano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\, u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \ldots + u_n\bar{v}_n$ satisface todos los axiomas de producto interior. Δ

Ejemplo 2 Si

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

son matrices cualesquiera 2 × 2 con elementos complejos, entonces la siguiente fórmula define un producto interior complejo sobre el complejo M_{22} (comprobar):

$$\langle U, V \rangle = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3 + u_4\bar{v}_4$$

Por ejemplo, si

$$U = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &= (0)(\bar{1}) + i(\overline{-i}) + (1)(\bar{0}) + (1+i)(\overline{2i}) \\ &= (0)(1) + i(i) + (1)(0) + (1+i)(-2i) \\ &= 0 + i^2 + 0 - 2i - 2i^2 \\ &= 1 - 2i \quad \Delta \end{aligned}$$

Ejemplo 3 (*Para quienes ya estudiaron Cálculo*). Si $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ es una función con valores complejos de la variable real x y si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + i\int_a^b f_2(x)\,dx$$

En palabras, *la integral de $f(x)$ es la integral de la parte real de f más i veces la integral de la parte imaginaria de f.*

Se deja como ejercicio demostrar que si las funciones $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$ y $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$ son vectores en el complejo $C[a, b]$, entonces la siguiente fórmula define un producto interior sobre el complejo $C[a, b]$:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle &= \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]\overline{[g_1(x) + ig_2(x)]}\,dx \\ &= \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)][g_1(x) - ig_2(x)]\,dx \\ &= \int_a^b [f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)]\,dx + i\int_a^b [f_2(x)g_1(x) - f_1(x)g_2(x)]\,dx \quad \Delta\end{aligned}$$

En espacios con producto interior complejo, así como en espacios con producto interior real, la ***norma*** (o ***longitud***) de un vector $\mathbf{u}$ se define por

$$\boxed{\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle^{1/2}}$$

y la ***distancia*** entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define por

$$\boxed{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|}$$

Se puede demostrar que con estas definiciones los teoremas 6.2.2 y 6.2.3 siguen siendo verdaderos en espacios con producto interior complejo (ejercicio 35).

Ejemplo 4 Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son vectores en C^n con el producto interior euclidiano, entonces

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2}$$

y

$$\begin{aligned}d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\rangle^{1/2} \\ &= \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + \cdots + |u_n - v_n|^2}\end{aligned}$$

Obsérvese que estas expresiones son justamente las fórmulas para la norma y la distancia euclidianas analizadas en la sección 10.4. Δ

Ejemplo 5 ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Si el complejo $C[0, 2\pi]$ tiene el producto interior del ejemplo 3 y si $\mathbf{f} = e^{imx}$, donde m es cualquier entero, entonces con auxilio de la fórmula (15) de la sección 10.3 se obtiene

$$\|\mathbf{f}\| = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle^{1/2} = \left[\int_0^{2\pi} e^{imx}\overline{e^{imx}}\, dx \right]^{1/2}$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-imx}\, dx \right]^{1/2} = \left[\int_0^{2\pi} dx \right]^{1/2} = \sqrt{2\pi} \quad \Delta$$

CONJUNTOS ORTOGONALES

Las definiciones de conceptos como ***vectores ortogonales***, ***conjunto ortogonal***, ***conjunto ortonormal*** y ***base ortonormal*** se aplican sin cambio a espacios unitarios. Además, el teorema 6.2.4, los teoremas de la sección 6.3 y el teorema 6.5.4 aún son válidos en espacios con producto interior complejo, y el proceso de Gram-Schmidt se puede usar para convertir una base cualesquiera de un espacio con producto interior en una base ortonormal.

Ejemplo 6 Los vectores

$$\mathbf{u} = (i, 1) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (1, i)$$

en C^2 son ortogonales con respecto al producto interior euclidiano, ya que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (i)(\bar{1}) + (1)(\bar{i}) = (i)(1) + (1)(-i) = 0 \quad \Delta$$

Ejemplo 7 Considérese el espacio vectorial C^3 con el producto interior euclidiano. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt para transformar los vectores básicos $\mathbf{u}_1 = (i, i, i)$, $\mathbf{u}_2 = (0, i, i)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, i)$, en una base ortonormal.

Solución.

Paso 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (i, i, i)$

Paso 2.
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proy}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

$$= (0, i, i) - \frac{2}{3}(i, i, i) = \left(-\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, \frac{1}{3}i \right)$$

Paso 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2}\,\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$$= (0, 0, i) - \frac{1}{3}(i, i, i) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, \frac{1}{3}i\right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i\right)$$

Así,

$$\mathbf{v}_1 = (i, i, i), \qquad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, \frac{1}{3}i\right), \qquad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i\right)$$

forma una base ortogonal para C^3. Las normas de estos vectores son

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \qquad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \qquad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de modo que una base ortonormal para C^3 es

$$\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}\right), \qquad \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \quad \Delta$$

Ejemplo 8 ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Sea el complejo $C[0, 2\pi]$ con el producto interior del ejemplo 3, y sea W el conjunto de vectores en $C[0, 2\pi]$ de la forma

$$e^{imx} = \cos mx + i \operatorname{sen} mx$$

donde m es un entero. El conjunto W es ortogonal porque si

$$\mathbf{f} = e^{ikx} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{g} = e^{ilx}$$

son vectores distintos en W, entonces

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikx}\overline{e^{ilx}}\,dx = \int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ilx}\,dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(k-l)x\,dx + i\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(k-l)x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{k-l}\text{sen }(k-l)x\right]_0^{2\pi} - i\left[\frac{1}{k-l}\cos(k-l)x\right]_0^{2\pi}$$
$$= (0) - i(0) = 0$$

Si se normaliza cada vector del conjunto ortogonal W, se obtiene un conjunto ortonormal. Pero en el ejemplo 5 se demostró que cada vector en W tiene norma $\sqrt{2\pi}$, de modo que los vectores

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

forman un conjunto ortonormal en el complejo $C[0, 2\pi]$. Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.5

1. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Demostrar que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3u_1\, 3u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$ define un producto interior sobre C^2.

2. Calcular $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ usando el producto interior del ejercicio 1.

a) $\mathbf{u} = (2i, -i)$, $\mathbf{v} = (-i, 3i)$
b) $\mathbf{u} = (0, 0)$, $\mathbf{v} = (1 - i, 7 - 5i)$
c) $\mathbf{u} = (1 + i, 1 - i)$, $\mathbf{v} = (1 - i, 1 + i)$
d) $\mathbf{u} = (3i, -1 + 2i)$, $\mathbf{v} = (3i, -1 + 2i)$

3. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Demostrar que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1\bar{v}_1 + (1 + i)u_1\bar{v}_2 + (1 - i)u_2\bar{v}_1 + 3u_2\bar{v}_2$$

define un producto interior sobre C^2.

4. Calcular $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ usando el producto interior del ejercicio 3.

a) $\mathbf{u} = (2i, -i)$, $\mathbf{v} = (-i, 3i)$
b) $\mathbf{u} = (0, 0)$, $\mathbf{v} = (1 - i, 7 - 5i)$
c) $\mathbf{u} = (1 + i, 1 - i)$, $\mathbf{v} = (1 - i, 1 + i)$
d) $\mathbf{u} = (3i, -1 + 2i)$, $\mathbf{v} = (3i, -1 + 2i)$

5. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son productos interiores sobre C^2. Para las que no lo sean, enumerar los axiomas que no se cumplen.

a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1\bar{v}_1$
b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1\bar{v}_1 - u_2\bar{v}_2$
c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = |u_1|^2|v_1|^2 + |u_2|^2|v_2|^2$
d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2u_1\bar{v}_1 + iu_1\bar{v}_2 + iu_2\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$
e) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2u_1\bar{v}_1 + iu_1\bar{v}_2 - iu_2\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$

6. Usando el producto interior del ejemplo 2, encontrar $\langle U, V\rangle$ si

$$U = \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ 1-i & i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} 3 & -2-3i \\ 4i & 1 \end{bmatrix}$$

7. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. ¿$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3 - iu_3\bar{v}_1$ define un producto interior sobre C^3? En caso negativo, enumerar todos los axiomas que no se cumplen.

8. Sea V el espacio vectorial de las funciones con valores complejos de la variable real x, y sean $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$ y $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$ vectores en V. ¿La expresión

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = (f_1(0) + if_2(0))\overline{(g_1(0) + ig_2(0))}$$

define un producto interior sobre V? En caso negativo, enumerar todos los axiomas que no se cumplen.

9. Sea C^2 con el producto interior del ejercicio 1. Encontrar $\|\mathbf{w}\|$ si

a) $\mathbf{w} = (-i, 3i)$ b) $\mathbf{w} = (1-i, 1+i)$ c) $\mathbf{w} = (0, 2-i)$ d) $\mathbf{w} = (0, 0)$

10. Para cada vector del ejercicio 9, usando el producto interior euclidiano encontrar $\|\mathbf{w}\|$.

11. Usando el producto interior del ejercicio 3, encontrar $\|\mathbf{w}\|$ si

a) $\mathbf{w} = (1, -i)$ b) $\mathbf{w} = (1-i, 1+i)$ c) $\mathbf{w} = (3-4i, 0)$ d) $\mathbf{w} = (0, 0)$

12. Usando el producto interior del ejemplo 2, encontrar $\|A\|$ si

a) $A = \begin{bmatrix} -i & 7i \\ 6i & 2i \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$

13. Sea C^2 con el producto interior del ejercicio 1. Encontrar $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ si

a) $\mathbf{x} = (1, 1)$, $\mathbf{y} = (i, -i)$ b) $\mathbf{x} = (1-i, 3+2i)$, $\mathbf{y} = (1+i, 3)$

14. Repetir las instrucciones del ejercicio 13 usando el producto interior euclidiano sobre C^2.

15. Repetir las instrucciones del ejercicio 13 usando el producto interior del ejercicio 3.

16. Sea el complejo M_{22} con el producto interior del ejemplo 2. Encontrar $d(A, B)$ si

a) $A = \begin{bmatrix} i & 5i \\ 8i & 3i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -5i & 0 \\ 7i & -3i \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2i & 2-3i \\ i & 1 \end{bmatrix}$

17. Sea C^3 con el producto interior euclidiano. ¿Para qué valores complejos de k los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales?

a) $\mathbf{u} = (2i, i, 3i)$, $\mathbf{v} = (i, 6i, k)$ b) $\mathbf{u} = (k, k, 1+i)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 1-i)$

18. Sea M_{22} con el producto interior del ejemplo 2. Determinar cuáles de las siguientes matrices son ortogonales a

$$A = \begin{bmatrix} 2i & i \\ -i & 3i \end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} -3 & 1-i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3-i & 0 \end{bmatrix}$

19. Sea C^3 con el producto interior euclidiano. Demostrar que para todos los valores de θ el vector $\mathbf{x} = e^{i\theta}\left(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ tiene norma 1 y es ortogonal a $(1, i, 0)$ y a $(0, i, -i)$.

20. Sea C^2 con el producto interior euclidiano. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son ortonormales?

a) $(i, 0)$, $(0, 1-i)$ b) $\left(\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ c) $\left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ (d) $(i, 0)$, $(0, 0)$

21. Sea C^3 con el producto interior euclidiano. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son ortonormales?

a) $\left(\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, -\frac{i}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3}i, -\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i\right), \left(\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, -\frac{2}{3}i\right), \left(\frac{1}{3}i, \frac{2}{3}i, \frac{2}{3}i\right)$

c) $\left(\frac{i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}, -\frac{2i}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)$

22. Sea

$$\mathbf{x} = \left(\frac{i}{\sqrt{5}}, -\frac{i}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \left(\frac{2i}{\sqrt{30}}, \frac{3i}{\sqrt{30}}\right)$$

Demostrar que $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ es un conjunto ortonormal si C^2 tiene el producto interior

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$$

pero no es ortonormal si C^2 tiene el producto interior euclidiano.

23. Demostrar que

$$\mathbf{u}_1 = (i, 0, 0, i), \quad \mathbf{u}_2 = (-i, 0, 2i, i), \quad \mathbf{u}_3 = (2i, 3i, 2i, -2i), \quad \mathbf{u}_4 = (-i, 2i, -i, i)$$

es un conjunto ortogonal en C^4 con el producto interior euclidiano. Normalizando cada uno de estos vectores, obtener un conjunto ortonormal.

24. Sea C^2 con el producto interior euclidiano. Usando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ en una base ortonormal.

a) $\mathbf{u}_1 = (i, -3i)$, $\mathbf{u}_2 = (2i, 2i)$ b) $\mathbf{u}_1 = (i, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (3i, -5i)$

25. Sea C^3 con el producto interior euclidiano. Usando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en una base ortonormal.

a) $\mathbf{u}_1 = (i, i, i)$, $\mathbf{u}_2 = (-i, i, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (i, 2i, i)$ b) $\mathbf{u}_1 = (i, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (3i, 7i, -2i)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 4i, i)$

26. Sea C^4 con el producto interior euclidiano. Usando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ en una base ortonormal.

$$\mathbf{u}_1 = (0, 2i, i, 0),\quad \mathbf{u}_2 = (i, -i, 0, 0),\quad \mathbf{u}_3 = (i, 2i, 0, -i),\quad \mathbf{u}_4 = (i, 0, i, i)$$

27. Sea C^3 con el producto interior euclidiano. Encontrar una base ortonormal para el subespacio generado por $(0, i, 1-i)$ y $(-i, 0, 1+i)$.

28. Sea C^4 con el producto interior euclidiano. Expresar $\mathbf{w} = (-i, 2i, 6i, 0)$ en la forma $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde el vector $\mathbf{w}_1$ está en el espacio W generado por $\mathbf{u}_1 = (-i, 0, i, 2i)$ y $\mathbf{u}_2 = (0, i, 0, i)$, y $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a W.

29. a) Demostrar: Si k es un número complejo y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ es un producto interior sobre un espacio vectorial complejo, entonces $\langle \mathbf{u} - k\mathbf{v}, \mathbf{u} - k\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \bar{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - k\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + k\bar{k}\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$.

b) Usando el resultado del inciso a), demostrar que $0 \le \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \bar{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - k\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + k\bar{k}\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$.

30. Demostrar que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en un espacio con producto interior complejo, entonces

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 \le \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$$

Este resultado, denominado ***desigualdad de Cauchy-Schwarz para espacios con producto interior complejo***, difiere de su análogo real (teorema 6.2.1) en que es necesario incluir un signo de valor absoluto en el miembro izquierdo. [***Sugerencia.*** Sea $k = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ en la desigualdad del ejercicio 29b).]

31. Demostrar: Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son vectores en C^n, entonces

$$|u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n| \le (|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2)^{1/2}(|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2)^{1/2}$$

Esta es la versión compleja de la ***desigualdad de Cauchy*** analizada en el ejemplo 1 de la sección 6.2. [***Sugerencia.*** Usar el ejercicio 30.]

32. Demostrar que en la desigualdad de Cauchy-Schwarz para espacios vectoriales complejos la igualdad se cumple si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes.

33. Demostrar que si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ es un producto interior sobre un espacio vectorial complejo, entonces

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0}\rangle = 0$$

34. Demostrar que si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ es un producto interior sobre un espacio vectorial complejo, entonces

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

35. Los teoremas 6.2.2 y 6.2.3 siguen siendo verdaderos en espacios con producto interior complejo. En cada inciso, demostrar que así es.
a) Teorema 6.2.2*a*. b) Teorema 6.2.2*b*. c) Teorema 6.2.2*c*. d) Teorema 6.2.2*d*.
b) Teorema 6.2.3*a*. f) Teorema 6.2.3*b*. g) Teorema 6.2.3*c*. h) Teorema 6.2.3*d*.

36. En el ejemplo 7 se demostró que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}\right), \qquad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}\right), \qquad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

forman una base ortonormal para C^3. Usando el teorema 6.3.1, expresar $\mathbf{u} = (1 - i, 1 + i, 1)$ como una combinación lineal de estos vectores.

37. Demostrar que si **u** y **v** son vectores en un espacio con producto interior complejo, entonces

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \frac{i}{4}\|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 - \frac{i}{4}\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2$$

38. Demostrar: Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ortonormal para un espacio V con producto interior complejo y si **u** y **v** son vectores cualesquiera en V, entonces

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle} + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle}$$

[***Sugerencia.*** Aplicando el teorema 6.3.1, expresar **u** y **w** como combinaciones lineales de los vectores básicos.]

39. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).*** Demostrar que si $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$ y $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$ son vectores en el complejo $C[a, b]$, entonces la fórmula

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]\overline{[g_1(x) + ig_2(x)]}\, dx$$

define un producto interior complejo sobre $C[a, b]$.

40. ***(Para quienes ya estudiaron Cálculo).***
a) Sean $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$ y $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$ vectores en $C[0, 1]$, que tiene el producto interior

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 [f_1(x) + if_2(x)]\overline{[g_1(x) + ig_2(x)]}\, dx$$

Demostrar que los vectores

$$e^{2\pi imx}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

forman un conjunto ortogonal.
b) Obtener un conjunto ortonormal normalizando los vectores del inciso a).

10.6 MATRICES UNITARIAS, NORMALES Y HERMITIANAS

Para matrices con elementos reales, las matrices ortogonales ($A^{-1} = A^T$) y las matrices simétricas ($A = A^T$) desempeñaron un papel importante en el problema de diagonalización ortogonal (sección 7.3). Para matrices con elementos complejos, las matrices ortogonales y simétricas son relativamente poco importantes; son reemplazadas por dos nuevas clases de matrices, la matrices unitarias y hermitianas, que se analizarán en esta sección.

MATRICES UNITARIAS

Si A es una matriz con elementos complejos, entonces la ***transpuesta conjugada*** de A, que se denota por A^*, se define como

$$\boxed{A^* = \overline{A}^T}$$

donde $\overline{A}$ es la matriz cuyos elementos son los conjugados complejos de los elementos correspondientes en A y $\overline{A}^T$ es la transpuesta de $\overline{A}$.

Ejemplo 1 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}$$

entonces

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix}$$

de modo que

$$A^* = \overline{A}^T = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \Delta$$

Las propiedades básicas de la operación conjugada transpuesta son semejantes a las de la transpuesta:

Teorema 10.6.1. *Si A y B son matrices con elementos complejos y k es cualquier número complejo, entonces:*

a) $(A^*)^* = A$
b) $(A + B)^* = A^* + B^*$
c) $(kA)^* = \overline{k}A^*$
d) $(AB)^* = B^*A^*$

Las demostraciones se dejan como ejercicios.

Recuérdese que una matriz con elementos reales se denomina *ortogonal* si $A^{-1} = A^T$. Los análogos complejos de las matrices ortogonales se llaman matrices *unitarias*, y se definen como sigue:

Definición. Una matriz cuadrada A con elementos complejos se denomina ***unitaria*** si

$$A^{-1} = A^*$$

El siguiente teorema es similar al teorema 6.5.1.

Teorema 10.6.2. *Si A es una matriz $n \times n$ con elementos complejos, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *A es unitaria.*
b) *Los vectores renglón de A forman un conjunto ortonormal en C^n con el producto interior euclidiano.*
c) *Los vectores columna de A forman un conjunto ortonormal en C^n con el producto interior euclidiano.*

Ejemplo 2 Los vectores renglón de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix} \tag{1}$$

son

$$\mathbf{r}_1 = \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2}\right), \qquad \mathbf{r}_2 = \left(\frac{1-i}{2}, \frac{-1+i}{2}\right)$$

Con respecto al producto interior euclidiano sobre C^n, se tiene

$$\|\mathbf{r}_1\| = \sqrt{\left|\frac{1+i}{2}\right|^2 + \left|\frac{1+i}{2}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\|\mathbf{r}_2\| = \sqrt{\left|\frac{1-i}{2}\right|^2 + \left|\frac{-1+i}{2}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 &= \left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(\frac{1-i}{2}\right)} + \left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(\frac{-1+i}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{-1-i}{2}\right) \\ &= \frac{i}{2} - \frac{i}{2} = 0 \end{aligned}$$

de modo que los vectores renglón forman un conjunto ortonormal en C^2. Así, A es unitaria y

$$A^{-1} = A^* = \begin{bmatrix} \dfrac{1-i}{2} & \dfrac{1+i}{2} \\ \dfrac{1-i}{2} & \dfrac{-1-i}{2} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

El lector debe comprobar que la matriz (2) es la inversa de la matriz (1) probando que $AA^* = A^*A = I$. Δ

DIAGONALIZACIÓN UNITARIA

Recuérdese que una matriz cuadrada A con elementos reales se llama *diagonalizable ortogonalmente* si hay una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ (= P^TAP) sea diagonal. Para matrices complejas se tiene un concepto análogo.

> **Definición.** Una matriz cuadrada A con elementos complejos se denomina ***diagonalizable unitariamente*** si existe una matriz unitaria P tal que $P^{-1}AP$ (= P^*AP) es diagonal; se dice que la matriz P ***diagonaliza unitariamente*** a A.

Hay dos preguntas a considerar:

- ¿Qué matrices son diagonalizables unitariamente?
- ¿Cómo determinar una matriz unitaria P a fin de efectuar la diagonalización?

Antes de responder estas preguntas se observa que las definiciones ya proporcionadas de los conceptos ***eigenvector***, ***eigenvalor***, ***eigenespacio***, ***ecuación característica*** y ***polinomio característico*** se cumplen sin cambio en espacios vectoriales complejos.

MATRICES HERMITIANAS

En la sección 7.3 se vio que las matrices desempeñaban un papel fundamental en el problema de diagonalizar ortogonalmente una matriz con elementos reales. Los análogos complejos más naturales de las matrices simétricas reales son las matrices *hermitianas**, que se definen como sigue:

> **Definición.** Una matriz cuadrada A con elementos complejos se denomina ***hermitiana*** si
>
> $$A = A^*$$

****Charles Hermite* (1822-1901)** matemático francés que realizó contribuciones fundamentales al álgebra, a la teoría de matrices y a varias ramas del análisis. Es conocido por usar integrales para resolver una ecuación polinómica general de quinto grado. También demostró que el número e (la base de los logaritmos naturales) no es raíz de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales.

Ejemplo 3 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & -5 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 3 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$A^* = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix} = A$$

lo cual significa que A es hermitiana. Δ

Es fácil reconocer las matrices hermitianas por inspección: los elementos de la diagonal principal son números reales (ejercicio 17), y la "imagen especular" de cada elemento de la diagonal principal es su conjugado complejo (figura 1).

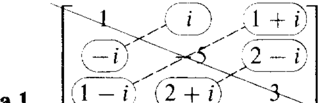


Figura 1

MATRICES NORMALES

Las matrices hermitianas poseen muchas propiedades, aunque no todas, de las matrices simétricas reales. Por ejemplo, así como las matrices simétricas reales son diagonalizables ortogonalmente, se verá que las matrices hermitianas son diagonalizables unitariamente. Sin embargo, a pesar de que las matrices simétricas reales son las únicas matrices con elementos reales que se pueden diagonalizar ortogonalmente (teorema 7.3.1), las matrices hermitianas no constituyen toda la clase de matrices diagonalizables unitariamente; es decir, existen matrices diagonalizables unitariamente que no son hermitianas. Para explicar por qué es así se necesita la siguiente definición:

Definición. Una matriz cuadrada A con elementos complejos se denomina ***normal*** si

$$AA^* = A^*A$$

Ejemplo 4 Toda matriz hermitiana A es normal, ya que $AA^* = AA = A^*A$, y toda matriz unitaria A es normal, ya que $AA^* = I = A^*A$. Δ

Los dos teoremas siguientes son los análogos complejos de los teoremas 7.3.1 y 7.3.2. Se omiten las demostraciones.

Teorema 10.6.3. *Si A es una matriz cuadrada con elementos complejos, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *A es diagonalizable unitariamente.*
b) *A contiene un conjunto ortonormal de n eigenvectores.*
c) *A es normal.*

Teorema 10.6.4. *Si A es una matriz normal, entonces los eigenvectores de eigenespacios diferentes de A son ortogonales.*

El teorema 10.6.3 establece que una matriz cuadrada A con elementos complejos es diagonalizable unitariamente si y sólo si es normal. El teorema 10.6.4 será crucial para obtener una matriz que diagonalice unitariamente una matriz normal.

PROCEDIMIENTO DE DIAGONALIZACIÓN

En la sección 7.3 se vio que una matriz simétrica A es diagonalizada ortogonalmente por cualquier matriz ortogonal cuyos vectores columna sean eigenvectores de A. De manera semejante, una matriz normal A es diagonalizada por cualquier matriz unitaria cuyos vectores columna sean eigenvectores de A. El procedimiento para diagonalizar una matriz normal es como sigue:

Paso 1. Encontrar una base para cada eigenespacio de A.
Paso 2. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a cada una de estas bases a fin de obtener una base ortonormal para cada eigenespacio.
Paso 3. Formar la matriz P cuyas columnas son los vectores básicos obtenidos en el paso 2. Esta matriz diagonaliza unitariamente a A.

La justificación de ese procedimiento debe ser evidente. El teorema 10.6.4 asegura que eigenvectores de eigenespacios *diferentes* son ortogonales, y la aplicación del proceso de Gram-Schmidt asegura que los eigenvectores del *mismo* eigenespacio son ortonormales. Así, *todo* el conjunto de eigenvectores obtenido con este procedimiento es ortonormal. El teorema 10.6.3 asegura que este conjunto ortonormal de eigenvectores es una base.

Ejemplo 5 La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable unitariamente porque es hermitiana y, por tanto, es normal. Encontrar una matriz P que diagonalice unitariamente a A.

Solución. El polinomio característico de A es

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 - i \\ -1 + i & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

de modo que la ecuación característica es

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

y los eigenvalores son $\lambda = 1$ y $\lambda = 4$.

Por definición,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector de A correspondiente a λ si y sólo si $\mathbf{x}$ es una solución no trivial de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 - i \\ -1 + i & \lambda - 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Para encontrar eigenvectores correspondientes a $\lambda = 1$, este valor se sustituye en (3):

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 - i \\ -1 + i & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema por eliminación de Gauss-Jordan se obtiene (comprobar)

$$x_1 = (-1 - i)s, \qquad x_2 = s$$

Así, los eigenvectores de A correspondientes a $\lambda = 1$ son los vectores diferentes de cero en C^2 de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (-1 - i)s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 - i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, este eigenespacio es unidimensional con base

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

En este caso el proceso de Gram-Schmidt es de un solo paso; la normalización de este vector. Como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|-1-i|^2 + |1|^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

el vector

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1-i}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

es una base ortonormal del eigenespacio correspondiente a $\lambda = 1$.
Para encontrar los eigenvectores correspondientes a $\lambda = 4$, este valor se sustituye en (3):

$$\begin{bmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema por eliminación de Gauss-Jordan se obtiene (comprobar)

$$x_1 = \left(\frac{1+i}{2}\right)s, \qquad x_2 = s$$

de modo que los eigenvectores de A correspondientes a $\lambda = 4$ son los vectores diferentes de cero en C^2 de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+i}{2}\right)s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \dfrac{1+i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así, el eigenespacio es unidimensional con base

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el proceso de Gram-Schmidt (es decir, normalizando este vector) se obtiene

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$P = [\mathbf{p}_1 \mid \mathbf{p}_2] = \begin{bmatrix} \dfrac{-1-i}{\sqrt{3}} & \dfrac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

diagonaliza a A y

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \Delta$$

EIGENVALORES DE MATRICES HERMITIANAS Y SIMÉTRICAS

En el teorema 7.3.2 se estableció que los eigenvalores de una matriz simétrica con elementos reales son números reales. Este importante resultado es un corolario del siguiente teorema más general.

Teorema 10.6.5. *Los eigenvalores de una matriz hermitiana son números reales.*

Demostración. Si λ es un eigenvalor y $\mathbf{v}$ es un eigenvector correspondiente de una matriz hermitiana A $n \times n$, entonces

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Multiplicando por la izquierda cada miembro de esta ecuación por el conjugado transpuesto de $\mathbf{v}$ se obtiene

$$\mathbf{v}^*A\mathbf{v} = \mathbf{v}^*(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}^*\mathbf{v} \tag{5}$$

Se demostrará que ambas matrices $\mathbf{v}^*A\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^*\mathbf{v}$ 1×1 tienen elementos reales, de modo que por (5) se concluirá que debe ser un número real.

Tanto $\mathbf{v}^*A\mathbf{v}$ como $\mathbf{v}^*\mathbf{v}$ son hermitianas, ya que

$$(\mathbf{v}^*A\mathbf{v})^* = \mathbf{v}^*A^*(\mathbf{v}^*)^* = \mathbf{v}^*A\mathbf{v}$$

y

$$(\mathbf{v}^*\mathbf{v})^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{v}^*)^* = \mathbf{v}^*\mathbf{v}$$

Como las matrices hermitianas tienen elementos reales sobre la diagonal principal y como $\mathbf{v}^*A\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^*\mathbf{v}$ son 1×1, se concluye que estas matrices tienen elementos reales, con lo cual se completa la demostración. ▯

Teorema 10.6.6. *Los eigenvalores de una matriz simétrica con elementos reales son números reales.*

Demostración. Sea A una matriz simétrica con elementos reales. Debido a que los elementos de A son reales, se concluye que

$$\overline{A} = A$$

Pero esto indica que A es hermitiana, ya que

$$A^* = (\overline{A})^T = A^T = A$$

Así, por el teorema 10.6.5, A tiene eigenvalores reales. ▯

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.6

1. En cada inciso, encontrar A^*.

a) $A = \begin{bmatrix} 2i & 1-i \\ 4 & 3+i \\ 5+i & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2i & 1-i & -1+i \\ 4 & 5-7i & -i \\ i & 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = [7i \quad 0 \quad -3i]$ d) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

2. ¿Cuáles de las matrices siguientes son hermitianas?

a) $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -2 & 1-i & -1+i \\ 1+i & 0 & 3 \\ -1-i & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Encontrar k, l y m de modo que A sea una matriz hermitiana .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & k & -i \\ 3-5i & 0 & m \\ l & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$$

4. Aplicando el teorema 10.6.2, determinar cuáles de las siguientes matrices son unitarias.

a) $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & -1+i \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

5. En cada inciso, comprobar que la matriz es unitaria y encontrar su inversa.

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}i \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}i \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i\sqrt{3}) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(i-\sqrt{3}) \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{3+i}{2\sqrt{15}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$

6. Demostrar que la matriz

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

es unitaria para todo valor real de θ.

En los ejercicios del 7 al 12, encontrar una matriz unitaria P que diagonalice a A y determinar $P^{-1}AP$.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{bmatrix}$ **8.** $A = \begin{bmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$ **9.** $A = \begin{bmatrix} 6 & 2+2i \\ 2-2i & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ 3-i & -3 \end{bmatrix}$ **11.** $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \end{bmatrix}$

13. Demostrar que los eigenvalores de la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4i \\ 4i & 3 \end{bmatrix}$$

no son reales. ¿Este hecho viola el teorema 10.6.6?

14. Encontrar una matriz 2×2 que sea hermitiana y unitaria y cuyos elementos no sean todos números reales.

15. Demostrar: Si A es una matriz $n \times n$ con elementos complejos, entonces $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. [***Sugerencia.*** Primero demostrar que los productos elementales de $\overline{A}$ con signo son los conjugados de los productos elementales de A con signo.]

16. a) Aplicando el resultado del ejercicio 15, demostrar que si A es una matriz $n \times n$ con elementos complejos, entonces $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

b) Demostrar: Si A es hermitiana, entonces $\det(A)$ es real.

c) Demostrar: Si A es unitaria, entonces $|\det(A)| = 1$.

17. Demostrar que los elementos sobre la diagonal principal de una matriz hermitiana son números reales.

18. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

matrices con elementos complejos. Demostrar que

a) $(A^*)^* = A$ b) $(A + B)^* = A^* + B^*$ c) $(kA)^* = \bar{k}A^*$ d) $(AB)^* = B^*A^*$

19. Demostrar: Si A es invertible, entonces también A^* lo es, en cuyo caso $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

20. Demostrar que si A es una matriz unitaria, entonces también A^* es unitaria.

21. Demostrar que una matriz $n \times n$ con elementos complejos es unitaria si y sólo si sus renglones forman un conjunto ortonormal en C^n con el producto interior euclidiano.

22. Usando los ejercicios 20 y 21, demostrar que una matriz $n \times n$ es unitaria si y sólo si sus columnas forman un conjunto ortonormal en C^n con el producto interior euclidiano.

23. Demostrar: Si $A = A^*$, entonces para todo vector x en C^n, el elemento en la matriz $\mathbf{x}^*A\mathbf{x}$ de 1×1 es real.

24. Sean λ y μ eigenvalores distintos de una matriz hermitiana A.

a) Demostrar que si $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente a λ y $\mathbf{y}$ es un eigenvector correspondiente a μ, entonces $\mathbf{x}^*A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}^*\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}^*A\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}^*\mathbf{y}$.

b) Demostrar el teorema 10.6.4. [***Sugerencia.*** Restar las ecuaciones en el inciso a).]

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vectores en C^n, y sean $\overline{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)$ y $\overline{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)$.

a) Demostrar: $\overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{v}}$.

b) Demostrar: $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si $\overline{\mathbf{u}}$ y $\overline{\mathbf{v}}$ son ortogonales.

2. Demostrar que si la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

es diferente de cero, entonces es invertible.

3. Encontrar una base para el espacio solución del sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Demostrar: Si a y b son números complejos tales que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ y si θ es un número real, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\bar{b} & e^{i\theta}\bar{a} \end{bmatrix}$$

es una matriz unitaria.

5. Encontrar los eigenvalores de la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \omega + 1 + \dfrac{1}{\omega} \\ 0 & 1 & -\omega - 1 - \dfrac{1}{\omega} \end{bmatrix}$$

donde $= e^{2\pi i/3}$

6. a) Demostrar que si z es un número complejo diferente de 1, entonces

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Sugerencia. Sea S la suma del miembro izquierdo de la ecuación y considérese la cantidad $S - zS$.

b) Usando el resultado del inciso a), demostrar que si $z^n = 1$ y $z \neq 1$, entonces $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$.

c) Usando el resultado del inciso a), obtener la identidad trigonométrica de Lagrange

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}[(n + \frac{1}{2})\theta]}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}$$

para $0 < \theta < 2\pi$. [***Sugerencia.*** Sea $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$.]

7. Sea $\omega = e^{2\pi i/3}$. Demostrar que los vectores $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{3})(1, \omega, \omega^2)$ y $\mathbf{v}_3 = (1/\sqrt{3})(1, \omega^2, \omega^4)$ forman un conjunto ortonormal en C^3. [***Sugerencia.*** Usar el inciso b) del ejercicio 6.]

8. Demostrar que si U es una matriz unitaria $n \times n$ y $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1$, entonces el producto

$$U\begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

también es unitario.

9. Supóngase que $A^* = -A$.

a) Demostrar que iA es hermitiana.

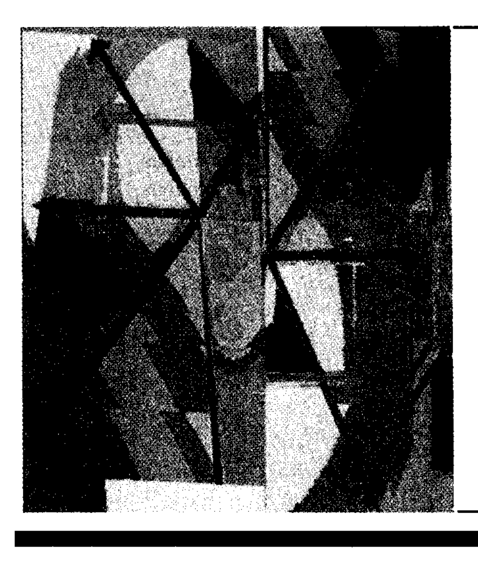
b) Demostrar que A es diagonalizable unitariamente y que tiene eigenvalores imaginarios puros.

10. a) Demostrar que el conjunto de números complejos con las operaciones

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad \text{y} \quad k(a + bi) = ka + kbi$$

donde k es un número real, es un espacio vectorial *real*.

b) ¿Cuál es la dimensión de este espacio?



RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.1 (Página 27)

1. a), c), f) 2. a), b), c)

3. a) $x = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}t$, $y = t$ b) $x_1 = \frac{5}{3}s - \frac{4}{3}t + \frac{7}{3}$, $x_2 = s$, $x_3 = t$

$x_1 = \frac{1}{4}r - \frac{5}{8}s + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}$, $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

$v = \frac{8}{3}q - \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t$, $w = q$, $x = r$, $y = s$, $z = t$

4. a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{aligned} 2x_1 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_3 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 &= -3 \\ -2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 &= 7 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned}$

6. a) $x - 2y = 5$ b) Sea $x = t$, entonces $t - y = 5$. Al despejar y se obtiene $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$.

8. $k = 6$: infinidad de soluciones
$k \neq 6$: no hay soluciones
Ningún valor de k produce una solución.

9. a) Las rectas no tienen punto de intersección común. b) Las rectas se intersecan exactamente en un punto.
c) Las tres rectas coinciden.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.2 (Página 41)

1. a), b), c), d), h), i), j) 2. a), b), d) 3. a) Ambas b) Ninguna de las dos c) Ambas d) Escalonada e) Ninguna de las dos f) Ambas

4. a) $x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 7$
b) $x_1 = 7t + 8, x_2 = -3t + 2, x_3 = -t - 5, x_4 = t$
c) $x_1 = 6s - 3t - 2, x_2 = s, x_3 = -4t + 7, x_4 = -5t + 8, x_5 = t$
d) Inconsistente

5. a) $x_1 = -37, x_2 = -8, x_3 = 5$
b) $x_1 = 13t - 10, x_2 = 13t - 5, x_3 = -t + 2, x_4 = t$
c) $x_1 = -7s + 2t - 11, x_2 = s, x_3 = -3t - 4, x_4 = -3t + 9, x_5 = t$
d) Inconsistente

6. a) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$ b) $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}, x_3 = t$
c) $x = t - 1, y = 2s, z = s, w = t$ d) Inconsistente

8. a) Inconsistente b) $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 7$ c) $x_1 = 3 + 2t, x_2 = t$
d) $x = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}t - \frac{3}{5}s, y = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}t - \frac{1}{10}s, z = t, w = s$

10. a) $x_1 = 2 - 12t, x_2 = 5 - 27t, x_3 = t$ b) Inconsistente
c) $u = -2s - 3t - 6, v = s, w = -t - 2, x = t + 3, y = t$

12. a), c), d) 13. a) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
b) $x_1 = -s, x_2 = -t - s, x_3 = 4s, x_4 = t$
c) $w = t, x = -t, y = t, z = 0$

14. a) La única solución es la trivial b) $u = 7s - 5t, v = -6s + 4t, w = 2s, x = 2t$
c) La única solución es la trivial

15. $I_1 = -1, I_2 = 0, I_3 = 1, I_4 = 2$ 16. a) $x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b, y = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{9}b$
b) $x_1 = a - \frac{1}{3}c, x_2 = a - \frac{1}{2}b, x_3 = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$

17. $a = -4$, ninguna solución; $a \neq \pm 4$, exactamente una; $a = 4$, infinidad

19. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son respuestas posibles.

20. $\alpha = \pi/2, \beta = \pi, \gamma = 0$ 21. $x = \pm 1, y = \pm\sqrt{3}, z = \pm\sqrt{2}$

23. $\lambda = 4, \lambda = 2$ 25. $a = 1, b = -6, c = 2, d = 10$ 26. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 29 = 0$

30. a) $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}s, x_3 = s$ 34. Una respuesta posible: $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$
b) $x_1 = -\frac{1}{2}s, x_2 = 0, x_3 = s$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.3 (Página 58)

1. a) Indefinida b) 4×2 c) Indefinida d) Indefinida e) 5×5 f) 5×2 g) Indefinida h) 5×2 2. $a = 5, b = -3, c = 4, d = 1$

3. a) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{bmatrix}$

e) Indefinida f) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

i) 5 j) -25 (k) 168 (l) Indefinida

4. a) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ d) Indefinida

e) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 9 & -13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) Indefinida c) $\begin{bmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 11 \\ 12 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 48 & -20 & 14 \\ 24 & 8 & 16 \end{bmatrix}$

i) 61 (j) 35 (k) 28

6. a) $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 36 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ b) Indefinida c) $\begin{bmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. a) $[67 \quad 41 \quad 41]$ b) $[63 \quad 67 \quad 57]$ c) $\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix}$ e) $[24 \quad 56 \quad 97]$ f) $\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix}$

8. a) $\begin{bmatrix} 67 \\ 64 \\ 63 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 41 \\ 59 \\ 57 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -6 \\ 17 \\ 41 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 70 \\ 31 \\ 122 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

10. a) $[67 \;\; 41 \;\; 41] = 3[6 \;\; -2 \;\; 4] - 2\,[0 \;\; 1 \;\; 3] + 7[7 \;\; 7 \;\; 5]$
$[64 \;\; 21 \;\; 59] = 6[6 \;\; -2 \;\; 4] + 5\,[0 \;\; 1 \;\; 3] + 4[7 \;\; 7 \;\; 5]$
$[63 \;\; 67 \;\; 57] = 0[6 \;\; -2 \;\; 4] + 4[0 \;\; 1 \;\; 3] + 9[7 \;\; 7 \;\; 5]$
b) $[6 \;\; -6 \;\; 70] = 6[3 \;\; -2 \;\; 7] - 2[6 \;\; 5 \;\; 4] + 4[0 \;\; 4 \;\; 9]$
$[6 \;\; 17 \;\; 31] = 0[3 \;\; -2 \;\; 7] + 1[6 \;\; 5 \;\; 4] + 3[0 \;\; 4 \;\; 9]$
$[63 \;\; 41 \;\; 122] = 7[3 \;\; -2 \;\; 7] + 7[6 \;\; 5 \;\; 4] + 5[0 \;\; 4 \;\; 9]$

13. a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} 3w - 2x + z &= 0 \\ 5w + 2y - 2z &= 0 \\ 3w + x + 4y + 7z &= 0 \\ -2w + 5x + y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

15. $\begin{bmatrix} -1 & 23 & -10 \\ 37 & -13 & 8 \\ 29 & 23 & 41 \end{bmatrix}$

16. a) $\begin{bmatrix} -3 & -15 & -11 \\ 21 & -15 & 44 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -7 & -19 & -43 \\ 2 & 2 & 18 & 17 \\ 0 & 5 & 25 & 35 \\ 2 & 3 & 23 & 24 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 4 & -4 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

17. a) A_{11} es una matriz de 2×3 y B_{11} es una matriz 2×2. $A_{11}B_{11}$ no existe.

b) $\begin{bmatrix} -1 & 23 & -10 \\ 37 & -13 & 8 \\ 29 & 23 & 41 \end{bmatrix}$

21. a) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$

22. a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.4 (Página 73)

4. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **6.** No

7. a) $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{6}{13} \end{bmatrix}$

8. $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 28 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $A^2 - 2A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

9. a) $p(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ b) $p(A) = \begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$ c) $p(A) = \begin{bmatrix} 39 & 13 \\ 26 & 13 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ **12.** c) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ **13.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$

18. $0A$ y $A0$ no pueden tener el mismo tamaño. **19.** $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

20. a) Un ejemplo es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

b) Un ejemplo es $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.5 (Página 83)

1. c), d), f)

2. a) Sumar tres veces el primer renglón al segundo renglón.
b) Multiplicar por $\frac{1}{3}$ el tercer renglón.
c) Intercambiar el primer renglón y el cuarto renglón.
d) Sumar $\frac{1}{7}$ veces el tercer renglón al primer renglón.

3. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. No, porque C no se puede obtener efectuando una sola operación en los renglones de B.

5. a) $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{39} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$ c) No es invertible

6. a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ b) No es invertible c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7. a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{26} & \frac{-3\sqrt{2}}{26} & 0 \\ \frac{4\sqrt{2}}{26} & \frac{\sqrt{2}}{26} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ d) No es invertible

8. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$

9. a) $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ b) $A^{-1} = E_2E_1$ c) $A = E_1^{-1}E_2^{-1}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. b) Sumar -1 veces el primer renglón al segundo renglón.
Sumar -1 veces el primer renglón al tercer renglón.
Sumar -1 veces el segundo renglón al primer renglón.
Sumar el segundo renglón al tercer renglón.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.6 (Página 92)

1. $x_1 = 3, x_2 = -1$ **2.** $x_1 = -3, x_2 = -3$ **3.** $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -7$ **4.** $x_1 = 1, x_2 = -11, x_3 = 16$

5. $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -1$ **6.** $w = -6, x = 1, y = 10, z = -7$ **7.** $x_1 = 2b_1 - 5b_2, x_2 = -b_1 + 3b_2$

8. $x_1 = -\frac{15}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{5}{2}b_3, x_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3, x_3 = \frac{5}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3$

9. a) $x_1 = \frac{16}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}, x_3 = -\frac{11}{3}$ b) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{10}{3}$ c) $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -4$

11. a) $x_1 = \frac{22}{17}, x_2 = \frac{1}{17}$
b) $x_1 = \frac{21}{17}, x_2 = \frac{11}{17}$

12. a) $x_1 = -18, x_2 = -1, x_3 = -14$
b) $x_1 = -\frac{421}{2}, x_2 = -\frac{25}{2}, x_3 = -\frac{327}{2}$

13. a) $x_1 = \frac{7}{15}, x_2 = \frac{4}{15}$
b) $x_1 = \frac{34}{15}, x_2 = \frac{28}{15}$
c) $x_1 = \frac{19}{15}, x_2 = \frac{13}{15}$
d) $x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = \frac{3}{5}$

14. a) $x_1 = 18, x_2 = -9, x_3 = 2$
b) $x_1 = -23, x_2 = 11, x_3 = -2$
c) $x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 0$

15. a) $x_1 = -12 - 3t, x_2 = -5 - t, x_3 = t$
b) $x_1 = 7 - 3t, x_2 = 3 - t, x_3 = t$

16. $b_1 = 2b_2$ **17.** $b_1 = b_2 + b_3$ **18.** No hay restricciones **19.** $b_1 = b_3 + b_4, b_2 = 2b_3 + b_4$

21. $X = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}$

22. a) Sólo la solución trivial $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; invertible
b) Infinidad de soluciones; no es invertible

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.7 (Página 100)

1. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ b) No es invertible c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -24 & -10 & 12 \\ 3 & -10 & 0 \\ 60 & 20 & -16 \end{bmatrix}$

3. a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad A^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(-2)^k \end{bmatrix}$

b) $A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad A^{-k} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix}$

4. b), c) **5.** a) **6.** $a = 11, b = -9, c = -13$ **7.** $a = 2, b = -1$

8. a) No conmuta b) Conmuta **10.** a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ b) No **19.** $\frac{n}{2}(1+n)$

20. a) Es simétrica b) No es simétrica c) Es simétrica d) No es simétrica

24. a) $x_1 = \frac{7}{4}, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}$ b) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -\frac{5}{2}, x_3 = -3$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 1 (Página 102)

1. $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ **2.** $x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta, y' = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$

3. Una respuesta posible es
$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$
$x_1 + 5x_2 + 2x_4 = 0$

4. 3 monedas de 1 centavo, 4 de 5 centavos y 6 de 10 centavos.

5. $x = 4, y = 2, z = 3$ **6.** Infinidad si $a = 2$ o $a = -\frac{3}{2}$; ninguna en caso contrario

7. a) $a \neq 0, b \neq 2$ b) $a \neq 0, b = 2$ c) $a = 0, b = 2$ d) $a = 0, b \neq 2$ **8.** $x = \frac{5}{9}, y = 9, z = \frac{1}{3}$ 9. $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $a = 2, b = -1, c = 1$ **11.** a) $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ c) $X = \begin{bmatrix} -\frac{113}{37} & -\frac{160}{37} \\ -\frac{20}{37} & -\frac{46}{37} \end{bmatrix}$

12. a) $Z = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 11 \\ 14 & 10 & -26 \end{bmatrix}X$ b) $z_1 = -x_1 - 7x_2 + 11x_3$
$z_2 = 14x_1 + 10x_2 - 26x_3$

13. mpn multiplicaciones y $mp(n-1)$ adiciones **15.** $a = 1, b = -2, c = 3$

16. $a = 1, b = -4, c = -5$ **26.** $A = -\frac{7}{5}, B = \frac{4}{5}, C = \frac{3}{5}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.1 (Página 114)

1. a) 5 b) 9 c) 6 d) 10 e) 0 f) 2

2. a) Impar b) Impar c) Par d) Par e) Par f) Par

3. 22 4. 0 5. 52 6. $-3\sqrt{6}$ 7. $a^2 - 5a + 21$ **8.** 0 **9.** -65 **10.** -4 **11.** -123

12. $-c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2$ **13.** a) $\lambda = 1, \lambda = -3$ b) $\lambda = -2, \lambda = 3, \lambda = 4$

16. 275 17. a) $= -120$ b) $= -120$ **18.** $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.2 (Página 120)

1. a) -30 b) -2 c) 0 d) 0 3. a) -5 b) -1 c) 1 4. 30 5. 5 6. -17

7. 33 8. 39 9. 6 **10.** $-\frac{1}{6}$ **11.** -2 **12.** a) -6 b) 72 c) -6 d) 18

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.3 (Página 129)

1. a) $\det(2A) = -40 = 2^2 \det(A)$ b) $\det(-2A) = -208 = (-2)^3 \det(A)$

2. $\det AB = -170 = (\det A)(\det B)$ 4. a) Invertible b) No es invertible c) No es invertible d) No es invertible

5. a) -189 b) $-\frac{1}{7}$ c) $-\frac{8}{7}$ d) $-\frac{1}{56}$ e) 7 6. Si $x = 0$, los renglones primero y tercero son proporcionales. Si $x = 2$, los renglones primero y segundo son proporcionales.

12. a) $k = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ b) $k = -1$

14. a) $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 5 & \lambda + 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. a) $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ b) $\lambda = -1, \lambda = 3$ c) $\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$

a) $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ b) $\lambda = -1, \lambda = 6$ c) $\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix}$

a) $\lambda^2 - 4 = 0$ b) $\lambda = -2, \lambda = 2$ c) $\begin{bmatrix} \frac{t}{5} \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.4 (Página 142)

1. a) $M_{11} = 29, M_{12} = 21, M_{13} = 27, M_{21} = -11, M_{22} = 13, M_{23} = -5, M_{31} = -19, M_{32} = -19, M_{33} = 19$
b) $C_{11} = 29, C_{12} = -21, C_{13} = 27, C_{21} = 11, C_{22} = 13, C_{23} = 5, C_{31} = -19, C_{32} = 19, C_{33} = 19$

2. a) $M_{13} = 0, C_{13} = 0$ b) $M_{23} = -96, C_{23} = 96$ 3. 152
c) $M_{22} = -48, C_{22} = -48$ d) $M_{21} = 72, C_{21} = -72$

4. a) $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 29 & 11 & -19 \\ -21 & 13 & 19 \\ 27 & 5 & 19 \end{bmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{29}{152} & \frac{11}{152} & -\frac{19}{152} \\ -\frac{21}{152} & \frac{13}{152} & \frac{19}{152} \\ \frac{27}{152} & \frac{5}{152} & \frac{19}{152} \end{bmatrix}$

5. -40 6. -66 7. 0 8. $k^3 - 8k^2 - 10k + 95$ 9. -240 10. 0

11. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ 12. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 13. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{29}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ 15. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ 16. $x_1 = 1, x_2 = 2$

17. $x = \frac{3}{11}, y = \frac{2}{11}, z = -\frac{1}{11}$ 18. $x = -\frac{144}{55}, y = -\frac{61}{55}, z = \frac{46}{11}$

19. $x_1 = -\frac{30}{11}, x_2 = -\frac{38}{11}, x_3 = -\frac{40}{11}$ 20. $x_1 = 5, x_2 = 8, x_3 = 3, x_4 = -1$

21. No es válida la regla de Cramer. 22. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 23. $y = 0$

24. $x = 1, y = 0, z = 2, w = 0$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 2 (Página 145)

1. $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ 2. $x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta, y' = -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta$ 4. 2

5. $\cos\beta = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 10. b) $\frac{19}{2}$ 12. $\det(B) = -1^{n(n-1)/2}\det(A)$

13. a) Deben intercambiar las columnas i-ésima y j-ésima.
b) La i-ésima columna se debe dividir entre c.
c) La j-ésima columna se debe sumar $-c$ veces a la i-ésima columna.

15. a) $\lambda^3 + (-a_{11} - a_{22} - a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32})\lambda + (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32})$

18. a) $\lambda = -5, \lambda = 2, \lambda = 4; \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7t \\ 19t \\ t \end{bmatrix}$ b) $\lambda = 1; \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.1 (Página 157)

3. a) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, -1)$ b) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-7, -2)$ c) $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1)$ d) $\overrightarrow{P_1P_2} = (a, b)$
e) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-5, 12, -6)$ f) $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -1, -2)$ g) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-a, -b, -c)$ h) $\overrightarrow{P_1P_2} = (a, b, c)$

4. a) $Q(5, 10, -8)$ es una respuesta posible.
b) $Q(-7, -4, -2)$ es una respuesta posible.

5. a) $P(-1, 2, -4)$ es una respuesta posible.
b) $P(7, -2, -6)$ es una respuesta posible.

6. a) $(-2, 1, -4)$ b) $(-10, 6, 4)$ c) $(-7, 1, 10)$
d) $(80, -20, -80)$ e) $(132, -24, -72)$ f) $(-77, 8, 94)$

7. $\mathbf{x} = (-\frac{8}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{3})$

8. $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 2$ 10. $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 11. a) $(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ b) $(\frac{23}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$

12. a) $x' = 5, y' = 8$ b) $x = -1, y = 3$

14. $\mathbf{u} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right), \mathbf{v} = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{u} + \mathbf{v} = \left(\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{u} - \mathbf{v} = \left(\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}, \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.2 (Página 162)

1. a) 5 b) $\sqrt{13}$ c) 5 d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$ f) 6
2. a) $\sqrt{13}$ b) $2\sqrt{26}$ c) $\sqrt{209}$ d) $3\sqrt{2}$
3. a) $\sqrt{83}$ b) $\sqrt{17} + \sqrt{26}$ c) $4\sqrt{17}$ d) $\sqrt{466}$ e) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{61}}, \dfrac{6}{\sqrt{61}}, -\dfrac{4}{\sqrt{61}}\right)$ f) 1
4. $k = \pm\dfrac{4}{\sqrt{30}}$ 8. Una esfera de radio 1 con centro en (x_0, y_0, z_0)

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.3 (Página 173)

1. a) -11 b) -24 c) 0 d) 0 **2.** a) $-\dfrac{11}{\sqrt{13}\sqrt{74}}$ b) $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ c) 0 d) 0

3. a) Son ortogonales b) Obtuso c) Agudo d) Obtuso

4. a) $(0, 0)$ b) $(\frac{8}{13}, -\frac{12}{13})$ c) $(-\frac{16}{13}, 0, -\frac{80}{13})$ d) $(\frac{16}{89}, \frac{12}{89}, \frac{32}{89})$

5. a) $(6, 2)$ b) $(-\frac{21}{13}, -\frac{14}{13})$ c) $(\frac{55}{13}, 1, -\frac{11}{13})$ d) $(\frac{73}{89}, -\frac{12}{89}, -\frac{32}{89})$

6. a) $\frac{2}{5}$ b) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ c) $\dfrac{18}{\sqrt{22}}$ d) $\dfrac{43}{\sqrt{54}}$ **9.** a) 102 b) $125\sqrt{2}$ c) 170 d) 170

11. $\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\theta_2 = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\theta_3 = 0$ **12.** El ángulo recto está en B.

13. No. La ecuación se cumple si **b** y **c** son perpendiculares a **a** y $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$.

15. a) 1 b) $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$ **19.** b) $\cos\beta = \dfrac{b}{\|\mathbf{v}\|}$, $\cos\gamma = \dfrac{c}{\|\mathbf{v}\|}$ **20.** $\theta_1 \approx 71°$, $\theta_2 \approx 61°$, $\theta_3 \approx 36°$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.4 (Página 187)

1. a) $(32, -6, -4)$ b) $(-14, -20, -82)$ c) $(27, 40, -42)$
d) $(0, 176, -264)$ e) $(-44, 55, -22)$ f) $(-8, -3, -8)$

2. a) $(18, 36, -18)$ b) $(-3, 9, -3)$ **3.** a) $\sqrt{59}$ b) $\sqrt{101}$ c) 0 **4.** a) $\dfrac{\sqrt{374}}{2}$ b) $\sqrt{285}$

8. a) -10 b) -110 **9.** a) -3 b) 3 c) 3 d) -3 e) -3 f) 0 **10.** a) 16 b) 45

11. a) No b) Sí c) No **12.** $\pm\left(0, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

13. $\left(\dfrac{6}{\sqrt{61}}, -\dfrac{3}{\sqrt{61}}, \dfrac{4}{\sqrt{61}}\right), \left(-\dfrac{6}{\sqrt{61}}, \dfrac{3}{\sqrt{61}}, -\dfrac{4}{\sqrt{61}}\right)$ **15.** $2(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ **16.** $\dfrac{12\sqrt{13}}{49}$

17. a) $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$ **19.** a) $\dfrac{2\sqrt{141}}{\sqrt{29}}$ b) $\dfrac{\sqrt{137}}{3}$ **21.** a) $\sqrt{122}$ b) $\theta \approx 40°19''$

23. a) $\mathbf{m} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ b) $(-1, 0, 0)$ c) $(0, 0, -1)$ **28.** $(-8, 0, -8)$ **31.** a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.5 (Página 198)

1. a) $-2(x + 1) + (y - 3) - (z + 2) = 0$
b) $(x - 1) + 9(y - 1) + 8(z - 4) = 0$
c) $2z = 0$
d) $x + 2y + 3z = 0$

2. a) $-2x + y - z - 7 = 0$
b) $x + 9y + 8z - 42 = 0$
c) $2z = 0$
d) $x + 2y + 3y = 0$

3. a) $(0, 0, 5)$ es un punto en el plano y $\mathbf{n} = (-3, 7, 2)$ es un vector normal de modo que $-3(x - 0) + 7(y - 0) + 2(z - 5) = 0$ es una forma punto-normal; otros puntos y otras normales producen otras respuestas correctas.

4. a) $2y - z + 1 = 0$ b) $x + 9y - 5z - 26 = 0$

5. a) No son paralelos b) Son paralelos c) Son paralelos

6. a) Son paralelos b) No son paralelos

7. a) No son perpendiculares b) Son perpendiculares

8. a) Son perpendiculares b) No son perpendiculares

9. a) $x = 3 + 2t, y = -1 + t, z = 2 + 3t$
b) $x = -2 + 6t, y = 3 - 6t, z = -3 - 2t$
c) $x = 2, y = 2 + t, z = 6$
d) $x = t, y = -2t, z = 3t$

10. a) $x = 5 + t, y = -2 + 2t, z = 4 - 4t$
b) $x = 2t, y = -t, z = -3t$

11. a) $x = -12 - 7t, y = -41 - 23t, z = t$
b) $x = \frac{5}{2}t, y = 0, z = t$

12. a) $(-2, 4, 1) \cdot (x + 1, y - 2, z - 4) = 0$
b) $(-1, 4, 3) \cdot (x - 2, y, z + 5) = 0$
c) $(-1, 0, 0) \cdot (x - 5, y + 2, z - 1) = 0$
d) $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$

13. a) Son paralelos b) No son paralelos

14. a) Son perpendiculares
b) No son perpendiculares

15. a) $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(7, -1, 5) \quad (-\infty < t < +\infty)$
b) $(x, y, z) = (2, 0, -1) + t(1, 1, 1) \quad (-\infty < t < +\infty)$
c) $(x, y, z) = (2, -4, 1) + t(0, 0, -2) \quad (-\infty < t < +\infty)$
d) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(a, b, c) \quad (-\infty < t < +\infty)$

17. $2x + 3y - 5z + 36 = 0$ **18.** a) $z = 0$ b) $y = 0$ c) $x = 0$

19. a) $z - z_0 = 0$ b) $x - x_0 = 0$ c) $y - y_0 = 0$ **20.** $7x + 4y - 2z = 0$ **21.** $5x - 2y + z - 34 = 0$

22. $(-\frac{173}{3}, -\frac{43}{3}, \frac{49}{3})$ **23.** $y + 2z - 9 = 0$ **24.** $x - y - 4z - 2 = 0$ **26.** $x = \frac{11}{5}t - 2, y = -\frac{2}{5}t + 5, z = t$

27. $x + 5y + 3z - 18 = 0$ **28.** $(x - 2) + (y + 1) - 3(z - 4) = 0$ **29.** $4x + 13y - z - 17 = 0$

30. $3x + 10y + 4z - 53 = 0$ **31.** $3x - y - z - 2 = 0$ **32.** $5x - 3y + 2z - 5 = 0$

33. $2x + 4y + 8z + 13 = 0$ **36.** $x - 4y + 4z + 9 = 0$

37. a) $x = \frac{11}{23} + \frac{7}{23}t, y = -\frac{41}{23} - \frac{1}{23}t, z = t$
b) $x = -\frac{2}{3}t, y = 0, z = t$

39. a) $\frac{5}{3}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ **40.** a) $\dfrac{1}{2\sqrt{26}}$ b) 0 c) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

42. a) $\dfrac{x-3}{2} = y + 1 = \dfrac{z-2}{3}$ b) $\dfrac{x+2}{6} = -\dfrac{y-3}{6} = -\dfrac{z+3}{2}$

43. a) $x - 2y - 17 = 0$ y $x + 4z - 27 = 0$ es una respuesta posible.
b) $x - 2y = 0$ y $-7y + 2z = 0$ es una respuesta posible.

44. a) $\theta \approx 35°$ b) $\theta \approx 79°$ **45.** $\theta \approx 75°$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.1 (Página 215)

1. a) $(-1, 9, -11, 1)$ b) $(22, 53, -19, 14)$ c) $(-13, 13, -36, -2)$
d) $(-90, -114, 60, -36)$ e) $(-9, -5, -5, -3)$ f) $(27, 29, -27, 9)$

2. $(\frac{6}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5})$ **3.** $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1$ **5.** a) $\sqrt{29}$ b) 3 c) 13 d) $\sqrt{31}$

6. a) $\sqrt{133}$ b) $\sqrt{30} + \sqrt{77}$ c) $4\sqrt{30}$ d) $\sqrt{1811}$ e) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}, \dfrac{2}{3\sqrt{2}}, \dfrac{2}{3\sqrt{2}}\right)$ f) 1

8. $k = \pm\frac{5}{7}$ **9.** a) 7 b) 14 c) 7 d) 11 **10.** a) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\text{[illegible]}}\right)$ [illegible] $-\frac{3}{\sqrt{10}}\Big)$

11. a) $\sqrt{10}$ b) $2\sqrt{14}$ c) $\sqrt{59}$ d) 10

14. a) Sí b) No c) Sí d) No e) No f) Sí **15.** a) $k = -3$ b) $k = -2, k = -3$

16. $\pm\frac{1}{37}(-34, 44, -6, 11)$ **19.** $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ **20.** -6

33. a) Medida euclidiana de la "caja" en R^n: $a_1\, a_2 \cdots a_n$
b) Longitud de la diagonal: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.2 (Página 235)

1. a) Lineal; $R^3 \to R^2$ b) No lineal; $R^2 \to R^3$
c) Lineal; $R^3 \to R^3$ d) No lineal; $R^4 \to R^2$

2. a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $T(-1, 2, 4) = (3, -2, -3)$

4. a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 6x_1 - x_3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 + 8x_2 \end{bmatrix}$

7. a) $T(-1, 4) = (5, 4)$ (b) $T(2, 1, -3) = (0, -2, 0)$

8. a) $(-1, -2)$ (b) $(1, 2)$ c) $(2, -1)$ **9.** a) $(2, -5, -3)$ b) $(2, 5, 3)$ c) $(-2, -5, 3)$

10. a) $(2, 0)$ (b) $(0, -5)$ **11.** a) $(-2, 1, 0)$ b) $(-2, 0, 3)$ c) $(0, 1, 3)$

12. a) $\left(\frac{3\sqrt{3} + 4}{2}, \frac{3 - 4\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $\left(\frac{3 - 4\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{3} - 4}{2}\right)$ c) $\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ d) $(4, 3)$

13. a) $\left(-2, \frac{\sqrt{3} - 2}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $(0, 1, 2\sqrt{2})$ c) $(-1, -2, 2)$

14. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. a) $\left(-2, \dfrac{\sqrt{3}+2}{2}, \dfrac{-1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $(-2\sqrt{2}, 1, 0)$ c) $(1, 2, 2)$

16. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

17. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

18. a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. a) $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/8 & -\sqrt{3}/16 & 1/16 \\ 1/8 & 3/16 & -\sqrt{3}/16 \\ 0 & 1/8 & \sqrt{3}/8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

20. a) Sí b) Sí c) Sí d) No **21.** a) Sí b) No

22. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1-\cos\theta)+\cos\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)+\cos\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$ **26.** 135° **28.** c) 90°

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.3 (Página 252)

1. a) No es uno a uno b) Es uno a uno c) Es uno a uno d) Es uno a uno
e) Es uno a uno f) Es uno a uno g) Es uno a uno

2. a) $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; No es uno a uno b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$; Es uno a uno

c) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$; No es uno a uno d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; Es uno a uno

3. Por ejemplo, el vector $(1, 3)$ no está en el dominio.

4. Por ejemplo, el vector $(1, 6, 2)$ no está en el dominio.

5. a) Es uno a uno; $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $T^{-1}(w_1, w_2) = (\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2, \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2)$ b) No es uno a uno

c) Es uno a uno; $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $T^{-1}(w_1, w_2) = (-x_2, -x_1)$ d) No es uno a uno

6. a) Es uno a uno; $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$; $T^{-1}(w_1, w_2, w_3) = (x_1 - 2x_2 + 4x_3, -x_1 + 2x_2 - 3x_3, -x_1 + 3x_2 - 5x_3)$

b) Es uno a uno; $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$; $T^{-1}(w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}, \frac{-5x_1 + 5x_2 + 3x_3}{14}, \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{7}\right)$

c) Es uno a uno; $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $T^{-1}(w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{-3x_1 - 3x_2 + 11x_3}{2}, \frac{x_1 + x_2 - 3x_3}{2}, \frac{-x_1 + x_2 - x_3}{2}\right)$

d) No es uno a uno

7. a) Reflexión con respecto al eje x. b) Rotación por el ángulo $-\pi/4$.
c) Contracción por un factor de $\frac{1}{3}$. d) Reflexión con respecto al plano yz.
e) Dilatación por un factor de 5.

8. a) Lineal b) No lineal c) Lineal d) Lineal

9. a) Lineal b) No lineal c) Lineal d) No lineal

10. a) Lineal b) No lineal **11.** a) Lineal b) No lineal

12. a) Para una reflexión con respecto al eje y. $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por tanto, $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Para una reflexión con respecto al plano xz. $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, y $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Por tanto, $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Para una proyección ortogonal sobre el eje x. $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por tanto, $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

d) Para una proyección ortogonal sobre el plano z. $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, y $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Por tanto, $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

e) Para una rotación en un ángulo positivo θ, $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$ y $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$.

Por tanto, $T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

f) Para una dilatación por un factor $k \geq 1$, $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$. Por tanto, $T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$.

13. a) $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por tanto, $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por tanto, $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por tanto, $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

14. a) $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$, y $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$. Por tanto, $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

b) $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, y $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por tanto, $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, y $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Por tanto, $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

15. a) $T_A(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $T_A(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, y $T_A(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

b) $T_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = T_A(\mathbf{e}_1) + T_A(\mathbf{e}_2) + T_A(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ c) $T_A(7\mathbf{e}_3) = 7T_A(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ -21 \end{bmatrix}$

16. a) Transformación lineal de $R^2 \to R^3$ b) Transformación lineal de $R^3 \to R^2$

17. a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ b) $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ c) $\left(\frac{1 - 5\sqrt{3}}{4}, \frac{15 - \sqrt{3}}{4}\right)$

18. a) $\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ c) $\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\lambda = \frac{1}{2}$; todos los vectores en R^2 son eigenvectores

$\lambda = -1$; $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$ $\lambda = -1$; $\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$ $\lambda = 0$; $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$

19. a) $\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$ b) $\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$

$\lambda = -1$; $\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda = 0$; $\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\lambda = 2$; todos los vectores en R^3 son eigenvectores d) $\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$

20. a) Sí (b) No

23. a) $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ b) $\left(\dfrac{1+5\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-5}{2}\right)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.1 (Página 263)

1. No es un espacio vectorial. No se cumple el axioma 8.
2. No es un espacio vectorial. No se cumple el axioma 10.
3. No es un espacio vectorial. No se cumplen los axiomas 9 y 10.
4. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
5. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
6. No es un espacio vectorial. No se cumplen los axiomas 5 y 6.
7. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
8. No es un espacio vectorial. No se cumplen los axiomas 7 y 8.
9. No es un espacio vectorial. No se cumplen los axiomas 1, 4, 5 y 6.
10. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
11. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
12. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.
13. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.2 (Página 274)

1. a), c) 2 b) 3. a), b), d) 4. b), d), e) 5. a), b)

6. a) Recta, $x = -\frac{1}{2}t, y = -\frac{3}{2}t, z = t$
   b) Recta; $x = 2t, y = t, z = 0$
   c) El origen
   d) El origen
   e) Recta; $x = -3t, y = -2t, z = t$
   f) Plano; $x - 3y + z = 0$

7. a), b), d)

8. a) $(-9, -7, -15) = -2\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$
b) $(6, 11, 6) = 4\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}$
c) $(0, 0, 0) = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}$
d) $(7, 8, 9) = 0\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$

9. a) $-9 - 7x - 15x^2 = -2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_3$
b) $6 + 11x + 6x^2 = 4\mathbf{p}_1 - 5\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$
c) $0 = 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2 + 0\mathbf{p}_3$
d) $7 + 8x + 9x^2 = 0\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + 3\mathbf{p}_3$

11. a) Los vectores generan. b) Los vectores no generan.
c) Los vectores no generan. d) Los vectores generan.

12. a), c), e) **13.** No

14. a), b), d) **15.** $y = z$ **16.** $x = 3t$, $y = -2t$, $z = 5t$, donde $-\infty < t < +\infty$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.3 (Página 285)

1. a) $\mathbf{u}_2$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{u}_1$. b) Por el teorema 5.1.3, los vectores son linealmente independientes.
c) $\mathbf{p}_2$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{p}_1$. d) B es un múltiplo escalar de A.

2. d) **3.** Ninguno **4.** d)

5. a) No están en un plano.
b) Están en un plano.

6. a) No están en la misma recta.
b) No están en la misma recta.
c) Están en la misma recta.

7. b) $\mathbf{v}_1 = \frac{2}{7}\mathbf{v}_2 - \frac{3}{7}\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 = \frac{7}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_3 = -\frac{7}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_2$ **8.** $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 1$

17. Si y sólo si el vector es diferente de cero.

18. a) Son linealmente independientes porque $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ no están en el mismo plano cuando se colocan con sus puntos iniciales en el origen.
b) No son linealmente independientes porque $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ están en el mismo plano cuando se colocan con sus puntos iniciales en el origen.

19. a), d), e), f).

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.4 (Página 303)

1. a) Una base para R^2 tiene dos vectores linealmente independientes.
b) Una base para R^3 tiene tres vectores linealmente independientes.
c) Una base para P_2 tiene tres vectores linealmente independientes.
d) Una base para M_{22} tiene cuatro vectores linealmente independientes.

2. a), b) **3.** a), b) **4.** c), d) **6.** b) Dos vectores cualquiera $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$

7. a) $(\mathbf{w})_S = (3, -7)$ b) $(\mathbf{w})_S = (\frac{5}{28}, \frac{3}{14})$ c) $(\mathbf{w})_S = \left(a, \dfrac{b-a}{2}\right)$

8. a) $(\mathbf{v})_S = (3, -2, 1)$ b) $(\mathbf{v})_S = (-2, 0, 1)$ **9.** a) $(\mathbf{p})_S = (4, -3, 1)$ b) $(\mathbf{p})_S = (0, 2, -1)$

10. $(A)_S = (-1, 1, -1, 3)$ **11.** Base: $(1, 0, 1)$; dimensión $= 1$

12. Base: $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 1)$; dimensión $= 2$

13. Base: (4, 1, 0, 0), (− 3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1); dimensión = 3

14. Base: (3, 1, 0), (− 1, 0, 1); dimensión = 2 **15.** No es base; dimensión = 0

16. Base: (4, − 5, 1); dimensión = 1 **17.** a) $(\frac{2}{3}, 1, 0), (-\frac{5}{3}, 0, 1)$ b) (1, 1, 0), (0, 0, 1) c) (2, − 1, 4) d) (1, 1, 0), (0, 1, 1)

18. a) tridimensional b) bidimensional c) unidimensional **19.** tridimensional

20. a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\}$ o $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2\}$ b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\}$ o $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2\}$ o $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3\}$

21. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ o $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$ o $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$

26. a) Una respuesta posible es $\{-1 + x - 2x^2, 3 + 3x + 6x^2, 9\}$.
b) Una respuesta posible es $\{1 + x, x^2, -2 + 2x^2\}$.
c) Una respuesta posible es $\{1 + x - 3x^2\}$.

27. a) $(0, \sqrt{2})$ b) $(1, 0)$ c) $(-1, \sqrt{2})$ d) $(a - b, \sqrt{2}b)$

28. a) $(2, 0)$ b) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ c) $(0, 1)$ d) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a, b - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.5 (Página 319)

1. $\mathbf{r}_1 = (2, -1, 0, 1)$, $\mathbf{r}_2 = (3, 5, 7, -1)$, $\mathbf{r}_3 = (1, 4, 2, 7)$; $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

2. a) $1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ b) $-2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 22 \\ 17 \end{bmatrix}$

c) $-1\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -13 \\ -1 \\ 30 \end{bmatrix}$ d) $3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 58 \end{bmatrix}$

3. a) $\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ b) **b** no es el espacio columna de A.

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (t - 1)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = -26\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. a) $r\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}4\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\-3\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}4\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$

5. a) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix};\ t\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-2\\7\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix};\ t\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\end{bmatrix};\ r\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{7}{5}\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\\frac{4}{5}\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\-\frac{3}{5}\\0\\1\end{bmatrix};\ s\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\\frac{4}{5}\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\-\frac{3}{5}\\0\\1\end{bmatrix}$

6. a) $\begin{bmatrix}16\\19\\1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-4\\0\\7\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-16\\2\\5\\0\\12\end{bmatrix}$

7. a) $\mathbf{r}_1=[1\quad 0\quad 2]$, $\mathbf{r}_2=[0\quad 0\quad 1]$, $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

b) $\mathbf{r}_1=[1\quad -3\quad 0\quad 0]$, $\mathbf{r}_2=[0\quad 1\quad 0\quad 0]$, $\mathbf{c}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

c) $\mathbf{r}_1=[1\quad 2\quad 4\quad 5]$, $\mathbf{r}_2=[0\quad 1\quad -3\quad 0]$, $\mathbf{r}_3=[0\quad 0\quad 1\quad -3]$, $\mathbf{r}_4=[0\quad 0\quad 0\quad 1]$,

$\mathbf{c}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_3=\begin{bmatrix}4\\-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_4=\begin{bmatrix}5\\0\\-3\\1\\0\end{bmatrix}$

d) $\mathbf{r}_1=[1\quad 2\quad -1\quad 5]$, $\mathbf{r}_2=[0\quad 1\quad 4\quad 3]$, $\mathbf{r}_3=[0\quad 0\quad 1\quad -7]$, $\mathbf{r}_4=[0\quad 0\quad 0\quad 1]$,

$\mathbf{c}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_3=\begin{bmatrix}-1\\4\\1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_4=\begin{bmatrix}5\\3\\-7\\1\end{bmatrix}$

8. a) $(1, -1, 3), (0, 1, -19)$ b) $(1, 0, -\frac{1}{2})$ c) $(1, 4, 5, 2), (0, 1, 1, \frac{4}{7})$
d) $(1, 4, 5, 6, 9), (0, 1, 1, 1, 2)$ e) $(1, -3, 2, 2, 1), (0, 1, 2, 0, -1), (0, 0, 1, 0, -\frac{5}{12})$

9. a) $\begin{bmatrix}1\\5\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-4\\-6\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-2\\0\\3\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\3\\-3\\-6\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\-2\\0\\2\end{bmatrix}$

10. a) $(1, -1, 3), (5, -4, -4)$ b) $(2, 0, -1)$ c) $(1, 4, 5, 2), (2, 1, 3, 0)$
d) $(1, 4, 5, 6, 9), (3, -2, 1, 4, -1)$ (e) $(1, -3, 2, 2, 1), (0, 3, 6, 0, -3), (2, -3, -2, 4, 4)$

11. a) $(1, 1, -4, -3), (0, 1, -5, -2), (0, 0, 1, -\frac{1}{2})$
b) $(1, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -\frac{1}{6})$
c) $(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)$

12. a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$; $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$
b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$; $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$
c) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$; $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_5 = -\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_4$

14. b) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.6 (Página 333)

1. Rango (A) = Rango $(A^T) = 2$.

2. a) Nulidad = 1, rango = 2; $n = 3$. b) Nulidad = 2, rango = 1; $n = 3$.
c) Nulidad = 2, rango = 2; $n = 4$. d) Nulidad = 3, rango = 2; $n = 5$.
e) Nulidad = 2, rango = 3; $n = 5$.

3. a) 2; 1 b) 1; 2 c) 2; 2 d) 2; 3 e) 3; 2

4. a) 3; 3; 0; 0 b) 2; 2; 1; 1 c) 1; 1; 2; 2 d) 2; 2; 7; 3
e) 2; 2; 3; 7 f) 0; 0; 4; 4 g) 2; 2; 0; 4

5. a) Rango = 4, nulidad = 0 b) Rango = 3, nulidad = 2 c) Rango = 3, nulidad = 0
6. Rango = mín(m, n), nulidad = n − mín(m, n)

7. a) Sí, 0
b) No
c) Sí, 2
d) Sí, 7
e) No
f) Sí, 4
g) Sí, 0

8. a) Nulidad = 0, número de parámetros = 0
b) Nulidad = 1, número de parámetros = 1
c) Nulidad = 2, número de parámetros = 2
d) Nulidad = 7, número de parámetros = 7
e) Nulidad = 7, número de parámetros = 7
f) Nulidad = 4, número de parámetros = 4
g) Nulidad = 0, número de parámetros = 0

9. $b_1 = r$, $b_2 = s$, $b_3 = 4s - 3r$, $b_4 = 2r - s$, $b_5 = 8s - 7r$

12. a) Rango $(A) = 1$ si $t = 1$; rango $(A) = 2$ si $t = -2$; rango $(A) = 3$ si $t = 1, -2$
b) Rango $(A) = 2$ si $t = 1, 3/2$; rango $(A) = 3$ si $t \neq 1, 3/2$

13. El rango es 2 si $r = 2$ y $s = 1$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 5 (Página 335)

1. a) Todo R^3
b) Plano: $2x - 3y + z = 0$
c) Recta: $x = 2t, y = t, z = 0$
d) El origen: $(0, 0, 0)$

2. Una recta que pasa por el origen: $s = -2$
Un plano que pasa por el origen: $s = 1$
Sólo el origen: $s \neq 1, -2$
Todo R^3; ningún valor de s

3. a) $a(4, 1, 1) + b(0, -1, 2)$ b) $(a + c)(3, -1, 2) + b(1, 4, 1)$
c) $a(2, 3, 0) + b(-1, 0, 4) + c(4, -1, 1)$

5. a) $\mathbf{v} = (-1 + r)\mathbf{v}_1 + (\frac{2}{3} - r)\mathbf{v}_2 + r\mathbf{v}_3$; cualquier r **6.** A debe ser invertible **7.** No

8. a) Rango = 2, nulidad = 1
b) Rango = 2, nulidad = 2
c) Rango = 2, nulidad = $n - 2$

9. a) Rango = 2, nulidad = 1
b) Rango = 3, nulidad = 2
c) Rango = $n + 1$, nulidad = n

11. $\{1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, \ldots, x^n\}$ **12.** a) 2 b) 1 c) 2 d) 3 **13.** 0, 1, o 2

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.1 (Página 350)

1. a) 2 b) 11 c) -13 d) -8 e) 0 **2.** a) -2 b) 62 c) -74 d) 8 e) 0

3. a) 3 b) 56 **4.** a) -29 b) -15 **5.** b) 29 **6.** b) -42

7. a) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$

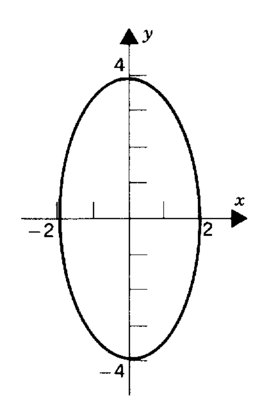
9. a) No se cumple el axioma 4. b) No se cumplen los axiomas 2 y 3. c) Sí d) No se cumple el axioma 4.

10. a) $\sqrt{10}$ (b) $\sqrt{21}$ c) $5\sqrt{5}$ **11.** a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{13}$ **12.** a) $\sqrt{17}$ b) 5

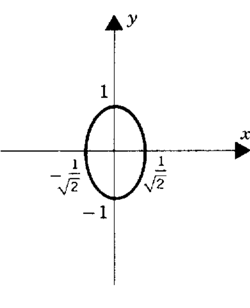
13. a) $\sqrt{74}$ (b) 0 **14.** $3\sqrt{2}$ **15.** a) $\sqrt{105}$ b) $\sqrt{47}$ **16.** a) 8 b) -113 c) -40 d) 3 e) $2\sqrt{53}$ f) $\sqrt{881}$

17. a) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{5}\sqrt{10}$ b) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

18. a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



(b) $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y^2}{1} = 1$



19. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{9}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$ **22.** No se cumple el axioma 4. **27.** a) $-\frac{28}{15}$ b) 0 **28.** a) 0 b) 1

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.2 (Página 363)

1. a) Sí b) No c) Sí d) No e) No f) Sí **2.** No

3. a) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\dfrac{3}{\sqrt{73}}$ c) 0 **4.** a) 0 b) 0 **6.** a) $\dfrac{19}{10\sqrt{7}}$ b) 0

d) $-\dfrac{20}{9\sqrt{10}}$ e) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt{55}}$

7. a) Ortogonales b) Ortogonales **8.** a) $k = -3$ b) $k = -2, k = -3$
c) Ortogonales d) No son ortogonales

9. $\pm\frac{1}{57}(-34, 44, -6, 11)$ **12.** $y = -\frac{1}{2}x$ **13.** a) $x = t, y = -2t, z = -3t$ b) $2x - 5y + 4z = 0$

14. a) $(1, 2, -1, 2), (0, 1, -3, 2)$; $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **15.** a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

16. a) $\begin{bmatrix} 16 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

33. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.3 (Página 380)

1. a), b), d) **2.** b) **3.** b), d) **4.** b), d) **5.** a) **6.** a)

7. a) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0)$

c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$

9. a) $-\frac{7}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ b) $-\frac{37}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{9}{5}\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$ c) $-\frac{3}{7}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{7}\mathbf{v}_2 + \frac{5}{7}\mathbf{v}_3$

10. a) $\frac{1}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{5}{21}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$ b) $\dfrac{15\sqrt{2}}{7}\mathbf{v}_1 + \dfrac{5\sqrt{2}}{21}\mathbf{v}_2 - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\mathbf{v}_3$ c) $-\frac{3}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{11}{63}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{18}\mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_4$

11. a) $(\mathbf{w})_S = (-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$, $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$ b) $(\mathbf{w})_S = (0, -2, 1)$, $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

12. a) $\mathbf{u} = (\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}), \mathbf{v} = (\frac{13}{5}, \frac{16}{5})$ b) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}, d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{13}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3$

13. a) $\mathbf{u} = (1, \frac{14}{5}, -\frac{2}{5}), \mathbf{v} = (0, -\frac{17}{5}, \frac{6}{5}), \mathbf{w} = (-4, -\frac{11}{5}, \frac{23}{5})$ b) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{13}, d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 5\sqrt{3}, \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 13$

14. a) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{15}, \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 5, \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{105}, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 20$
b) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}, \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \sqrt{34}, \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{118}, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 21$

15. b) $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{11}{10}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_4$

16. a) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ b) $(1, 0), (0, -1)$

17. a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

b) $(1, 0, 0), \left(0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right), \left(0, \frac{2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{53}\right)$

18. $\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right)$

19. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$ 20. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$

21. $\mathbf{w}_1 = (-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}), \mathbf{w}_2 = (\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5})$ 22. $\mathbf{w}_1 = (\frac{39}{42}, \frac{93}{42}, \frac{120}{42}), \mathbf{w}_2 = (\frac{3}{42}, -\frac{9}{42}, \frac{6}{42})$

23. $\mathbf{w}_1 = (-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}), \mathbf{w}_2 = (\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{19}{4}, -\frac{9}{4})$

24. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{\sqrt{234}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{\sqrt{234}} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{\sqrt{234}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{26}{\sqrt{234}} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{19}} & -\frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{19}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}} & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}$

f) Las columnas no son linealmente independientes.

29. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1)$

30. a) $1 + x + 4x^2 = \frac{7}{3}\sqrt{2}\,\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\,\mathbf{v}_2 + \frac{8}{15}\sqrt{10}\,\mathbf{v}_3$

b) $2 - 7x^2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{28}{15}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\mathbf{v}_3$ c) $4 + 3x = 4\sqrt{2}\,\mathbf{v}_1 + \sqrt{6}\,\mathbf{v}_2$

31. $\mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 = \sqrt{3}(2x - 1), \mathbf{v}_3 = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.4 (Página 393)

1. a) $\begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 15 & -1 & 5 \\ -1 & 22 & 30 \\ 5 & 30 & 45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$

2. a) 0; los vectores columna no son linealmente independientes.
   b) 0; los vectores columna no son linealmente independientes.

3. a) $x_1 = 3, x_2 = \frac{9}{2}$; $\begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$ b) $x_1 = \frac{3}{7}, x_2 = -\frac{2}{3}$; $\begin{bmatrix} \frac{46}{21} \\ -\frac{5}{21} \\ \frac{13}{21} \end{bmatrix}$

   c) $x_1 = 12, x_2 = -3, x_3 = 9$; $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $x_1 = 14, x_2 = 30, x_3 = 26$; $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

4. a) $(\frac{16}{15}, \frac{29}{15}, \frac{13}{15})$ b) $(-5, -4, -9)$ 5. a) $(7, 2, 9, 5)$ b) $(-\frac{12}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{12}{5}, \frac{16}{5})$

6. $(0, -1, 1, 1)$

7. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 8. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. a) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -5), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 3)$

   b) $\begin{bmatrix} \frac{10}{35} & \frac{15}{35} & -\frac{5}{35} \\ \frac{15}{35} & \frac{26}{35} & \frac{3}{35} \\ -\frac{5}{35} & \frac{3}{35} & \frac{34}{35} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{10}{25}x_0 + \frac{15}{35}y_0 - \frac{5}{35}z_0 \\ \frac{15}{35}x_0 + \frac{26}{35}y_0 + \frac{3}{35}z_0 \\ -\frac{5}{35}x_0 + \frac{3}{35}y_0 + \frac{34}{35}z_0 \end{bmatrix}$ d) $\dfrac{15}{\sqrt{35}}$

10. a) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$ b) $\begin{bmatrix} \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} \\ \frac{8}{21} & -\frac{4}{21} & \frac{16}{21} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{4}{21}x_0 - \frac{2}{21}y_0 + \frac{8}{21}z_0 \\ -\frac{2}{21}x_0 + \frac{1}{21}y_0 - \frac{4}{21}z_0 \\ \frac{8}{21}x_0 - \frac{4}{21}y_0 + \frac{16}{21}z_0 \end{bmatrix}$

15. $P = A^T(AA^T)^{-1}A$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.5 (Página 408)

2. $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$

3. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

5. a) $(\mathbf{w})_S = (3, -7)$, $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ b) $(\mathbf{w})_S = (\frac{5}{28}, \frac{3}{14})$, $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{28} \\ \frac{3}{14} \end{bmatrix}$

   c) $(\mathbf{w})_S = \left(a, \dfrac{b-a}{2}\right)$, $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} a \\ \dfrac{b-a}{2} \end{bmatrix}$

6. a) $(\mathbf{v})_S = (3, -2, 1)$, $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $(\mathbf{v})_S = (-2, 0, 1)$, $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. a) $(\mathbf{p})_S = (4, -3, 1)$, $[\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $(\mathbf{p})_S = (0, 2, -1)$, $[\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. $(A)_S = (-1, 1, -1, 3)$, $[A]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 9. a) $\mathbf{w} = (16, 10, 12)$ b) $\mathbf{q} = 3 + 4x^2$ c) $B = \begin{bmatrix} 15 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

10. a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$ c) $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{w}]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ -\frac{13}{11} \end{bmatrix}$

11. a) $\begin{bmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$ c) $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} -\frac{17}{10} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$, $[\mathbf{w}]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$

12. a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{17}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{43}{12} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ 13. a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{23}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$

14. a) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ c) $[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ d) $[\mathbf{p}]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

15. b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ d) $[\mathbf{h}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{h}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

16. a) $(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ b) $(-\frac{7}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$ 17. a) $(-1 + 3\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ b) $(\frac{5}{2} - \sqrt{3}, \frac{5}{2}\sqrt{3} + 1)$

18. a) $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 5)$ b) $(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{2}\sqrt{2}, -3)$

19. a) $(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3}, 2, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})$ (b) $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}, 6, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})$

20. a) $(-1, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{7}{2}\sqrt{2})$ (b) $(1, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{2}\sqrt{3})$

21. a) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

23. $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ 26. a) Rotación b) Rotación

27. a) Rotación seguida de una reflexión b) Rotación

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 6 (Página 412)

1. a) $(0, a, a, 0)$ con $a \neq 0$ b) $\pm\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ 6. $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

7. $w_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ 8. No 11. b) θ tiende a $\frac{\pi}{2}$

12. b) Las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares si y sólo si los lados del paralelogramo tienen la misma longitud.

16. $a = 0$, $b = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; no son únicos

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.1 (Página 423)

1. a) $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ b) $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ c) $\lambda^2 - 12 = 0$
d) $\lambda^2 + 3 = 0$ e) $\lambda^2 = 0$ f) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

2. a) $\lambda = 3$, $\lambda = -1$ b) $\lambda = 4$ c) $\lambda = \sqrt{12}$, $\lambda = -\sqrt{12}$
d) No hay eigenvalores reales e) $\lambda = 0$ f) $\lambda = 1$

3. a) Base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 3$: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$;

base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 4$: $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

c) Base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = \sqrt{12}$: $\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{12}} \\ 1 \end{bmatrix}$;

base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = -\sqrt{12}$: $\begin{bmatrix} -\dfrac{3}{\sqrt{12}} \\ 1 \end{bmatrix}$

d) No hay eigenespacios. e) Base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 0$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

f) Base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. a) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ b) $\lambda^3 - 2\lambda = 0$
c) $\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = 0$ d) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$
e) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$ f) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0$

5. a) $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ b) $\lambda = 0$, $\lambda = \sqrt{2}$, $\lambda = -\sqrt{2}$ c) $\lambda = -8$
d) $\lambda = 2$ e) $\lambda = 2$ f) $\lambda = -4$, $\lambda = 3$

6. a) $\lambda = 1$: base $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda = 2$: base $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = 3$: base $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda = 0$: base $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = \sqrt{2}$: base $\begin{bmatrix} \frac{1}{7}(15 + 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{7}(-1 + 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = -\sqrt{2}$: base $\begin{bmatrix} \frac{1}{7}(15 - 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{7}(-1 - 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\lambda = -8$: base $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\lambda = 2$: base $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ e) $\lambda = 2$: base $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

f) $\lambda = -4$: base $\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = 3$: base $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. a) $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ b) $(\lambda - 4)^2(\lambda^2 + 3) = 0$

8. a) $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$ b) $\lambda = 4$

9. a) $\lambda = 1$: base $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda = -2$; base $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda = -1$: base $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\lambda = 4$: base $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

10. a) $\lambda = -1, \lambda = 5$ b) $\lambda = 3, \lambda = 7, \lambda = 1$ c) $\lambda = -\frac{1}{3}, \lambda = 1, \lambda = \frac{1}{2}$

11. $\lambda = 1, \lambda = \frac{1}{512}, \lambda = 512, \lambda = 0$

12. Para A^{25}, $\lambda = 1, -1$; base para $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; base para $\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

13. a) $y = x$ y $y = 2x$ b) No hay rectas c) $y = 0$ **14.** a) -5 b) 7

22. a) $\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = \frac{1}{2}$: $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda_3 = \frac{1}{3}$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = -2$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = -1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda_3 = 0$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = 3$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 4$: $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda_3 = 5$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.2 (Página 435)

1. 1, 2 o 3

2. a) $\lambda = 3, \lambda = 5$
b) Para $\lambda = 3$, el rango de $3I - A$ es 1 y la nulidad es 2. Para $\lambda = 5$, el rango de $5I - A$ es 2 y la nulidad es 2.
c) A es diagonalizable, ya que los eigenespacios producen un total de tres vectores básicos.

3. No es diagonizable **4.** No es diagonizable

5. No es diagonizable **6.** No es diagonizable

7. No es diagonizable

8. $P=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{4}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ **9.** $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

10. $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ **11.** $P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

12. No es diagonizable **13.** $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ **14.** No es diagonizable

15. $P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **16.** No es diagonizable **17.** $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1023 & 1024\end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix}-1 & 10237 & -2047\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 10245 & -2048\end{bmatrix}$

20. a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 8\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 8\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

21. $A^n=PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 4^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.3 (Página 441)

1. a) $\lambda^2-5\lambda=0$; $\lambda=0$: unidimensional; $\lambda=5$: unidimensional
b) $\lambda^3-27\lambda-54=0$; $\lambda=6$: unidimensional; $\lambda=-3$: bidimensional
c) $\lambda^3-3\lambda^2=0$; $\lambda=3$: unidimensional; $\lambda=0$: bidimensional
d) $\lambda^3-12\lambda^2+36\lambda-32=0$; $\lambda=2$: bidimensional; $\lambda=8$: unidimensional
e) $\lambda^4-8\lambda^3=0$; $\lambda=0$: tridimensional; $\lambda=8$: unidimensional
f) $\lambda^4-8\lambda^3+22\lambda^2-24\lambda+9=0$; $\lambda=1$: bidimensional;
$\lambda=3$: bidimensional

2. $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ **3.** $P=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$

4. $P=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ **5.** $P=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}25 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -50\end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. $P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 12. b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 7 (Página 442)

1. b) La transformación rota un ángulo θ los vectores; por consiguiente, si $0 < \theta < \pi$, entonces ningún vector diferente de cero es transformado en un vector en la misma dirección o en dirección opuesta.

2. $\lambda = k$ con multiplicidad 3. 3. c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 9. $A^2 = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 75 & 150 \\ 25 & 50 \end{bmatrix}$,

$A^4 = \begin{bmatrix} 375 & 750 \\ 125 & 250 \end{bmatrix}$, $A^5 = \begin{bmatrix} 1875 & 3750 \\ 625 & 1250 \end{bmatrix}$ 10. $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \\ 10 & -24 & 15 \end{bmatrix}$

12. b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ 15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 16. a) 18 b) -1

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.1 (Página 458)

3. No lineal 4. Lineal 5. Lineal 6. Lineal

7. Lineal 8. a) Lineal b) No lineal

9. a) Lineal b) No lineal 10. a) No lineal b) Lineal

12. $T(x_1, x_2) = (-4x_1 + 5x_2, x_1 - 3x_2)$; $T(5, -3) = (-35, 14)$

13. $T(x_1, x_2) = \frac{1}{7}(3x_1 - x_2, -9x_1 - 4x_2, 5x_1 + 10x_2)$; $T(2, -3) = (\frac{9}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{20}{7})$

14. $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 4x_2 - x_3, 5x_1 - 5x_2 - x_3, x_1 + 3x_3)$; $T(2, 4, -1) = (15, -9, -1)$

15. $T(x_1, x_2, x_3) = (-41x_1 + 9x_2 + 24x_3, 14x_1 - 3x_2 - 8x_3)$; $T(7, 13, 7) = (-2, 3)$

16. $T(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3) = (-10, -7, 6)$

17. a) Dominio: R^2; espacio imagen: R^2; $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$
b) Dominio: R^2; espacio imagen: la recta $y = \frac{3}{4}x$; $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (4x - 12y, 3x - 9y)$
c) Dominio: R^2; espacio imagen: R^2; $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$
d) Dominio: R^2; espacio imagen: the line $x = 0$; $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (0, 2x)$

18. a) Dominio: R^2; espacio imagen: R^2; $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(x, y) = (3x - 2y, x)$
b) Dominio: R^2; espacio imagen: la recta $y = \frac{3}{2}x$; $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(x, y) = (4y, 6y)$

19. a) $a + d$ b) $(T_2 \circ T_1)(A)$ no existe porque $T_1(A)$ no es una matriz 2×2.

20. $(T_1 \circ T_2)(p(x)) = p(x)$; $(T_2 \circ T_1)(p(x)) = p(x)$

21. $T_2(\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\mathbf{v}$ **22.** $(T_2 \circ T_1)(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 + a_2)x + (a_1 + 2a_2)x^2 + a_2x^3$

26. b) $(3T)(x_1, x_2) = (6x_1 - 3x_2, 3x_2 + 3x_1)$

27. b) $(T_1 + T_2)(x, y) = (3y, 4x)$; $(T_2 - T_1)(x, y) = (y, 2x)$

28. b) No lineal **29.** a) 4 b) .8415 c) 1

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.2 (Página 466)

1. a), c) **2.** a) **3.** a), b), c) **4.** a) **5.** b) **6.** c) **7.** a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) No existe base.

8. a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$

10. a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{14}{11} \\ \frac{19}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$ c) Rango $(T) = 2$; nulidad $(T) = 1$

11. a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) Rango $(T) = 1$; nulidad $(T) = 2$

12. a) $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) Rango $(T) = 2$; nulidad $(T) = 2$

13. a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) Rango $(T) = 3$; nulidad $(T) = 2$

14. a) Rango: Plano xz; espacio nulo; eje y
b) Rango: Plano yz; espacio nulo; eje x
c) Rango: Plano $y = x$; espacio nulo; la recta $x = -t$, $x = t$, $z = 0$

15. $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$; $R(T) = V$

16. a) Nulidad $(T) = 2$ b) Nulidad $(T) = 4$
c) Nulidad $(T) = 3$ d) Nulidad $(T) = 1$

17. Nulidad $(T) = 0$; Rango $(T) = 6$

18. a) Dimensión = Nulidad $(T) = 3$
b) No. Para que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea consistente para todo $\mathbf{b}$ en R^5, se debe tener $R(T) = R^5$. Pero $R(T) \neq R^5$, ya que rango $(T) = \dim R(T) = 4$

21. a) $x = -t, y = -t, z = t, \; -\infty < t < +\infty$ b) $14x - 8y - 5z = 0$

25. $\ker(D)$ consta de todos los polinomios constantes.

26. $\ker(J)$ consta de todos los polinomios de la forma kx.

27. $\ker(D \circ D)$ consta de todas las funciones de la forma $ax + b$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.3 (Página 475)

1. a) $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$; T es uno a uno. b) $\ker(T) = \left\{k\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$; T no es uno a uno.
c) $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$; T es uno a uno. d) $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$; T es uno a uno.
e) $\ker(T) = \left\{k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$; T no es uno a uno. f) $\ker(T) = \left\{k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$; T no es uno a uno.

2. a) $T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$ b) T no tiene inversa. c) $T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{19}x_1 - \frac{7}{19}x_2 \\ \frac{1}{19}x_1 + \frac{4}{19}x_2 \end{bmatrix}$

3. a) T no tiene inversa. b) $T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 - \frac{3}{4}x_3 \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \\ -\frac{3}{8}x_1 + \frac{5}{8}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \end{bmatrix}$ c) $T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix}$

d) $T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$

4. a) No es uno a uno b) No es uno a uno c) Uno a uno

5. a) $\ker(T) = \left\{k\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ b) T no es uno a uno porque $\ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

6. a) $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ b) T es uno a uno por el teorema 8.3.2.

7. a) T es uno a uno. b) T no es uno a uno. c) T no es uno a uno. d) T no es uno a uno.

8. a) T es uno a uno. b) T es uno a uno.

9. No. A no es invertible.

10. a) T no es uno a uno. b) $T^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1)$
c) $T^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$

11. a) $a_i \neq 0$ for $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ b) $T^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \ldots, \frac{1}{a_n}x_n\right)$

12. b) $T_1^{-1}(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)$;
$T_2^{-1}(x, y) = (\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y)$;
$(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y) = (\frac{3}{10}x - \frac{1}{10}y, \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y)$

13. b) $T_1^{-1}(p(x)) = \dfrac{p(x)}{x}$; $T_2^{-1}(p(x)) = p(x - 1)$;
$(T_2 \circ T_1)^{-1}(p(x)) = \dfrac{1}{x}p(x - 1)$

15. a) $(1, -1)$ d) $T^{-1}(2, 3) = 2 + x$

17. a) T no es uno a uno. b) T es uno a uno. $T^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

c) T es uno a uno. $T^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

20. J no es uno a uno porque $J(x) = J(x^3)$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.4 (Página 490)

1. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ **3.** a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **4.** a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ **6.** a) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **7.** a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ b) $3 + 10x + 16x^2$

8. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $-11x + 7x^2 - x^3$

9. a) $[T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ b) $T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 29 \end{bmatrix}$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{18}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{107}{7} & \frac{24}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{83}{7} \end{bmatrix}$

10. a) $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_3)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_4)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -42 \\ 32 \\ -10 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} -56 \\ 87 \\ 17 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_4) = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{253}{10} & \frac{49}{5} & \frac{241}{10} & -\frac{229}{10} \\ \frac{115}{2} & -39 & -\frac{65}{2} & \frac{153}{2} \\ 66 & -60 & -9 & 91 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -31 \\ 37 \\ 12 \end{bmatrix}$

11. a) $[T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_3)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $T(\mathbf{v}_1) = 16 + 51x + 19x^2$, $T(\mathbf{v}_2) = -6 - 5x + 5x^2$, $T(\mathbf{v}_3) = 7 + 40x + 15x^2$

c) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \dfrac{239a_0 - 161a_1 + 289a_2}{24} + \dfrac{201a_0 - 111a_1 + 247a_2}{8}x + \dfrac{61a_0 - 31a_1 + 107a_2}{12}x^2$

d) $T(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2$

12. a) $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, [T_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, [T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B'}[T_1]_{B',B}$

13. a) $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}, [T_2]_{B',B''} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, [T_1]_{B'',B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B''}[T_1]_{B'',B}$ **16.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

17. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{23}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $-6 + 48x$

18. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.5 (Página 505)

1. $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, [T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{56}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$ **2.** $[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{61}{10} \\ \frac{18}{5} & -\frac{19}{5} \end{bmatrix}, [T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{31}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{75}{2} & \frac{25}{2} \end{bmatrix}$

3. $[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, [T]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{13}{11\sqrt{2}} & -\frac{25}{11\sqrt{2}} \\ \frac{5}{11\sqrt{2}} & \frac{9}{11\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

4. $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}, [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ **5.** $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $[T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **7.** $[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. a) $\det(T) = 17$
b) $\det(T) = 0$
c) $\det(T) = 1$

10. a) $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$, donde B es la base normal de P_4; rango$(T) = 5$ y nulidad $(T) = 0$.   b) T es uno a uno.

11. a) $\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix}$

12. a) $\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

13. a) $\lambda = -4, \lambda = 3$ b) Base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = -4$: $-2 + \frac{8}{3}x + x^2$; base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 3$: $5 - 2x + x^2$

14. a) $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$

b) Base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = -2$: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. b) $\left(\dfrac{3+5\sqrt{3}}{4}, \dfrac{\sqrt{3}+5}{4}\right)$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 8 (Página 508)

1. No. $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + B \neq (A\mathbf{x}_1 + B) + (A\mathbf{x}_2 + B) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$, y si $c \neq 1$, entonces $T(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} + B \neq c(A\mathbf{x} + B) = cT(\mathbf{x})$.

2. b) $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

5. a) $T(\mathbf{e}_3)$ y dos cualquiera de $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$, y $T(\mathbf{e}_4)$ constituye una base para el rango; $(-1, 1, 0, 1)$ es una base para el kernel.

b) Rango = 3 nulidad = 1

6. a) $(-\frac{1}{3}, -\frac{13}{6}, 1)$,   b) $(1, 0, 0)$ y $(-2, 1, 0)$

7. a) Rango $(T) = 2$ y nulidad $(T) = 2$ b) T no es uno a uno.

11. Rango = 3, nulidad = 1 **13.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. a) $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$
b) $\mathbf{u}_1 = -2\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_2 = 5\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 = -7\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$

15. $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **17.** $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

19. b) x c) e^x

20. a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$ d) $-3x^2 + 3$ e)

24. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.1 (Página 520)

1. a) $y_1 = c_1e^{5x} - 2c_2e^{-x}$, $y_2 = c_1e^{5x} + c_2e^{-x}$ b) $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ **2.** a) $y_1 = c_1e^{7x} - 3c_2e^{-x}$, $y_2 = 2c_1e^{7x} + 2c_2e^{-x}$ b) $y_1 = -\frac{1}{40}e^{7x} + \frac{81}{40}e^{-x}$, $y_2 = -\frac{1}{20}e^{7x} - \frac{27}{20}e^{-x}$

3. a) $y_1 = -c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$, $y_2 = c_1e^x + 2c_2e^{2x} - c_3e^{3x}$, $y_3 = 2c_2e^{2x} - c_3e^{3x}$ b) $y_1 = e^{2x} - 2e^{3x}$, $y_2 = e^x - 2e^{2x} + 2e^{3x}$, $y_3 = -2e^{2x} + 2e^{3x}$ **4.** $y_1 = (c_1 + c_2)e^{2x} + c_3e^{8x}$, $y_2 = -c_2e^{2x} + c_3e^{8x}$, $y_3 = -c_1e^{2x} + c_3e^{8x}$

5. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ **6.** $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.2 (Página 531)

1. a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. a) $(-1, -2)$ (b) $(-2, -1)$ (c) $(2, 0)$ (d) $(0, 1)$

3. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. a) $(1, 1, -1)$ b) $(1, -1, 1)$ c) $(-1, 1, 1)$

5. a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. a) Rectángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, -2)$, $(0, -2)$.
b) Rectángulo con vértices en $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, 2)$, $(0, 2)$.
c) Rectángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$.
d) Cuadrado con vértices en $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$.
e) Paralelogramo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(7, 2)$, $(6, 2)$.
f) Paralelogramo con vértices en $(0, 0)$, $(1, -2)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$.

7. Rectángulo con vértices en $(0, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, 1)$, $(-3, 1)$

8. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

9. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. a) Expansión por un factor 3 en la dirección x. b) Expansión por un factor -5 en la dirección y.
c) Deslizamiento cortante por un factor 4 en la dirección x.

12. a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; expansión en la dirección y por un factor de 3, luego expansión en la dirección x por un factor de 2
b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; oblongamiento en la dirección x por un factor de 4, luego oblongamiento en la dirección y por un factor de 2
c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; expansión en la dirección y por un factor de -2, luego expansión en la dirección x por un factor de 4, luego reflexión con respecto a $y = x$
d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; oblongamiento en la dirección x por un factor de -3, luego expansión en la dirección y por un factor de 18, luego oblongamiento en la dirección y por un factor de 4

13. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **14.** a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -6\sqrt{3}+3 & 6+3\sqrt{3} \end{bmatrix}$

16. $16y - 11x - 3 = 0$ **17.** a) $y = \frac{2}{7}x$ b) $y = x$ c) $y = \frac{1}{2}x$ d) $y = -2x$

18. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **19.** b) No. A no es invertible. **22.** a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) dirección xz: $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$; dirección yz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. a) $\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = -1$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = -1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = -1$: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e) $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ f) (θ entero impar múltiplo de π) $\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(θ entero par múltiplo de π) $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(θ no múltiplo entero de π) no hay eigenvalores

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.3 (Página 542)

1. $y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}x$ **2.** $y = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}x$ **3.** $y = 2 + 5x - 3x^2$ **4.** $y = -5 + 3x - 4x^2 + 2x^3$

8. $y = 4 - .2x + .2x^2$; si $x = 12$, entonces $y = 30.4$ ($30.4 miles)

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.4 (Página 550)

1. a) $(1 + \pi) - 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$ b) $(1 + \pi) - 2\left[\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right]$

2. a) $\frac{4}{3}\pi^2 + 4\cos x + \cos 2x + \frac{4}{9}\cos 3x - 4\pi \operatorname{sen} x - 2\pi \operatorname{sen} 2x - \frac{4\pi}{3}\operatorname{sen} 3x$

b) $\frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$ **3.** a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{e-1}e^x$ b) $\frac{1}{12} - \frac{3-e}{2e-2}$

4. a) $(4e - 10) + (18 - 6e)x$ b) $\frac{(3-e)(7e-19)}{2}$ **5.** a) $\frac{3}{\pi}x$ b) $1 - \frac{6}{\pi^2}$ **8.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}\operatorname{sen}(kx)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.5 (Página 558)

1. a), c). e), g), h)

2. a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 5 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 0 \end{bmatrix}$

3. a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -4\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -4\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

4. a) $2x^2 + 5y^2 - 6xy$ b) $7x_1^2 + 5x_1x_2$ c) $x^2 - 3y^2 + 5z^2$

d) $-2x_1^2 + 3x_3^2 + 7x_1x_2 + x_1x_3 + 12x_2x_3$ e) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

5. a) valor máximo = 5 at $\pm(1, 0)$; valor mínimo $= -1$ en $\pm(0, 1)$

b) valor máximo $= \dfrac{11+\sqrt{10}}{2}$ en $\pm\left(\dfrac{-1}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}}, \dfrac{1}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}}\right)$;

valor mínimo $= \dfrac{11-\sqrt{10}}{2}$ en $\pm\left(\dfrac{-1}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}}, \dfrac{1}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}}\right)$

c) valor máximo $= \dfrac{7+\sqrt{10}}{2}$ en $\pm\left(\dfrac{3+\sqrt{10}}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}}, \dfrac{-1}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}}\right)$;

valor mínimo $= \dfrac{7-\sqrt{10}}{2}$ en $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}}, \dfrac{3+\sqrt{10}}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}}\right)$

d) valor máximo $= \dfrac{7}{2}$ en $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; valor mínimo $= \dfrac{1}{2}$ en $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

6. a) valor máximo $= 4$ en $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$; valor mínimo $= -2$ en $\pm\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

b) valor máximo $= 3$ en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$; valor mínimo $= 0$ en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

c) valor máximo $= 4$ en $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; valor mínimo $= 2$ en $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\pm(0, 1, 0)$

7. b) **9.** a)

11. a) Positiva definida. b) Negativa definida. c) Positiva semidefinida.
d) Negativa semidefinida. e) Indefinida. f) Indefinida.

12. a) Indefinida. b) Indefinida. c) Positiva definida. d) Indefinida.
e) Positiva y negativa semidefinida. f) Positiva definida.

13. c) No. $T(k\mathbf{x}) \neq kT(\mathbf{x})$, a menos de que $k = 1$.

14. a) $k > 4$ b) $k > 2$ c) $-\frac{1}{3}\sqrt{15} < k < \frac{1}{3}\sqrt{15}$

15. $A = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 & \cdots & c_1c_n \\ c_1c_2 & c_2^2 & c_2c_3 & \cdots & c_2c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1c_n & c_2c_n & c_3c_n & \cdots & c_n^2 \end{bmatrix}$

16. a) $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{n} & \dfrac{-1}{n(n-1)} & \dfrac{-1}{n(n-1)} & \cdots & \dfrac{-1}{n(n-1)} \\ \dfrac{-1}{n(n-1)} & \dfrac{1}{n} & \dfrac{-1}{n(n-1)} & \cdots & \dfrac{-1}{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{-1}{n(n-1)} & \dfrac{-1}{n(n-1)} & \dfrac{-1}{n(n-1)} & \cdots & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix}$ b) Positiva semidefinida

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.6 (Página 572)

1. a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$; $y_1^2 + 3y_2^2$ b) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$; $y_1^2 + 6y_2^2$

c) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$; $y_1^2 - y_2^2$

d) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{34-8\sqrt{17}}} & \frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}} \\ \frac{1}{\sqrt{34-8\sqrt{17}}} & \frac{-1}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$; $(1+\sqrt{17})y_1^2 + (1-\sqrt{17})y_2^2$

2. a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$; $y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_3^2$

b) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$; $7y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$

c) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$; $2y_2^2 - 7y_3^2$

d) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{20}} & \frac{3}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$; $\sqrt{10}y_2^2 - \sqrt{10}y_3^2$

3. a) $2x^2 - 3xy + 4y^2$ b) $x^2 - xy$ c) $5xy$ d) $4x^2 - 2y^2$ e) y^2

4. a) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. a) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-7 \quad 2]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 7 = 0$ b) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [5 \quad 8]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3 = 0$

c) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0$ d) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 7 = 0$

e) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [7 \quad -8]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 5 = 0$

6. a) Elipse b) Elipse c) Hipérbola d) Hipérbola e) Circunferencia f) Parábola g) Parábola h) Parábola i) Parábola j) Circunferencia

7. a) $9x'^2 + 4y'^2 = 36$, elipse b) $x'^2 - 16y'^2 = 16$, hipérbola
c) $y'^2 = 8x'$, parábola d) $x'^2 + y'^2 = 16$, circunferencia
e) $18y'^2 - 12x'^2 = 419$, hipérbola f) $y' = -\frac{1}{7}x'^2$, parábola

8. a) Hipérbola; ecuaciones posibles son $3x'^2 - 2y'^2 + 8 = 0,\ -2x'^2 + 3y'^2 + 8 = 0$
b) Parábola; ecuaciones posibles son $2\sqrt{2}x'^2 + 9x' - 7y' = 0,\ 2\sqrt{2}y'^2 + 7x' + 9y' = 0$
$2\sqrt{2}y'^2 - 7x' - 9y' = 0,\ 2\sqrt{2}x'^2 - 9x' + 7y' = 0$
c) Elipse; ecuaciones posibles son $7x'^2 + 3y'^2 = 9,\ 3x'^2 + 7y'^2 = 9$
d) Hipérbola; ecuaciones posibles son $4x'^2 - y'^2 = 3,\ 4y'^2 - x'^2 = 3$

9. $2x''^2 + y''^2 = 6$, elipse **10.** $13y''^2 - 4x''^2 = 81$, hipérbola **11.** $2x''^2 - 3y''^2 = 24$, hipérbola

12. $6x''^2 + 11y''^2 = 66$, elipse **13.** $4y''^2 - x''^2 = 0$, hipérbola **14.** $\sqrt{29}x'^2 - 3y' = 0$, parábola

15. a) Dos rectas que se cortan, $y = x$ y $y = -x$. b) No existe gráfica.
c) La gráfica es el simple punto (0, 0). d) La gráfica es la recta $y = x$.
e) La gráfica consta de dos rectas paralelas $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y = \pm 2$. f) La gráfica es el punto (1, 2).

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.7 (Página 578)

1. a) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz$ b) $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz$
c) $xy + xz + yz$ d) $x^2 + y^2 - z^2$
e) $3z^2 + 3xz$ f) $2z^2 + 2xz + y^2$

2. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. a) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [7 \quad 0 \quad 2]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 3 = 0$

b) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [-3 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 4 = 0$

c) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} - 1 = 0$ d) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} - 7 = 0$

e) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} + [0 \quad -14 \quad 0]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} + 9 = 0$

f) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} + [2 \quad -1 \quad 3]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0$

4. a) Elipsoide.
b) Hiperboloide de un manto.
c) Hiperboloide de dos mantos.
d) Cono elíptico.
e) Paraboloide elíptico.
f) Paraboloide hiperbólico
g) Esfera.

5. a) $9x'^2 + 36y'^2 + 4z'^2 = 36$, elipsoide.
b) $6x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 = 18$, hiperboloide de un manto.
c) $3x'^2 - 3y'^2 - z'^2 = 3$, hiperboloide de dos mantos.
d) $4x'^2 + 9y'^2 - z'^2 = 0$, cono elíptico.
e) $x'^2 + 16y'^2 - 16z' = 0$, paraboloide elíptico.
f) $7x'^2 - 3y'^2 + z' = 0$, paraboloide hiperbólico.
g) $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 25$, esfera.

6. a) $25x'^2 - 3y'^2 - 50z'^2 - 150 = 0$, hiperboloide de dos mantos.
b) $2x^2 + 2y'^2 + 8z'^2 - 5 = 0$, elipsoide.
c) $9x'^2 + 4y'^2 - 36z' = 0$, paraboloide elíptico.
d) $x'^2 - y'^2 + z' = 0$, paraboloide hiperbólico.

7. $x''^2 ++ y''^2 - 2z''^2 = -1$, hiperboloide de dos mantos.

8. $x''^2 + y''^2 + 2z''^2 = 4$, elipsoide.

9. $x''^2 - y''^2 + z'' = 0$, paraboloide hiperbólico.

10. $6x''^2 + 4y''^2 - 8\ 2\ z'' = 0$, paraboloide elíptico.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.8 (Página 587)

1. Multiplicaciones: mpn; adiciones: $mp(n - 1)$.

2. Multiplicaciones: $(k - 1)n^3$; adiciones: $(k - 1)(n^3 - n^2)$.

3.

	$n = 5$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación de Gauss-Jordan	+: 50 ×: 65	+: 375 ×: 430	+: 383,250 ×: 343,300	+: 333,832,500 ×: 334,333,000
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación de Gauss	+: 50 ×: 65	+: 375 ×: 430	+: 383,250 ×: 343,300	+: 333,832,500 ×: 334,333,000
Encontrar A^{-1} reduciendo [A | I] a [I|A^{-1}]	+: 80 ×: 125	+: 810 ×: 1000	+: 980,100 ×: 1,000,000	+: 998,001,000 ×: 1,000,000,000
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	+: 100 ×: 150	+: 900 ×: 1100	+: 990,000 ×: 1,010,000	+: 999,000,000 ×: 1,001,000,000
Encontrar det(A) por reducción de renglones	+: 30 ×: 44	+: 285 ×: 339	+: 328,350 ×: 333,399	+: 332,833,500 ×: 333,333,999
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ aplicando la regla de Cramer	+: 180 ×: 264	+: 3135 ×: 3729	+: 33,163,350 ×: 33,673,399	+: 33,316,633 × 10^4 ×: 33,366,733 × 10^4

4.

	$n = 5$ Tiempo de ejecución (s)	$n = 10$ Tiempo de ejecución (s)	$n = 100$ Tiempo de ejecución (s)	$n = 1000$ Tiempo de ejecución (s)
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación de Gauss-Jordan	1.55×10^{-4}	1.05×10^{-3}	.878	836
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación de Gauss	1.55×10^{-4}	1.05×10^{-3}	.878	836
Encontrar A^{-1} reduciendo $[A \mid I]$ a $[I \mid A^{-1}]$	2.84×10^{-4}	2.41×10^{-3}	2.49	2499
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	3.50×10^{-4}	2.65×10^{-3}	2.52	2502
Encontrar $\det(A)$ por reducción de renglones	1.03×10^{-4}	8.21×10^{-4}	.831	833
Resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ aplicando la regla de Cramer	6.18×10^{-4}	90.3×10^{-4}	83.9	834×10^3

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.9 (Página 597)

1. $x_1 = 2, x_2 = 1$

2. $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = -3$

3. $x_1 = 3, x_2 = -1$

4. $x_1 = 4, x_2 = -1$

5. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0$

6. $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$

7. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0$

8. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$

9. $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 1$

10. $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 0$

11. a) $A = L\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. b) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{bmatrix}$

b) $A = L_1DU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

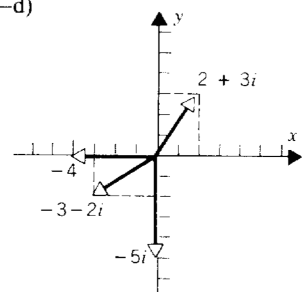
c) $A = L_2U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. Adiciones: $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$; multiplicaciones: $\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$

18. $A = PLU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.1 (Página 607)

1. (a–d)

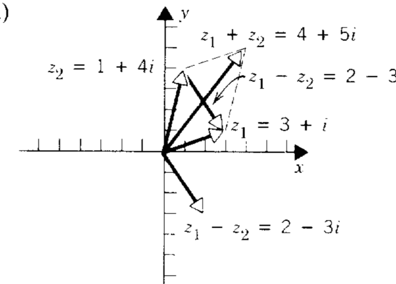


2. a) (2, 3) b) (−4, 0) c) (−3, −2) d) (0, −5) 3. a) $x = -2$, $y = -3$ b) $x = 2$, $y = 1$

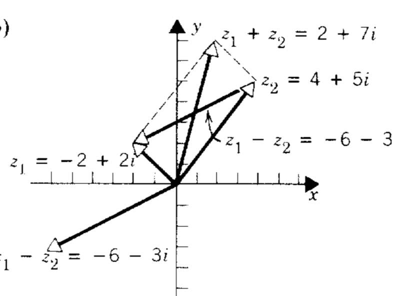
4. a) $5 + 3i$ b) $-3 - 7i$ c) $4 - 8i$ d) $-4 - 5i$ e) $19 + 14i$ f) $-\frac{11}{2} - \frac{17}{2}i$

5. a) $2 + 3i$ b) $-1 - 2i$ c) $-2 + 9i$

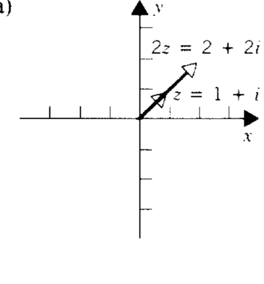
6. a)



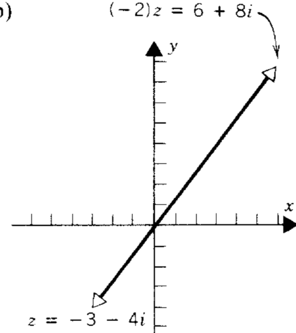
b)



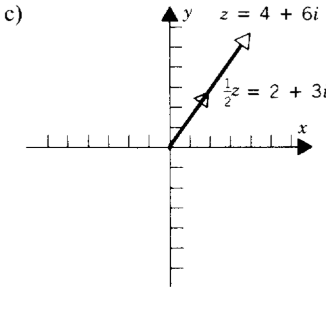
7. a)



b)



c)



8. a) $k_1 = -5$, $k_2 = 3$
b) $k_1 = 3$, $k_2 = 1$

9. a) $z_1z_2 = 3 + 3i$, $z_1^2 = -9$, $z_2^2 = -2i$
b) $z_1z_2 = 26$, $z_1^2 = -20 + 48i$, $z_2^2 = -5 - 12i$
c) $z_1z_2 = \frac{11}{3} - i$, $z_1^2 = \frac{4}{9}(-3 + 4i)$, $z_2^2 = -6 - \frac{5}{2}i$

10. a) $9 - 8i$ b) $-63 + 16i$ c) $-32 - 24i$ d) $22 + 19i$ 11. $76 - 88i$ 12. $26 - 18i$

13. $-26 + 18i$ 14. $-1 - 11i$ 15. $-\frac{63}{16} + i$ 16. $(2 + \sqrt{2}) + i(1 - \sqrt{2})$ 17. 0 18. $-24i$

19. a) $\begin{bmatrix} 1+6i & -3+7i \\ 3+8i & 3+12i \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3-2i & 6+5i \\ 3-5i & 13+3i \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3+3i & 2+5i \\ 9-5i & \text{[illegible]} \end{bmatrix}$ [illegible] $\begin{bmatrix} 9+i & 12+2i \\ 18-2i & 13+i \end{bmatrix}$

20. a) $\begin{bmatrix} 13+13i & -8+12i & -33-22i \\ 1+i & 0 & i \\ 7+9i & -6+6i & -16-16i \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6+2i & -11+19i \\ -1+6i & -9-5i \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6i & 1+i \\ -6-i & 5-9i \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 22-7i & 2+10i \\ -5-4i & 6-8i \\ 9-i & -1-i \end{bmatrix}$ **22.** a) $z = -1 \pm i$ b) $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **23.** b) i

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.2 (Página 614)

1. a) $2-7i$ b) $-3+5i$ c) $-5i$ d) i e) -9 f) 0 **2.** a) 1 b) 7 c) 5 d) $\sqrt{2}$ e) 8 f) 0

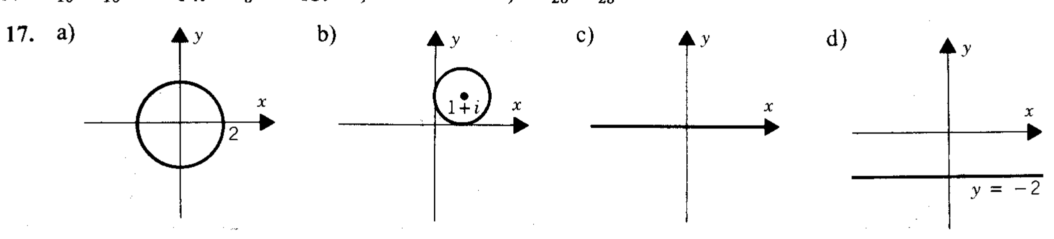
4. a) $-\frac{17}{25}-\frac{19}{25}i$ b) $\frac{23}{25}+\frac{11}{25}i$ c) $\frac{23}{25}-\frac{11}{25}i$ d) $-\frac{17}{25}+\frac{19}{25}i$ e) $\frac{1}{5}-i$ f) $\dfrac{\sqrt{26}}{5}$

5. a) $-i$ b) $\frac{1}{26}+\frac{5}{26}i$ c) $7i$ **6.** a) $\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i$ b) $-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$ c) $\frac{3}{5}+\frac{11}{5}i$ d) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ **7.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

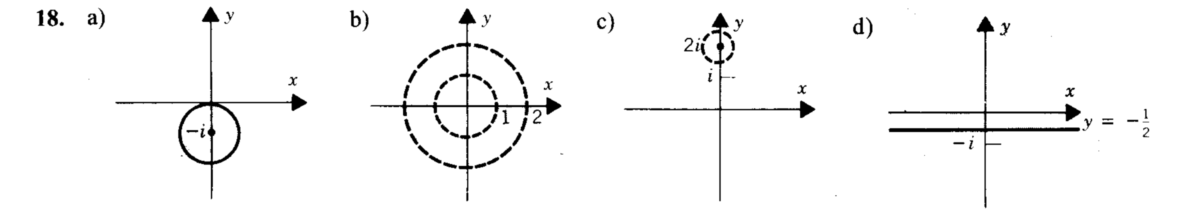
8. $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$ **9.** $-\frac{7}{625}-\frac{24}{625}i$ **10.** $-\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$ **11.** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}i$ **12.** $-\frac{1}{26}-\frac{5}{26}i$

13. $-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}i$ **14.** $-\frac{2}{5}$ **15.** a) $-1-2i$ b) $-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$

17. a) b) c) d)



18. a) b) c) d)



19. a) $-y$ b) $-x$ c) y d) x **20.** b) $-i$ **23.** a) $\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$ b) $\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

27. c) Sí, en caso de que $z \neq 0$. **28.** $x_1 = i, x_2 = -i$ **29.** $x_1 = 1+i, x_2 = 1-i$

30. $x_1 = \frac{1}{2}+i, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}-i$

31. $x_1 = i, x_2 = 0, x_3 = -i$ **32.** $x_1 = -(1+i)t, x_2 = t$ **33.** $x_1 = (1+i)t, x_2 = 2t$

34. $x_1 = -(1-i)t,\ x_2 = -it,\ x_3 = t$ **35.** a) $\begin{bmatrix} i & 2 \\ -1 & i \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -i & 2i \end{bmatrix}$

38. a) $\begin{bmatrix} -i & -2-2i & -1+i \\ 1 & 2 & -i \\ i & i & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1+i & -i & 1 \\ -7+6i & 5-i & 1+4i \\ 1+2i & -i & 1 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.3 (Página 627)

1. a) 0 b) $\pi/2$ c) $-\pi/2$ d) $\pi/4$ e) $2\pi/3$ f) $-\pi/4$ **2.** a) $5\pi/3$ b) $-\pi/3$ c) $5\pi/3$

3. a) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ b) $4[\cos \pi + i\,\text{sen}\,\pi]$

c) $5\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ d) $12\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

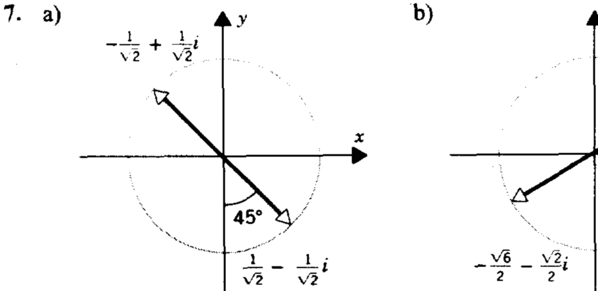
e) $3\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ f) $4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

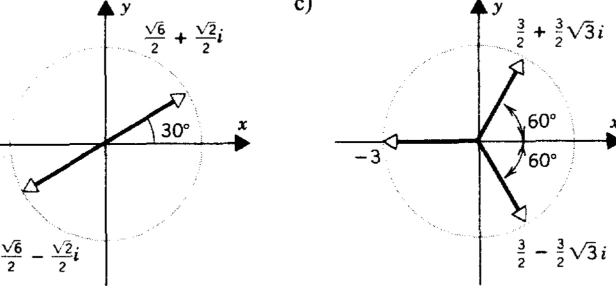
4. a) $6\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ b) $\frac{2}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$

c) $\frac{3}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$ d) $\frac{32}{9}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$

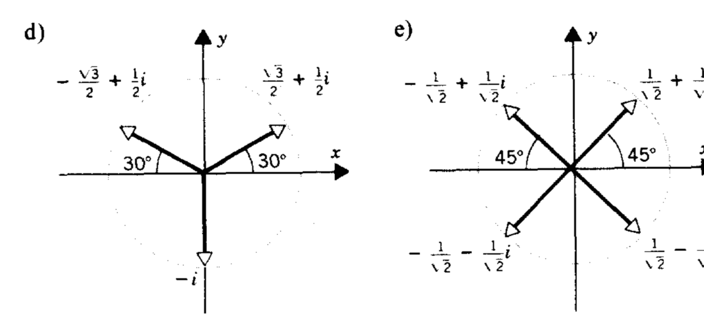
5. 1 **6.** a) -64 b) $-i$ c) $-64\sqrt{3} - 64i$ d) $-\frac{1+\sqrt{3}i}{2048}$

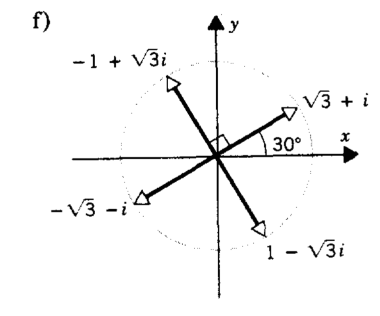
7. a) b) c)



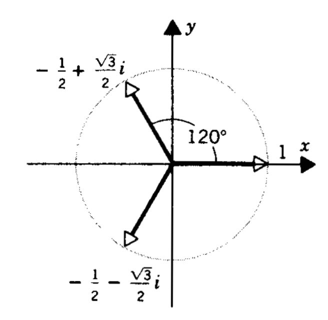


d) e) f)

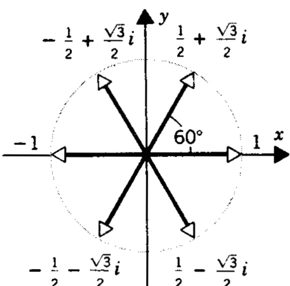




8.



9.



10. $\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right], \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right]$

11. a) $\pm 2, \pm 2i$ b) $\pm(2+2i), \pm(2-2i)$

12. Las raíces son $\pm(2^{1/4}+2^{1/4}i), \pm(2^{1/4}-2^{1/4}i)$ y la factorización es $z^4+8=(z^2-2^{5/4}z+2^{3/2})\cdot(z^2+2^{5/4}z+2^{3/2})$.

13. z gira 90° en el sentido de las manecillas del reloj **14.** a) 16 b) $\frac{i}{4^9}$

15. a) $\text{Re}(z)=-3, \text{Im}(z)=0$ b) $\text{Re}(z)=-3, \text{Im}(z)=0$
c) $\text{Re}(z)=0, \text{Im}(z)=-\sqrt{2}$ d) $\text{Re}(z)=-3, \text{Im}(z)=0$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.4 (Página 634)

1. a) $(3i, -i, -2-i, 4)$ b) $(3+2i, -1-2i, -3+5i, -i)$
c) $(-1-2i, 2i, 2-i, -1)$ d) $(-3+9i, 3-3i, -3-6i, 12+3i)$
e) $(-3+2i, 3, -3-3i, i)$ f) $(-1-5i, 3i, 4, -5)$

2. $(2+i, 0, -3+i, -4i)$

3. $c_1=-2-i, c_2=0, c_3=2-i$ **5.** a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\sqrt{37}$

6. a) $\sqrt{43}$ b) $\sqrt{10}+\sqrt{29}$ c) $\sqrt{10}+\sqrt{10}i$ d) $\sqrt{699}$ e) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{6}}, \frac{2i}{\sqrt{6}}, 0\right)$ f) 1

8. Todo $|k|$ al que $\frac{1}{5}$ **9.** a) 3 b) $2-27i$ c) $-5-10i$

10. El conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones dadas.

11. No es un espacio vectorial. No se cumple el axioma 6; es decir, el conjunto no es cerrado bajo la multiplicación escalar. (Por ejemplo, multiplicar por i).

12. No, R^n no es cerrado bajo la multiplicación escalar. (Multiplicar un vector diferente de cero de R^n por i.)

13. a) **14.** b) **15.** a), d) **16.** a), b), d)

17. a) $(3-2i)\mathbf{u}+(3-i)\mathbf{v}+(1+2i)\mathbf{w}$ b) $(2+i)\mathbf{u}+(-1+i)\mathbf{v}+(-1-i)\mathbf{w}$
c) $0\mathbf{u}+0\mathbf{v}+0\mathbf{w}$ d) $(-5-4i)\mathbf{u}+(5+2i)\mathbf{v}+(2+4i)\mathbf{w}$

18. a) Sí b) No c) Yes d) No **19.** a), b), c)

20. a) $\mathbf{u}_2=i\mathbf{u}_1$ b) Tres vectores en un espacio bidimensional c) A es un múltiplo escalar de B.

21. b), c) **22.** $\mathbf{f} - 3\mathbf{g} - 3\mathbf{h} = \mathbf{0}$ **23.** a) Tres vectores en un espacio bidimensional b) Dos vectores en un espacio tridimensional **24.** a), b)

25. a), b), c), d) **26.** $(-1-i, 1)$; dimensión = 1 **27.** $(1, 1-i)$; dimensión = 1

28. $(3+6i, -3i, 1)$; dimensión = 1 **29.** $(\frac{5}{2}i, -\frac{1}{2}, 1, 0), (-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}i, 0, 1)$; dimensión = 2

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.5 (Página 642)

2. a) -12 b) 0 c) $2i$ d) 37 **4.** a) $-4+5i$ b) 0 c) $4-4i$ d) 42

5. a) No se cumple el axioma 4. b) No se cumple el axioma 4. c) No se cumplen los axiomas 2 y 3. d) No se cumplen los axiomas 1 y 4. e) Este es un producto interior.

6. $-9-5i$ **7.** No se cumplen los axiomas 1 y 4.

9. a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{10}$ d) 0 **10.** a) $\sqrt{10}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 0

11. a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) 5 d) 0 **12.** a) $3\sqrt{10}$ b) $\sqrt{14}$ **13.** a) $\sqrt{10}$ b) $2\sqrt{5}$

14. a) 2 b) $2\sqrt{2}$ **15.** a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2}$ **16.** a) $7\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ **17.** a) $-\frac{8}{3}i$ b) Para ninguno

18. a), b), c) **20.** b) **21.** b), c)

23. $\left(\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{i}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2i}{\sqrt{21}}, \frac{3i}{\sqrt{21}}, \frac{2i}{\sqrt{21}}, \frac{-2i}{\sqrt{21}}\right), \left(-\frac{i}{\sqrt{7}}, \frac{2i}{\sqrt{7}}, -\frac{i}{\sqrt{7}}, \frac{i}{\sqrt{7}}\right)$

24. a) $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{10}}, -\frac{3i}{\sqrt{10}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(\frac{3i}{\sqrt{10}}, \frac{i}{\sqrt{10}}\right)$ b) $\mathbf{v}_1 = (i, 0), \mathbf{v}_2 = (0, -i)$

25. a) $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right), \mathbf{v}_3 = \left(\frac{i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}, -\frac{2i}{\sqrt{6}}\right)$

b) $\mathbf{v}_1 = (i, 0, 0), \mathbf{v}_2 = \left(0, \frac{7i}{\sqrt{53}}, \frac{-2i}{\sqrt{53}}\right), \mathbf{v}_3 = \left(0, \frac{2i}{\sqrt{53}}, \frac{7i}{\sqrt{53}}\right)$

26. $\left(0, \frac{2i}{\sqrt{5}}, \frac{i}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{5i}{\sqrt{30}}, -\frac{i}{\sqrt{30}}, \frac{2i}{\sqrt{30}}, 0\right), \left(\frac{i}{\sqrt{10}}, \frac{i}{\sqrt{10}}, -\frac{2i}{\sqrt{10}}, -\frac{2i}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{i}{\sqrt{15}}, \frac{i}{\sqrt{15}}, -\frac{2i}{\sqrt{15}}, \frac{3i}{\sqrt{15}}\right)$

27. $\mathbf{v}_1 = \left(0, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1-i}{\sqrt{3}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{3i}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1+i}{\sqrt{15}}\right)$

28. $\mathbf{w}_1 = \left(-\frac{5i}{4}, -\frac{i}{4}, \frac{5i}{4}, \frac{9i}{4}\right), \mathbf{w}_2 = \left(\frac{i}{4}, \frac{9i}{4}, \frac{19i}{4}, -\frac{9i}{4}\right)$ **36.** $\mathbf{u} = -\sqrt{3}i\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{6}}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_3$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.6 (Página 655)

1. a) $\begin{bmatrix} -2i & 4 & 5-i \\ 1+i & 3-i & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2i & 4 & -i \\ 1+i & 5+7i & 3 \\ -1-i & i & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -7i \\ 0 \\ 3i \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} \end{bmatrix}$

2. b), d), e) **3.** $k = 3+5i, l = i, m = 2-4i$ **4.** a), b)

5. a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{5} & -\dfrac{4}{5}\\ -\dfrac{4}{5}i & -\dfrac{3}{5}i\end{bmatrix}$ b) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1+i}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1-i}{2}\end{bmatrix}$ c) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}(\sqrt{3}-i) & \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})\\ \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}i) & \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}i)\end{bmatrix}$

d) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-i}{2} & -\dfrac{i}{\sqrt{3}} & \dfrac{3-i}{2\sqrt{15}}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{4-3i}{2\sqrt{15}}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{i}{\sqrt{3}} & -\dfrac{5i}{2\sqrt{15}}\end{bmatrix}$

7. $P=\begin{bmatrix}\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}} & \dfrac{1-i}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$

8. $P=\begin{bmatrix}-\dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{i}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

9. $P=\begin{bmatrix}-\dfrac{1+i}{\sqrt{6}} & \dfrac{1+i}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$

10. $P=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{\sqrt{14}} & \dfrac{5}{\sqrt{35}}\\ \dfrac{3-i}{\sqrt{14}} & \dfrac{3-i}{\sqrt{35}}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

11. $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\dfrac{1-i}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1-i}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

12. $P=\begin{bmatrix}\dfrac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{i}{\sqrt{2}}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

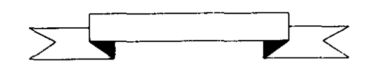
13. $\lambda = 2 \pm i\sqrt{15}$; no, porque A contiene elementos complejos.

14. $\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ es una posibilidad.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 10 (Página 657)

3. $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una posibilidad. **5.** $\lambda = 1, \omega, \omega^2 \; (= \overline{\omega})$ **10.** b) Dimensión = 2

ÍNDICE



LA EDICIÓN, COMPOSICIÓN, DISEÑO E IMPRESIÓN DE ESTA OBRA FUERON REALIZADOS BAJO LA SUPERVISIÓN DE GRUPO NORIEGA EDITORES.
BALDERAS 95, COL. CENTRO. MÉXICO, D.F. C.P. 06040
1200095000801522DP9200IE